

APUNTES DE DIBUJO COU (1ª y 2ª Evaluación: Dibujo geométrico, homologías, diédrico)

Perpendicularidad

Trazar una recta perpendicular sobre un punto de la recta:

1. Tomamos un punto O al azar, y trazamos con centro en él y radio OA una circunferencia, que corta la recta en 1. Unimos 1 con O y prolongamos, hasta que corte la circunferencia en 2. Unimos A con 2, y esa es la perpendicular.
2. Con centro en A trazamos un arco con radio al azar, que corta la recta en 1 y 2, con centro en ellos hacemos dos arcos que se cortaran. Unimos A con ese punto de corte y esa es la perpendicular
3. Cogemos las medidas de un t. rectángulo, como 3,4 y 5. Desde A trazamos un arco de 3, y con centro 4 unidades hacia un lado, hacemos un arco de radio 5, que corta al anterior, lo unimos con A y es la perpendicular.
4. Tomamos un radio r, y hacemos un arco que corta en 1, siempre con el mismo radio hacemos otro con centro en 1, que corta el primero en 2, con centro en 2 hacemos otro que corta al primero en 3, y con centro en 3, otro que corta al 3º en 4. Unimos A con 4 y será perpendicular.

Trazar una recta perpendicular a un punto del espacio desde una recta:

1. Tomamos un punto 1 al azar en la recta, unimos con A, hallamos el punto medio de A1, trazamos con centro en él una circunferencia con radio OA, esta cortará la circunferencia en 2. Unimos 2 con A y esa será la perpendicular.
2. Trazamos un arco con centro en A que corte la recta en 1 y 2, con centro en estos hacemos dos arcos que se cortaran, unimos ese punto con A para obtener la perpendicular.

Paralelismo

Trazar una recta paralela a otra dada que pase por A:

1. Se hace un arco con centro en A, que corta en 1. Trasladamos A1 sobre la recta, hallando 2, desde 2 con el mismo radio hacemos otro arco, que se cortará con el primero. Unimos ese punto de corte con A y será paralela.
2. Con centro en A hacemos un arco que cortará en 1, Con el mismo radio hacemos otro arco con centro en 1, que cortará en 2. Hacemos un arco de radio 2A en 1, y el punto de corte con el primer arco lo unimos con A para hallar la paralela.
3. Podemos hallar una recta perpendicular hasta A, y luego hacer otra perpendicular a esa sobre A, que será paralela a la recta.

Ángulos

Tipos de ángulos:

Relaciones de ángulos. Son iguales:

1 2 Alternos internos: 4-5, 3-6

3 4 Correspondientes: 2-6, 1-5, 4-8, 3-7.

5 6 Alternos externos: 8-1, 2-7.

7 8 Opuestos por el vértice: 2-3, 1-4, 6-7, 5-8

Ángulos en la circunferencia.

El ángulo cuyo vértice se halla en el centro se llama ángulo central, y lo nombramos con C.

Hallar la medida de los siguientes ángulos A de la circunferencia:

Ángulo inscrito:

Es aquel que tiene el vértice en la circunferencia. Si cerramos el ángulo uniendo el centro O con el extremo A obtenemos un t. isósceles. Sabemos que $Z+2A=180$, y que $Z+C=180$, por lo que $A=1/2 C$.

Ángulo seminscrito:

Tiene un lado tangente y otro secante. Unimos los dos cortes con el centro O, y levantamos una perpendicular al lado secante que pase por O, entonces $Z+G=90$, $G+A=90$, $Z=1/2.C$, y por lo que $A=Z$ y entonces $A=1/2 C$

El ángulo que forman dos rectas, secantes respecto a la circunferencia:

Unimos el extremo A con B, y vemos que $D+B+C=180$, $A+C=180$, entonces $A=D+B$, y A y B son ángulos inscritos, por lo que $A=1/2. (Cd+Cb)$.

Ángulo exterior

Unimos D y C, entonces, $A+D+B=180$, $B+C=180$, $C=A+D$, luego $A=C-D$, y entonces $A=1/2. (Cc-Cd)$

Ángulo semiexterior:

Tiene un lado tangente y otro secante, unimos la tangente con el punto de corte y operamos del mismo modo que antes, por lo que, $A=1/2. (Cc-Cd)$

Ángulo circunscrito:

Unimos los puntos de corte, entonces $D=A+B$, $A=D-B$, luego $A=1/2. (Cd-Cb)$.

Proporcionalidad

Una razón es la relación existente entre 2 cantidades, para expresarla se hace en forma de fracción, a/b . Una proporción es una igualdad entre razones $A/B=C/D$. Hallar un elemento de esa igualdad se llama hallar la cuarta proporcional, Para ello solo hay que poner 2 rectas secantes, poner en una de ellas A y C seguidas, poner en la otra B, unir el extremo con A, y hacer una paralela en el extremo de C.

La 3ª proporcional es la cantidad M que se repite en los medios de una proporción. Conociendo M y A, podemos hallar B, utilizando el mismo método que para la 4ª proporcional, o bien poner Ay M superpuestas, M en la otra, unir A con la M opuesta y hacer una paralela en M.

Otro método es con la construcción de triángulos, ya que según el teorema del cateto, el cateto de un triángulo es media proporcional entre su proyección sobre la hipotenusa, y la hipotenusa misma. Y según el teorema de la altura, la altura es media proporcional entre los dos segmentos que delimita sobre la hipotenusa.

Cómo hallar la sección áurea de un segmento AB:

La sección áurea es la parte división de un segmento tal que, la mayor es media proporcional entre la menor y la total. Para hallarla levantamos una perpendicular en un extremo y llevamos una distancia equivalente a la mitad del lado, hallando así C, con centro en C y radio la mitad del segmento hacemos una circunferencia. Unimos a con C, y cortará la circunferencia en D. La distancia AD es la sección áurea del segmento, así que la llevamos a este hallando E. Además se cumple siempre que la sección áurea de la tangente desde B a la circunferencia que tiene de diámetro AE, tiene como sección áurea la distancia EB. A esto se le llama hacer secciones áureas sucesivas.

Potencia de un punto

La potencia de un punto respecto a una circunferencia es el valor del producto $PA \cdot PB = K$, siendo P el punto y A y B dos puntos de corte cualesquiera. Entonces siempre se cumple que $PT^2 = K$. Entonces PT es media proporcional entre PA y PB, pues $PA \cdot PB = PT^2$.

Eje radical

El eje radical de 2 circunferencias es el lugar geométrico en que todos los puntos tienen la misma potencia para ambas, y por tanto la tangente desde un punto a una y a otra mide lo mismo. Siempre es perpendicular a la recta que une los centros.

Se halla:

1. Si son secantes se unen los puntos de corte y ese es el ER.
2. Si no lo son se hace una circunferencia auxiliar que corte ambas, se hallan los ER de cada una respecto de la auxiliar, estos se cortan en P. Levantamos una perpendicular a la recta que une los centros, que pase por P, y ese será el eje.
3. Si una de las circunferencias es un punto, hacemos una tangente desde ella a la otra, el ER estará en el punto medio. Levantamos una perpendicular a la recta que une los centros que pase por el punto medio y será el ER.
4. Si una circunferencia esta dentro de la otra se opera como en el caso 2.

Centro radical de 3 circunferencias:

El centro radical de 3 circunferencias es el punto donde se cortan todos los ejes radicales, para hallarlo tomamos la circunferencias consecutivas de 2 en 2, y operamos como en el caso 2 (porque son exteriores).

Problemas:

- Hacer una circunferencia con el mismo ER que otras dos:
- –Lo que hacemos es hallar dicho ER, y hacer una recta desde el punto hallado que corte la circunferencia auxiliar utilizada. La circunferencia tendrá que pasar por esos puntos de corte, y tendrá que tener el centro en la recta que une los centros de las otras. Por lo tanto hacemos la mediatriz de la recta que une los puntos de corte, y donde corte a la recta que une los centros será el centro de la

circunferencia.

Hacer una circunferencia con el mismo ER que otras dos, y que pase por un punto Q:

– Se hace el ER, y se hace una recta desde un punto N del ER, hasta Q, y la prolongamos. Hacemos la tangente desde N hasta una de las circunferencias. Queremos hallar un punto Q' para que tenga la misma potencia que la circunferencia a la que se le ha hecho la tangente ($NQ \cdot NQ' = NT^2$). Así que unimos T con su centro y prolongamos, hacemos la mediatriz de QT, y donde corten será el centro de la circunferencia con la que obtendremos Q'. Como nuestra circunferencia tendrá que tener esa potencia, y el centro en la recta que une los centros, hacemos la mediatriz de QQ', y donde corte a la recta que une los centros, será el centro de nuestra circunferencia.

Otro método es hacer la circunferencia auxiliar de tal modo que pase por Q. Hacer una recta desde el punto hallado de ER, que pase por Q, y la vuelve a cortar en Q'. Hacemos la mediatriz de QQ', y donde corte a la recta que une los centros, será el centro de nuestra circunferencia.

triángulos

Es un polígono de 3 lados que se clasifica según:

– Lados:

Equilátero

Isósceles

Escaleno

– Ángulos:

Acutángulo

Obtusángulo

Rectángulo

Los puntos notables de un triángulo son:

– Ortocentro: es el corte de las tres alturas. Si unimos sus bases obtenemos el triángulo órtico. El ortocentro será el incentro de dicho triángulo, y a la circunferencia inscrita en él se le llama circunferencia órtica.

– Incentro, es el corte de las bisectrices, y centro de la circunferencia inscrita.

– Baricentro, corte de las medianas.

– Circuncentro, corte de las mediatrices y centro de la circunferencia que lo inscribe.

Construir el triángulo:

Dados 2 ángulos (A y B) y el lado opuesto a uno de ellos (lo llamamos A1):

1. Colocamos el ángulo A en los 2 extremos del lado obteniendo 2 paralelas, y en el segundo colocamos B

después de A, prolongamos, y corta, en la otra paralela cerrando el triángulo.

2. Hacemos un arco capaz de ángulo B, en un extremo de A1 ponemos A, y donde lo corte es el vértice que falta.
3. Colocamos en un extremo A, y sobre esta recta B, hacemos una paralela a esta segunda que pase por el otro extremo.

Dada la bisectriz y la mediana de un ángulo y la altura:

Primero hacemos unas paralelas a una distancia equivalente a la altura, en una de ellas tomamos un punto que será el vértice del ángulo del cual sabemos mediana y bisectriz. Hacemos con centro en él dos arcos uno de radio la mediana, y otro la bisectriz. La mediana corta la otra paralela en el punto medio del lado opuesto, en ese punto levantamos una perpendicular que será la mediatriz del lado. La bisectriz y la mediatriz del lado opuesto se cortan siempre en el punto medio del arco que determinan los otros 2 vértices en la circunferencia que inscribe al triángulo, así que la bisectriz será el diámetro. Hallamos su punto medio y ya tendremos la circunferencia que lo inscribe. Unimos el vértice con las intersecciones de la circunferencia y la otra paralela y habremos resuelto.

Dada la mediana del lado, el lado y el ángulo opuesto:

Trazamos un arco capaz con el ángulo dado, unimos el centro con un extremo, y hallamos el punto medio de ese segmento, hacemos con centro en él y radio $\frac{1}{2}$ de ese segmento una circunferencia, que pasará por el punto medio del lado de la base, pero también del B1, así que desde el extremo opuesto hacemos un arco de radio mediana y ese será el punto medio de B1, lo unimos con el extremo, prolongamos y el vértice que falta esta donde corte con el a. capaz.

Esa circunferencia que hemos hecho es la que surge al unir todos los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia.

La suma de 2 lados, el otro y el ángulo (A):

Si prolongáramos el lado B, y en él abatiéramos C, obtendríamos 2 triángulos, uno isósceles, el ángulo que se repite en ese isósceles es $B=A/2$, pues $2B+C=C+A$.

Entonces lo que se hace para construirlo es hacer un a. capaz de ángulo $A/2$, desde un extremo se hace un arco con la distancia la suma de los lados, y donde corte es el vértice que falta.

La suma de los lados y 2 ángulos:

Si pusiéramos el triángulo y abatiéramos los lados sobre la recta de la base formaría 2 isósceles, a partir de aquí sabemos:

1. Que podemos poner la mitad de cada uno de los ángulos en los extremos, que se corten, y hacer mediatrices de esos segmentos, que delimitaran la base del triángulo, uniendo con el vértice ya estará.
2. $A+B+C=180$, $A/2+B/2+C/2=90$, entonces $B/2+C/2=90-A/2$, y como son isósceles los triángulos laterales, el ángulo total $T=A+B/2+C/2$, entonces $A+(90-A/2)=T$, y por consiguiente $T=A/2+90$.

Para resolver lo que hacemos es hacer un a. capaz de T, le ponemos en un extremo B/2, y solo que da unir los extremos con el punto de donde corte el a. capaz y hacer mediatrices de esos segmentos.

Construir el triángulo equilátero:

Dada la altura:

1. Hacer paralelas a la altura de distancia, coger un punto de una de ellas, poner 2 ángulos de 60 opuestos por el vértice y prolongar.
2. Hacemos una circunferencia de diámetro altura, le inscribimos un t. equilátero (hacer un arco desde un extremo de radio el de la circunferencia, unir cortes con el extremo superior). Hacemos una tangente a la circunferencia por el extremo del diámetro y prolongamos los lados.

Dada una circunferencia inscrita

Desde un extremo del diámetro hacemos un arco de radio el de la circunferencia, esos serán los puntos donde haga tangencia el triángulo, hacemos las tangentes y con ellas se determina la base.

Dada la circunferencia donde esta inscrito

Desde un extremo del diámetro hacemos un arco de radio el de la circunferencia, esos serán dos de los vértices, el tercero es el extremo superior del diámetro.

Construir un triángulo isósceles

Dada la altura y el ángulo del lado con la base:

Levantamos una perpendicular a la base en la que ponemos la altura. Ponemos el ángulo en la base y hacemos una paralela que pase por el extremo de la altura.

Dada la base y el ángulo opuesto:

Le hacemos la mediatriz a la base, y en un extremo ponemos la perpendicular, en esta ponemos $A/2$, y donde corte la mediatriz será el vértice superior.

Construir un triángulo rectángulo

Dada la hipotenusa y el ángulo con uno de los catetos:

Hacemos el a. capaz de 90, ponemos en un extremo el ángulo y donde corte con el arco es el vértice que falta.

Dada hipotenusa y altura:

Hacemos el a. capaz de 90, y desde un extremo otro arco de radio altura, donde corten es el vértice que falta.

Dada la hipotenusa y al suma de catetos:

Actuamos como en el problema en que no era rectángulo, solo que ahora, el a. capaz, será de 45.

Dado un cateto y la mediana del otro:

Levantamos una perpendicular en el extremo de un cateto, y desde el extremo opuesto, trazamos un arco de radio mediana que la corte, ese será el punto medio del otro cateto, duplicamos esa distancia así hallamos el otro vértice.

Dados el perímetro y uno de los catetos.

Ponemos C en el extremo del perímetro, y ahora desde el extremo de C lo levantamos (a C) en perpendicular, unimos con el otro extremo del perímetro, hacemos la mediatriz a ese segmento (ya que es un isósceles en el que se repite la hipotenusa) y así determinamos el otro vértice.

Dada la bisectriz de un ángulo agudo y un cateto:

Se hace una circunferencia de diámetro bisectriz, desde un extremo hago un arco de radio el cateto. Unimos con los puntos de corte, prolongamos una de ellas y en la otra ponemos un ángulo de 90 y la prolongamos.

Dada la hipotenusa y una mediana:

Hacemos una circunferencia de diámetro mediana, desde un extremo hacemos un arco de radio $H/2$, unimos el extremo con uno de los puntos de corte, en el hacemos otro arco con el mismo radio que cortará al otro, y ponemos un ángulo de 90 y prolongamos. Unimos el extremo del diámetro con el punto de corte de los 2 arcos y prolongamos.

Dada la hipotenusa y 2 medianas

Desde un extremo hacemos un arco de radio $2/3$ de la mediana del lado (pues esa es la distancia a la que siempre está el baricentro), desde la mitad de la hipotenusa hacemos un arco de $1/3$ de su mediana (idem), ese es el baricentro. Hacemos un a. capaz de 90, unimos el baricentro con la mitad de la hipotenusa, y prolongamos hasta que corte el a. capaz.

Paralelogramos

Se clasifican en:

- Paralelogramos:
- Rectángulo (lados p., ángulos ig.)
- Cuadrado (lados ig., ángulos ig.)
- Rombo (lados ig., ángulos ig. 2 a 2)
- Romboide (lados ig. 2 a 2, ángulos ig. 2 a 2)
- Trapecios
- Isósceles (Simétrico)
- Rectángulo (bases p., con un lado perpendicular)
- Escalenos (bases p., lados distintos)
- Trapezoides
- Escaleno (sin condiciones)
- Bisosceles (lados contiguos ig., 2 ángulos ig)

Construcción de un trapecio escaleno dados bases y lados:

Se puede descomponer en un romboide y un triángulo, resolvemos el triángulo, prolongamos la base y le hacemos una paralela por el vértice superior, lo cerramos y ya hemos terminado.

Construir un rectángulo conocida la diagonal y un lado:

Se hace un a. capaz de 90, arco con radio lado, y hacemos paralelas.

Escala

Hallamos el coeficiente de la escala, y para saber que unidad usar multiplicamos por 10 tantas veces como haga falta para que podamos realizar las divisiones. Estas divisiones están numeradas con números naturales que se ponen por debajo. A la izquierda del 0 suele haber una contraescala, que es una unidad dividida entre 10.

Problema: En un plano a escala 1/25000 la distancia AB es 7'5mm ¿Cuál es la real?

$$1/7'5 = 25000/x \Rightarrow x = 187'500 \text{ m}$$

Problema: Los tabiques de 12'5cm de espesor de una casa, están representados por 2'5mm, ¿Cuál es la escala?

$$0'25/1 = 12'5/x \Rightarrow x = 50 \Rightarrow \text{Escala} = 1/50$$

División de una circunferencia

Una circunferencia es una curva cerrada, mientras que un círculo es la superficie que contiene. En la circunferencia hay que destacar los siguientes elementos:

- Tangente, toca en un punto a la recta
- Secante, la toca en 2 puntos
- Cuerda, une 2 puntos.
- Diámetro, la mayor cuerda posible
- Radio, la mitad del diámetro.

Y en el círculo:

- Cuadrante, 90 grados del círculo
- Sextante, 60
- Sector, uno cualquiera
- Segmento, porción de círculo limitada por una cuerda.

Ahora vamos a dividir la circunferencia en partes iguales:

- Tres partes: Con centro en el extremo del diámetro, hacemos un arco con el radio de la circunferencia, y unimos los cortes con el extremo superior del diámetro.
- Cuatro partes: hacer los 2 diámetros.
- Cinco partes: Se hacen los 2 diámetros, se hace la mediatriz del radio, con centro en ella y radio hasta el extremo superior del diámetro hacemos un arco, y entonces con centro en el extremo superior y radio hasta el punto de corte del arco con el diámetro, hacemos otro arco, y donde corte la circunferencia es la quinta parte.
- Seis partes, hacemos como al dividir en 3 partes, pero en los dos extremos.
- Siete partes: Se comienza como al dividir en 3 partes, pero luego unimos los puntos de corte, y la mitad de esa cuerda es 1/7.
- Ocho partes: Se hacen los diámetros, y las bisectrices de los ángulos que forman, y se determinan 8 partes.
- Nueve partes: Desde el extremo superior hacemos un arco de radio lado, que corta a la circunferencia en A, desde el extremo inferior hacemos un arco de radio hasta A, que corta la prolongación del diámetro en B. Con centro en B y radio hasta el extremo superior del diámetro hacemos otro arco, y la distancia desde donde corte al diámetro hasta el extremo opuesto es 1/9.
- Diez partes: Se hacen los 2 diámetros, se hace la mediatriz del radio, con centro en ella y radio hasta el extremo superior del diámetro hacemos un arco, y la distancia desde donde corta el diámetro hasta el centro es 1/10.

- Once partes: Desde el extremo izquierdo del diámetro con el radio de la circunferencia hacemos un arco que corta en F. Con el mismo radio hacemos otro en el extremo inferior del diámetro, que corta en E. Con centro en E y radio hasta F hacemos un arco que corta el diámetro en G. Hacemos un arco con centro en F y radio hasta G, la distancia desde donde corta con la circunferencia hasta el extremo superior del radio es $1/11$
- Quince partes: Se hace un arco con $1/6$, y otro con $1/10$, la diferencia es $1/15$.

Rectificación de la circunferencia:

Mascheroni: Se hacen 2 arcos desde los extremos con radio desde la circunferencia, y otros 2 arcos con radio hasta donde ha cortado el arco opuesto. Se hace un arco con centro donde ha cortado el primer arco y radio hasta donde han cortado los segundos, donde corta la circunferencia hasta el extremo del diámetro horizontal opuesto hay $1/4$.

Kochansky: Se hace una tangente perpendicular al diámetro, se pone sobre ese radio un ángulo de 30° , y a partir de donde corta la tangente se pone 3 veces el radio. Unimos ese punto con el extremo superior del diámetro, esa distancia es $1/2$.

Arquímedes: Aun lado del diámetro se pone $1/7$ del diámetro, y al otro 2 veces el diámetro, toda esa distancia es la longitud de la circunferencia.

Procedimiento de los polígonos: Inscribimos un triángulo, hacemos 2 diámetros que tengan un extremo en un vértice del triángulo. Hacemos con ellos un cuadrado, y abatimos su lado sobre la prolongación del lado del triángulo, esa distancia es $1/2$.

Rectificar un arco AB: Se divide el radio en 4, y se llevan $3/4$ de este sobre su prolongación, Se une ese punto con A y B, y donde corte con una tangente perpendicular al diámetro, formará el segmento de ese arco.

Construcción de polígonos con el lado AB

Pentágono

1. Hallar la mediatriz en D, levantar una perpendicular sobre B, llevar el lado, hallando C, con centro en D, y radio DC, hacer un arco que corta la prolongación del lado en F, AF es la diagonal. Hacemos dos arcos desde A y B con radio AF, que cortan en G, con centro en G hacemos un arco con radio AB, igual desde A y B, hallando así los últimos 2 vértices.

2. Hacer la mediatriz, le trasladamos el radio, en C, unimos BC y prologamos, en esa prolongación ponemos $1/2$ AB, hasta D, con centro en B y radio hasta D hacemos un arco que corta la mediatriz en E. Desde E hacemos un arco con radio AB, igual que desde A y B, hallando así todos los vértices.

Hexágono:

Hacemos un t. equilátero, con centro en el vértice superior y radio AB, hacemos una circunferencia que será la que lo inscriba.

Heptágono

En A ponemos un ángulo de 30° , que corta a una perpendicular levantada sobre B en C. Hacemos la mediatriz de AB, y hacemos, con centro en A y radio hasta C un arco que corta la mediatriz en O, centro de la circunferencia que lo inscribe.

Octógono

Hallamos la mediatriz, y con centro en el punto medio hacemos un arco de radio $\frac{1}{2} AB$, que la corta en C. Con centro en C y radio hasta B hacemos un arco que corta la mediatriz en O, centro de la circunferencia que lo inscribe.

Eneágono

Hacemos un arco con centro en B y radio AB, que corta la prolongación del lado en C. Con centro en C y radio AB hacemos otro arco, que corta al primero en D. Unimos BD, y ese ángulo lo dividimos en 3, hallando así el punto E. Hacemos la mediatriz de BE, y donde corte a la mediatriz de AB será el centro de la circunferencia que lo inscribe.

Decágono

Se hace como el pentágono, pero el vértice superior será el centro de la circunferencia que lo inscribe.

Dodecágono

Se empieza como en el hexágono, pero luego la distancia desde el vértice superior hasta A la vuelve a llevar sobre la mediatriz hallando el centro de la circunferencia que lo inscribe.

N-lados

1. Se hace la circunferencia que inscribe a un hexágono, y luego el radio se divide en 6 partes, esos serán los centros de las circunferencias de los distintos polígonos empezando a contar a partir de 6. Se pueden seguir con esas divisiones en la prolongación del diámetro.

2. Hacemos una circunferencia pequeña, dividimos 360 entre el número de lados, para hallar el ángulo que se formará al unir 2 extremos de un lado con el centro. Unimos Los 2 puntos de corte, y en esa recta trasladamos el lado, Hacemos una paralela al otro lado del ángulo por B, y cortará al ángulo en C. Hacemos una paralela al lado que pase por C. Cortará lado opuesto del ángulo, dándonos el radio de la circunferencia que lo inscribe.

Tangencias

Hacer la tangente de:

–Una circunferencia:

Hacer una perpendicular al radio

–De un punto a una circunferencia:

Se une con l centro, se traza 2 a. capaces, y donde corten con la circunferencia son los 2 puntos de tangencia.

–Dos circunferencias:

1. Tangentes exteriores: Se traza otra concéntrica a la mayor de radio $R-r$, se unen los centros, se halla la mediatriz, y se traza una circunferencia auxiliar hasta los centros. Se une el centro con los puntos de corte con la circunferencia menor, y se prolongan, donde corten a la mayor serán los puntos de tangencia. Se hacen paralelas en la menor, hallando todos los puntos de tangencia.

2. Tangentes interiores: Se opera igual, salvo que la circunferencia es de radio $R+r$, y que las paralelas se hacen con las del lado opuesto.

–A otra circunferencia, que pase por P:

Si va a ser exterior se hace una circunferencia concéntrica de radio $R+r$, y desde P una de radio R, donde corte a la otra son los centros de las soluciones.

Si va a ser interna, igual pero restando el radio en lugar de sumar.

–A los lados de un ángulo:

Hacemos la bisectriz, y una paralela a un lado separada el radio, obtenemos el centro.

–A otra circunferencia en un punto de esta:

Se une el centro con T, se prolonga y en la prolongación se pone el radio.

–El enlace de 2 circunferencias:

1. Cóncavo, Trazamos 2 circunferencias concéntricas sumando a cada una el radio del enlace, los puntos de corte son los centros.

2. Convexo, se opera igual pero las concéntricas tienen de radio el del enlace menos el de la circunferencia.

–A otra en un punto, y que pase por un punto P:

Unimos el centro con T y prolongamos. Unimos T con P y le hacemos la mediatriz, el punto de corte es el centro.

–El enlace 2 rectas:

Se hacen paralelas separadas el radio, el punto de corte es el centro

–El enlace de dos rectas con arcos de distinto radio:

Desde los extremos de cada recta se ponen perpendiculares, y en ellas se pone una distancia superior a la que separa los respectivos extremos. Se unen esos puntos y se halla su mediatriz. El primer centro será el punto donde corte la mediatriz en la perpendicular más exterior (considerando el más exterior el que se sitúa más alejado de los extremos opuestos de la recta), el segundo será el extremo de la otra perpendicular. El punto de unión entre arcos lo hallamos al unir los centros y prolongar esa recta.

–A una recta y que pase por un punto P:

Se levanta una perpendicular en T, se une PT, se halla su mediatriz, y el corte con la perpendicular es el centro.

–Tangente a una recta y que pase por A y B:

Se unen A y B, se halla su mediatriz, se hace una circunferencia auxiliar que pase por A y B, se le hace una tangente desde C (corte del ER con la recta), se traslada la longitud de la tangente a ambos lados de C, se levantan perpendiculares en T1 y T2, y los cortes con la mediatriz son los centros.

–Circunferencias tangentes a los lados de un ángulo, que pasen por P:

Se hace la bisectriz y se traslada P debajo de ella, hallando P', se unen ambos, y se prolonga. Se hace una circunferencia con centro en la bisectriz que pase por P y P' y se opera igual que antes.

–Circunferencias tangentes a una recta y a una circunferencia en un punto de esta:

Unimos T con el centro y prolongamos. Hacemos una perpendicular a esa recta en T, que cortará la recta. Los centros estarán en las bisectrices de los ángulos suplementarios hallados, así que estarán en la intersección de esta con la recta que unía T y el centro.

–Circunferencias tangentes a otra que pasen por A y B.

Se unen, se halla su mediatriz. Se hace una circunferencia auxiliar con centro en ella que pase por A y B y que sea secante con la otra. Se halla el ER de ambas, y desde donde se corte con la prolongación de AB hacemos tangentes a la circunferencia dada. Unimos el centro con T1 y T2, prolongamos, y los cortes con la mediatriz de AB son los centros.

–Circunferencias tangentes a otras dos, en un punto de una de ellas (se opera igual que con: que pasen por un punto y sean tangente a otra):

1. Unimos el centro con T, prolongamos. Levantamos una perpendicular a ella por T. Hacemos una circunferencia que pase por T y sea secante con la otra. Hallamos el ER, y donde corte con el ER de la otra, hacemos tangentes a la segunda circunferencia, y se opera igual que antes.

2. Se suma o resta el radio de la segunda a partir de T, se une con el centro de la segunda y se halla la mediatriz, los cortes con la recta que une el centro con T son los centros.

Equivalencias

Teniendo un triángulo, y hacemos una recta paralela a la base que pase por el vértice superior sucede que si unimos la base a cualquier punto de la recta obtenemos un triángulo con la misma superficie.

Si tenemos un triángulo y queremos hallar un cuadrado de la misma solo tenemos que hallar el lado l que es media proporcional de $a/2$ y b. Ya sea por potencia de un punto (como en el dibujo, por el teorema de la altura o por el del cateto).

Si tenemos un polígono irregular podemos simplificarlo en un triángulo mediante equivalencias a un triángulo, y de ahí a un cuadrado.

Para realizar la cuadratura de una circunferencia: rectificamos $\frac{1}{2}$ de la circunferencia por el método de Kochamsky, llevamos la medida del radio a ambos lados en perpendicular y tendremos un rectángulo de superficie equivalente. Para obtener un cuadrado solo hay que hallar su lado que será media proporcional entre el radio y la $\frac{1}{2}$ de la circunferencia.

homologías

Es la correspondencia puntual del plano. Para que exista es necesario un eje, un centro de homología y dos elementos homólogos. Tenemos que buscar los puntos que se corresponden hasta llegar al punto doble, que se corresponde consigo mismo, y que esta en el eje.

Así dados el eje, el centro de homología, una figura y un punto homologo, lo que se hace es prolongar las

rectas que pasan por ese punto hasta llegar al eje, los puntos dobles se unen con el homologo y se prolongan y así obtenemos las rectas homologas. Se une el centro de homología con los vértices y prolongamos, los cortes con sus respectivas rectas homologas son los puntos homólogos.

Rectas límite

Son los puntos homólogos de los del infinito de la figura. Hay dos, la recta límite de la figura (RL) y la recta límite de la figura homologa (R'L'). Para hallar cada una se hace una paralela desde el centro de homología a la recta de la que queremos hallar su RL, prolongamos su recta homologa, y donde se corten será un punto de la RL. Como la RL es siempre paralela al eje, con hallar un punto es suficiente. Para hallar R'L' se opera igual pero haciendo la paralela a la homologa. La distancia a la que esta una de las RL del centro de homología es la misma que la otra del eje.

Afinidad

Es un caso particular de homología en el que el centro esta en el infinito, por tanto las rectas que unen los vértices con este son paralelas. Nos tienen que dar la dirección de afinidad, que es la dirección en la que se ponen las paralelas. El resto del funcionamiento es el de una homología normal.

Afinidad ortogonal:

La dirección de afinidad es perpendicular al eje.

Simetría

Es una afinidad ortogonal en la que la figura homologa esta a la misma distancia del eje que la figura.

Homotecia

El eje esta en el infinito. Los puntos se alinean con el centro. Existe una proporcionalidad entre las figuras homotéticas, porque los lados son paralelos. Si por ejemplo te piden una figura que sea la mitad que otra, solo hay que coger la mitad de la distancia al centro y hacer paralelas. Nos pueden pedir una negativa, y entonces la haríamos al otro lado del centro.

Traslación

Necesitamos conocer la distancia y la dirección mediante un vector equipolente, se aplica a cada punto y así trasladamos la figura.

Rotación

Tenemos la figura, el centro de homología y el ángulo, unimos los puntos con el centro, a partir de esa recta aplicamos el ángulo, con vértice en el centro, y a la nueva recta llevamos la distancia que hay del centro a la figura.

A una rotación de 180° se le llama simetría central.

Problemas

Transformar un cuadrilátero en un cuadrado por homología, dada la RL, y eje:

Prolongamos los lados y diagonales hasta el eje. En los cortes con la RL hacemos 2 arcos capaces, uno con los

cortes de los lados, y otro con el de las diagonales. El corte de ambos será el centro de homología, ya que así los lados del cuadrado formaran 90° , pues las uniones con los cortes del a. capaz con la RL son las paralelas de los lados del cuadrado (y lo mismo con las diagonales. En los puntos dobles hallados en el eje se hacen paralelas a las rectas correspondientes del a. capaz, dándonos

al cortarse un cuadrado, y las diagonales, las diagonales de ese cuadrado.

Transformar un triángulo escaleno en uno equilátero por homología dados el eje y la RL:

Se opera igual que en el caso anterior, pero los arcos capaces se hacen de 60° , pues ese es el ángulo que forman los lados de un t. equilátero.

Transformar una circunferencia en una elipse por homología dados el centro, el eje y la RL:

Tomamos un punto R en la RL, desde el que trazamos las tangentes a la circunferencia. Unimos los puntos de tangencia y prolongamos, cortando la RL en M. Desde M hacemos las tangentes a la circunferencia, unimos los puntos de tangencia y prolongamos, cortando la RL en R. Prolongamos todas tangentes y las uniones, hallando los puntos dobles en el eje. Unimos R y M con el centro O. Desde los puntos dobles que vienen de R se hacen paralelas a OR, y desde los de M, a la recta OM. Así formamos un romboide, en el cual trazamos la elipse.

Realizar la homología de un triángulo estando el centro en el eje:

Se opera como en una homología normal, pero el triángulo homologo estará junto al otro, pues los puntos se unen con el centro desde el eje.

Teniendo eje y RL' hacer el homologo de un triángulo:

Prolongamos los lados de este hasta que corten la RL' y el eje, los puntos de corte con la RL' los unimos con el centro, y desde los puntos dobles del eje hacemos paralelas a las rectas correspondientes que acabamos de hallar

Teniendo O, eje, y RL hacer el homologo de un triángulo:

Desde O hacemos paralelas a los lados del triángulo, hasta que corten la RL. Prolongamos los lados hasta hallar los puntos dobles. Unimos estos con los cortes en la RL y prolongamos, hallando las rectas homologas. Hallamos los puntos homólogos de la forma habitual, y habremos hallado el triángulo homologo

Inversión

Es la correspondencia puntual del plano en sí mismo, tal que 2 puntos se corresponden según $QA \cdot QA' = K$, estando Q, A, A' alineados y siendo Q el centro de inversión, A y A' puntos inversos y K la potencia de inversión.

– Si queremos hallar el punto inverso al punto no alineado B en la potencia determinada por Q, A, A', hacemos una circunferencia que pase por B, A, A'. Unimos Q con B y prolongamos, cuando corte de nuevo con la circunferencia será B'.

– Si están alineados lo que hacemos es tomar un punto no alineado C, hallar su inverso en esa potencia por el método anterior, hacer una circunferencia que pase por B, C y C', y donde corte a la recta que une QB será B'.

– Si conocemos el ángulo que forma QB con BA, solo hay que ponerlo en A', y donde corte la prolongación de

QB será B'. Pues en los cuadriláteros inscritos los ángulos opuestos son suplementarios.

Puntos dobles de la inversión

Son aquellos que son inversos de si mismos, Para hallarlos se hace una tangente de Q a la circunferencia que pasa por A y A', y se hace con centro en Q una circunferencia de radio QT, ya que $QT \cdot QT = K$.

Figura inversa de una circunferencia

–La figura inversa de una circunferencia es una recta, para demostrarlo ponemos en A' una recta perpendicular, tomamos en ella diferentes puntos (B', C', D'...), que unimos con Q. Desde A hacemos perpendiculares a las diferentes rectas que cortan en B, C, D... si los unimos todos da una circunferencia con diámetro QA.

–Si la recta no pasa por A', lo que hacemos es hacerle una perpendicular desde Q, hallando E', Hacemos una circunferencia que pase por A, A' y E', que corta QE' en E. El diámetro de la circunferencia es QE, y su centro esta en su punto medio.

–Si queremos hallar los puntos en una recta cuyos inversos serían los vértices de un cuadrado, no tenemos más que hacer la circunferencia inversa, inscribir en ella un cuadrado, unir cada vértice con Q y prolongamos hasta que corte con la recta.

Problemas

– Siendo O centro de una inversión exterior a la circunferencia C, encontrar la potencia K para que C' coincida con C, hallar los puntos dobles:

Tiene que producirse una potencia tal que C coincida con C'. Luego la tangente de C ha de ser tal que C' tenga el mismo diámetro. Hacemos una circunferencia y en la prolongación del diámetro, la potencia K será $3 \cdot 9(R+R+R)=27=K$ Para hallar la circunferencia buscada solo hay que hacer centro en el extremo del diámetro y hacerla del mismo radio. Los puntos dobles serían los cortes, y desde O a cada uno de ellos la tangente, que será raíz de la potencia.

–Hallar la figura inversa de una circunferencia en una inversión de potencia $K=-27$ y el centro de inversiones un punto de la circunferencia:

Para que sea negativa la circunferencia tiene que estar a un lado del centro y la recta a otro. El producto del centro a un punto de la circunferencia por el centro a un punto de la recta ha de valer -27 , así que hacemos una circunferencia de diámetro 9, y la recta perpendicular a 3 del centro (aunque lo mismo hubiera valido hacerlo al revés), y ya la tenemos.

Curvas cónicas

Una superficie cónica se genera cuando en un punto de una recta gira otra recta. Cuando la cortamos, podemos obtener un círculo si es perpendicular al eje, una elipse si corta todas las generatrices, o una hipérbola o una parábola si no lo hace.

En la circunferencia todos los puntos equidistan del centro, en la elipse la suma de las distancias a dos puntos llamados focos es la misma para todos los puntos. Los focos se obtienen haciendo un arco desde el extremo del semieje menor, con radio el semieje mayor; los cortes en el eje mayor son los dos focos.

Construcción de una elipse

–Dividimos la distancia desde uno de los focos al centro, y por cada división hacemos 4 arcos desde cada foco, 2 con la distancia desde esa división al extremo más cercano (uno arriba y otro abajo) y otros dos con la distancia al extremo más alejado. Los cortes de dichos arcos con los del otro foco son puntos de la circunferencia. Se completa el trazado a mano alzada.

– Primero lo vemos en la circunferencia: El cuadrado que la inscribe lo dividimos en 4, y los lados de estos cuadrados en otros tantos. Unimos el extremo inferior del diámetro con una de las divisiones del lado inferior del cuadrado, y prolongamos. Desde el extremo superior hacemos lo mismo pero en un lado lateral. El punto de corte es un punto de la circunferencia. En el trazado de una elipse podemos aplicar lo mismo tomando los ejes, y haciendo paralelas para formar un rectángulo en el que aplicar este método.

Si nos dan los ejes conjugados (son dos rectas que en principio eran perpendiculares, pero luego ya no) podemos aplicar el mismo método, pero ahora en lugar de un rectángulo será un romboide. También podemos hallar los ejes perpendiculares correspondientes mediante el siguiente método:

–Trazamos una perpendicular al eje mayor que pase por el centro, y llevamos a ella el semieje mayor hallando E, unimos E con el del semieje menor D, hallamos el punto medio de ED y trazamos una circunferencia que lo tiene por diámetro. Unimos el centro de los ejes O con el de la circunferencia y prolongamos, la corta en 1 y 2. La dirección de 2E es la del eje mayor. La distancia O2 es la del semieje mayor, y la O1 la del menor.

–Construcción de una elipse dados los ejes por afinidad:

Hacemos circunferencias concéntricas con radio los semiejes. Vamos haciendo diámetros, y en los puntos donde corte al eje menor hacemos paralelas al eje mayor, y donde corte al eje mayor hacemos paralelas al eje menor. Los puntos de corte de las paralelas son puntos de la elipse.

–Si nos dan los diámetros conjugados:

Se hace una circunferencia con diámetro el eje mayor. Trazamos una perpendicular en el centro, y unimos los extremos con el eje menor. Trazamos cuerdas perpendiculares a lo largo del eje mayor, y con desde los puntos de corte se hacen paralelas a los triángulos formados al principio, formando triángulos semejantes. Los vértices libres de esos triángulos son puntos de la elipse.

Proyecciones de poliedros regulares

Tetraedro

Se puede representar conociendo solo la arista. El vértice superior proyectado sobre la base sería incentro, circuncentro, baricentro, etc... Tenemos que hallar la altura, para ello nos fijamos que forma un t. rectángulo con una arista y su proyección. Así que podríamos hacer el triángulo opuesto y abatirlo. Por lo tanto lo que se hace para hallarla es hacer una perpendicular a la proyección de una arista, y desde el otro vértice llevar la longitud de la arista. El punto donde corte con la perpendicular es la altura del tetraedro.

Si lo apoyamos en una arista en vez de una cara lo que hacemos para hallar la altura es fijarnos en que la altura de una cara, con su proyección, con la altura del tetraedro forma un t. rectángulo. Así que lo que hacemos es, primero abatir un lado, para hallar la altura de una de las caras, y luego hacemos el triángulo que tiene por cateto la proyección de la altura de una cara, y por hipotenusa esa altura, hallando así la distancia buscada. Y ya podemos hacer la proyección de alzado.

Hexaedro

Las diagonales unen vértices opuestos, habrá 4.

La diagonal con una arista y la diagonal de una cara forma un t. rectángulo.

Si proyectamos un vértice sobre la diagonal del cubo obtenemos un $\frac{1}{3}$ de esta.

–Si nos dan la arista apoyamos el cubo en una cara, levantamos perpendiculares y desde esos puntos ponemos la distancia de las aristas.

–Si nos dan la diagonal le hacemos un a. capaz, y a $\frac{1}{3}$ de esta levantamos una perpendicular, completamos el triángulo, y el lado corto será la arista, y entonces operamos como antes.

Octaedro

Tiene 8 caras, 6 vértices y 12 aristas.

Todas las diagonales son iguales, la altura será igual a una de las diagonales, y como se cortan en el punto medio en este haremos una perpendicular, y situaremos todos los puntos con perpendiculares.

Dodecaedro

Para hallar la base se dibuja una circunferencia que inscriba al pentágono, se unen los vértices con el centro, prolongamos, y nos da la mitad del arco opuesto. Unimos esos puntos y nos da el pentágono de la base. Unimos 2 vértices y prolongamos, nos saltamos uno, y unimos otros 2, donde se corten hacemos una circunferencia en la que estarán todos los vértices. Unimos los centros de los pentágonos con sus vértices, y prolongamos, los cortes con la circunferencia son los vértices.

La distancia A es la que hay hasta los 2 vértices más cercanos a los de la base del pentágono. La B es la que hay al más alejado. Para hallar A hacemos un ángulo recto en una de las proyecciones de las aristas de abajo (líneas discontinuas), y ponemos como hipotenusa la distancia de la arista. Para hallar B hacemos el ángulo recto en la proyección de una de las aristas de arriba, y ponemos como hipotenusa la altura del pentágono.

Situamos A, superpuesta a ella B, y tras esta A, y llevamos los distintos puntos con perpendiculares, después unimos y así resolvemos.

Icosaedro

Necesitamos hallar la altura la parte central, y la altura de las partes superior e inferior. En estas 2 últimas, la altura forma con la arista y su proyección un triángulo rectángulo. En el otro caso el t. rectángulo lo forman la altura del t. equilátero, la distancia buscada, y la parte de la arista superior que se proyecta.

Así que lo que hacemos para resolverlo es:

Para la primera altura hacemos una perpendicular a la proyección de una de las aristas, y ponemos como hipotenusa la arista.

Para la segunda hacemos la perpendicular a la proyección de una de las aristas de abajo, y desde su corte con una de las aristas de arriba, llevamos como hipotenusa la altura de una de las caras, que hemos hallado abatiéndola.

Situamos las alturas una tras otra, subimos los vértices con perpendiculares y unimos.

Ejercicios de selectivo y otros

1- Trazar una recta que concurra en el mismo punto que R y S:

Trazamos un triángulo arbitrario, dos de los vértices del cual están en la recta, y después hacemos otro semejante, al unir los vértices libres de ambos nos da la recta buscada.

2- Resolver una escocia (Dibujo en la lámina correspondiente):

Dividimos la diferencia de la altura en 3, y hacemos otra perpendicular en la otra parte. $1/3$ de la diferencia de altura, llevado desde el extremo superior de la perpendicular más exterior, nos da el primer centro. Si lo unimos con $1/3$ de la más exterior tomado desde abajo, y le hacemos la mediatriz, el punto donde corte con la perpendicular más exterior será el segundo centro. La unión de los 2 arcos la hallamos uniendo los centros y prolongando.

3- Óvalo (Dibujo en lámina correspondiente):

Nos dan e (CD) y E (AB). Abatimos el semieje menor desde el centro a ambos lados del mayor, hallando o1 y o3. La distancia Bo1 la llevamos a C, y unimos el extremo hallado con o1. Le hacemos la mediatriz, que cortará en la prolongación de e, dándonos o2. Se lleva la distancia del centro a o2 a la parte de arriba y hallamos o4. Para hallar los enlaces entre arcos se unen centros y se prolonga.

4- Hallar una circunferencia tangente a las tres rectas que forman un triángulo, con centro fuera de este:

Se prolongan las rectas, y el centro estará en el corte de las bisectrices de los ángulos que forman.

5- Construir un pentágono a partir del lado siendo este media proporcional entre $AB=44\text{mm}$ y $CD=66\text{mm}$.

Hallamos su media proporcional, ya sea por potencia de un punto, por el teorema del cateto o por el de la altura. Una vez hallado lo podemos construir operando normalmente.

6- Trazar todas las circunferencias posibles tangentes a otras 2 dadas, dado el radio de las soluciones:

Lo que se hace es realizar en cada una 2 circunferencias concéntricas, una sumando y otra restando el radio de la solución. Todos los cortes de esas circunferencias concéntricas son soluciones.

7- Nos dan la suma de la diagonal y un lado, resolver el cuadrado:

Como en el triángulo isósceles que formarían la diagonal, esta misma abatida en la horizontal, y la unión entre ambas el ángulo repetido es de $22'5''$ (porque $45=2*A$), basta con que en un lado levantemos una perpendicular, y en el otro pongamos un ángulo de $22'5''$, el corte de ambos es el lado.

8- Igual con la resta:

En el isósceles formado por la suma de del lado y la distancia dada, la diagonal y la unión de esos extremos, el ángulo que se repite es $135/2$ (porque $A+A+45=180$). Así que en un extremo ponemos ese ángulo, y en el otro una perpendicular. Esa perpendicular es el lado.

9- Hacer una circunferencia que equidiste de 4 puntos:

Se hace una que pase por 3. Se une el centro con el otro punto. Se halla el punto medio de la distancia desde el corte con la circunferencia al punto. La circunferencia pasará por ese punto y tendrá el mismo centro.

10- Hallar la figura semejante a otra que tiene la mitad de superficie:

Le hacemos un a. capaz a un lado, levantamos la mediatriz, y unimos el corte con un extremo. Esa distancia la abatimos sobre el lado. Triangulamos la figura, y hacemos paralelas a los otros lados que pasen por el punto de corte. Hacemos eso en cada triángulo, y así acabamos la figura.

PROYECCIONES

- Cilíndricas (origen de los rayos en el infinito)
- Cónicas (origen en un punto concreto)

CILINDRICAS

- Ortogonales, Se proyecta perpendicularmente en 2 planos.
- Oblicuas, un plano de referneicia que puede tener cualquier dirección respecto los rayos de proyección.

Ortogonales:

- Diédrico, 2 planos perpendiculares
- Axonométrica
- Planos acotados

Axonométrica:

- Isométrica (ángulos iguales)
- Dimétrica (2 iguales)
- Trimétrica (los tres diferentes)

Oblicuas

- Perspectiva oblicua
- Sombras

CÓNICAS

- Perspectiva lineal (cónica frontal, oblicua, de tres puntos de fuga)
- Sistema cónico
- Sombras con foco en un punto.

SISTEMA DIÉDRICO ORTOGONAL

Consiste en 2 planos perpendiculares (PV y PH) en los que se proyectan 2 vistas del objeto, aunque en algunos casos se pone un plano suplementario para tener una vista de perfil. Se definen así 4 cuadrantes. Los planos que forman 45° con los planos del diedro se llaman bisectores, el del 1° y 3°cuadrante es el 1° bisector, y el otro es el 2° bisector.

Hay 2 nomenclaturas:

Puntos Rectas Planos

H V H V H V

A1 A2 R1 R2 a1 a2

a a' r r' p p'

La distancia de la vertical a la línea de tierra se llama cota de altura, y de la horizontal alejamiento.

Un punto tiene unas coordenadas, que se miden a partir de un centro O en el punto medio. Entonces las x positivas estarán a la derecha, las y positivas estarán bajo la línea de tierra, y las z positivas quedan sobre la línea de tierra.

Posiciones de un punto.

Hay 17 posiciones:

- Más cerca del PH (4)
- Más cerca del PV (4)
- En los planos bisectores (4)
- En los planos (4)
- En la L.T. (1)

Trazas

Son los puntos donde corta con los planos del diedro, puntos en el caso de las rectas y rectas en el caso de los planos. En el primer caso se denominan h y v, y las correspondientes proyecciones de estos sobre los planos opuestos son h' y v' respectivamente. Si se unen v' con h' y h con v obtenemos así las proyecciones de la recta. En el segundo caso son 2 rectas que se cortaran en la LT, se nombran r y r'. En el caso que sea un plano perpendicular al segundo bisector será una recta; y si es perpendicular al 1º bisector formaran el mismo ángulo tanto la vertical como la horizontal con la LT.

Intersecciones

Entre 2 planos será una recta, como los cortes de las trazas de los planos son las trazas de la recta, basta con completar las proyecciones.

Si no se ve uno de los cortes, trazamos un plano horizontal, y sus correspondientes proyecciones de las rectas intersección (paralelas a las trazas de los planos). Así ya tenemos 2 puntos de las proyecciones de la recta.

Si no se ven ninguno de los cortes podemos usar el método anterior 2 veces, o bien usarlo una vez, y para ver las direcciones de las trazas hacer unas trazas paralelas a las de uno de los planos cuyos cortes sean visibles.

Si uno de los planos viene dado por dos rectas secantes hacemos 2 planos horizontales, y hacemos las intersecciones con los 2 planos, los cortes de las 2 rectas intersección serán 2 puntos de la recta intersección.

Si nos dan los 2 planos por rectas secantes usamos el mismo método.

Para hacer la intersección entre un plano dado por rectas secantes, y una recta lo que hacemos es un plano perpendicular al PV o al PH que contenga la recta, y hacemos la intersección con el plano, y el corte de la recta intersección con la recta dada es el punto de corte.

Para hacer la intersección entre 2 planos paralelos a la LT hemos de usar un plano de perfil, hacemos las

proyecciones de perfil de los planos, vemos la recta intersección de perfil, y luego hacemos las otras proyecciones.

Para hacerlo entre un plano paralelo a la LT y una recta perpendicular, usamos el mismo método, hacemos las proyecciones de perfil de las trazas de la recta, o bien la de una traza y otro punto de la recta. Vemos el punto de corte, y luego hacemos las otras proyecciones.

Si la recta es oblicua, se hace un plano perpendicular al PV que contenga la recta, se hace la recta intersección, y donde corte con la proyección de la recta será el punto de corte.

Si las trazas de 2 planos no se cortan es que no lo hacen en el primer cuadrante, así que prolongamos las trazas.

Si son dos planos de canto nos dará una recta de punta, cuya proyección vertical será un punto y la horizontal paralela a las de los planos.

Posiciones de las rectas

Perpendiculares:

- al PH (3)
- al PV (3)
- a la LT, pasando por ella (2), sin pasar (4)
- al 1º bisector (3)
- al 2º bisector (3)

Paralelas

- al PV (3)
- al PH (3)
- al 1º bisector (3)
- al 2º bisector (3)

Abatimientos

Consisten en abatir un plano sobre el horizontal, para por ejemplo ver la verdadera magnitud de un triángulo contenido en el plano. Giraremos el plano alrededor de la traza horizontal. Hay 2 métodos:

1) Tomamos un punto de la traza vertical n' , hacemos el plano X por el que se moverá al abatirlo. Y entonces llevamos la sección de la traza vertical hasta n' , y la llevamos sobre X, pues esta distancia será la misma.

2) El segundo método y más usado consiste en: Hacer el plano X, y entonces abatimos el t. rectángulo formado por la cota de n , la sección de X de la LT al plano, y la correspondiente hipotenusa. Una vez abatido llevamos la hipotenusa sobre X, ese será n .

Si el plano a abatir viene dado por dos rectas secantes, o por un triángulo etc., lo que se hace es un plano horizontal, y la recta intersección será la charnela. Tomamos un punto, en el caso de las rectas el de corte, y utilizamos el método 2: una perpendicular a la charnela, y una paralela, sobre esta ponemos la cota del punto, y cerramos el triángulo con la hipotenusa que llevaremos sobre la prolongación de la perpendicular a la charnela. Ese será el punto abatido.

Ejercicio práctico de aplicación de lo explicado: Tenemos un cubo de longitud de arista 5cm, que esta

apoyado sobre un plano oblicuo que viene dado por un punto y una recta. El cubo tiene un vértice de la base en el punto y otro de ellos en la arista. Hacer las proyecciones.

Para ello hacemos un plano horizontal que pase por el punto, y así obtenemos la charnela. Abatimos la recta y hacemos en el plano abatido el cuadrado de la base. Ahora tenemos que obtener la proyección horizontal, dos de los vértices los tenemos, el tercero, lo que hacemos es prolongar su lado hasta la charnela y hacer la proyección horizontal. Completamos esta proyección y luego hacemos la vertical. Ahora solo queda hacer las alturas, las de la proyección vertical serán perpendiculares a la charnela, y para ver la dirección de las verticales hacemos un plano vertical, y las hacemos perpendiculares a la recta intersección con la base. Para poner los 5cm en la altura, tomamos una de ellas, la giramos (Los giros los explico en el siguiente apartado) hasta ponerla paralela al PV, medimos los 5cm en verdadera magnitud, la desgiramos y completamos el cubo.

Giros

Para hacer un giro es necesario hacerlo alrededor de un eje, el radio será la distancia a dicho eje. La utilidad de los giros es hallar las verdaderas magnitudes de los elementos girándolos hasta ponerlos paralelos a un plano del diedro.

Así, para girar un punto primero hacemos la recta que será el eje, entonces si esta es vertical en el PV el giro se verá como una recta horizontal (si es horizontal al contrario) y en el PH se verá como un arco de circunferencia.

Lo mismo se hace para girar segmentos, se pone el eje en un extremo, se gira el punto del otro extremo, y se une el extremo que ha permanecido fijo con el que se ha girado. Poniendo, al girar la recta, paralela vertical veremos la verdadera magnitud en la proyección de esta sobre el PV.

Para girar planos se pone el eje, y nos fijamos en que la recta que va del eje al plano siempre va a ser perpendicular a la traza de este, entonces giramos ese segmento, y la traza seguirá siendo perpendicular a segmento girado. Para saber por donde pasa la traza vertical, hacemos un plano horizontal cuya recta intersección con el plano pase por el eje, y entonces la traza vertical del plano girado siempre pasará por el corte entre la traza del plano horizontal y la del antiguo plano. En el caso de que el eje esta dentro de uno de los planos del diedro, por ejemplo el horizontal, no hace falta esto, ya que siempre pasará por el corte entre la antigua traza del plano, y el eje.

Cambios de plano

Consiste en girar uno de los planos del diedro. Normalmente se utiliza para obtener proyecciones en verdadera magnitud.

Nos fijamos en que si giramos el plano vertical se mantendrá constante la cota de los puntos, pero no así el alejamiento, mientras que si giramos el PH, se mantiene constante el alejamiento pero no le cota.

Para indicar un cambio de plano se tiene que hacer la nueva LT, y se indica en un extremo de esta con una llave que se trata de un nuevo PV o PH.

Para Realizar un cambio de plano si solo hay un punto no hay más que hacer una perpendicular desde la proyección horizontal (si se trata de un cambio de PV), y sobre esta poner la cota (si cambia el PV, si no al contrario, siguiendo las regla antes descritas).

Si es una recta se hace lo mismo con 2 puntos y se unen.

Se pueden hacer sucesivos cambios de plano, para por ejemplo, convertir una recta oblicua en una vertical.

Si el elemento es un plano que queremos poner de canto, haríamos un PV perpendicular a su traza horizontal, y para saber como estará la traza vertical, lo que hacemos es tomar un punto del plano, y como al cambiar de plano tiene que seguir perteneciendo a él, y todos sus puntos tienen su proyección sobre la traza vertical (por ser de canto) le hacemos el cambio de plano al punto y la traza vertical pasará por la nueva proyección vertical.

Un ejercicio práctico es ver la verdadera magnitud de un triángulo mediante cambios de plano. A cada cambio se aplicará a los tres puntos, y luego se unirán. Lo que hay que hacer es primero hacer un nuevo PV perpendicular al plano del triángulo, y luego un nuevo PH paralelo al triángulo.

Perpendicularidad

Una recta es perpendicular a un plano si las proyecciones de esta lo son a las trazas del plano (si no tuviéramos trazas tomaríamos referencias, por ejemplo cortar con un plano horizontal y otro vertical para ver la dirección de las trazas etc.).

Trazar por un punto un plano perpendicular a otro dado:

Hacemos una recta perpendicular al plano que contenga el punto, y luego basta hacer un plano que contenga la recta (recordar que para ello basta con que contenga sus trazas). Si no tuviéramos trazas obtenemos sus direcciones como antes.

Trazar por un punto un plano perpendicular a una recta:

Hacemos una recta horizontal que contenga al punto y que sea perpendicular a la traza horizontal. Entonces hacemos un plano cuya traza horizontal será paralela a la de la recta, y que contenga a la recta, (por tanto que su traza vertical pase por la de la recta).

Trazar por un punto un plano paralelo a una recta:

Se hace una recta paralela (sus trazas serán paralelas, y un plano que la contenga).

Hacer una recta perpendicular a otra:

Para ello lo que hacemos es abatir dicha recta, hacer una perpendicular a la recta abatida, y luego desabatir la recta perpendicular.

Mínima distancia entre un punto y un plano:

Hacemos una recta perpendicular a este que contenga el punto, luego un plano que contenga la recta, y la distancia desde el punto al corte de la recta con la recta intersección entre los 2 planos, es la mínima distancia. La giramos y la vemos en verdadera magnitud.

Mínima distancia entre 2 planos paralelos:

Hacemos una recta perpendicular a ambos y un plano que la contenga, las rectas intersección con los planos, darán 2 puntos de corte con la recta perpendicular. La distancia entre ellos es la mínima distancia, que la vemos girando el segmento.

Mínima distancia entre 2 rectas que se cruzan:

Primero hacemos una paralela a una de ellas que se corte con la otra, formando así un plano. Hacemos un

cambio de plano situando un PV perpendicular a este plano. Entonces hacemos las proyecciones de la recta y el plano (tomando 2 puntos de cada uno, ya sea al azar o por ejemplo el punto de corte de las rectas del plano). Estas proyecciones serán 2 rectas paralelas, y la distancia entre ellas la mínima distancia en verdadera magnitud.

Intersecciones entre rectas y cuerpos.

Intersección entre un plano y una pirámide o un cono:

Hacemos una recta que pase por el vértice y corte a la otra, y entonces hacemos un plano que las contiene, y que pasará por sus trazas horizontales, y cortará al cono o a la pirámide en 2 puntos de la base y por el vértice. Los puntos de corte de ese triángulito con la recta son los puntos de entrada y salida de la recta.

Intersección entre una recta y un prisma:

Hacemos una recta paralela a la arista que corte a la otra recta, y hacemos, igual que antes un plano que las contenga, este plano cortará en 2 puntos a una de las bases, y formará un rectángulo cuyos lados serán paralelos a las aristas del prisma. Los cortes de la recta con ese triángulo son los de entrada y salida de la recta.

Intersección de una recta y una esfera:

Hacemos un plano de canto que contenga la recta, hacemos un cambio de plano haciendo uno paralelo al realizado para ver la sección que produce. Hacemos la proyección de la recta y de la esfera, y hacemos la proyección de la sección, que será una circunferencia concéntrica a la de la proyección de la esfera cuyo diámetro será igual a la distancia entre los cortes del plano con la proyección horizontal de la esfera. Vemos los cortes de la esfera con la sección y los llevamos a las otras proyecciones, esos serán los puntos de entrada y salida de la recta.

Intersección entre un plano de canto y una pirámide.

Vemos todos los puntos de corte excepto el de la arista frontal, que no sabemos donde situarlo en la proyección horizontal. Lo que hacemos es girar el triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa esa arista, así vemos donde situar el corte, y lo desgiramos.

Intersección entre una pirámide de base triangular y un prisma de base triangular.

Hacemos un plano horizontal por la arista, y vemos el triángulo que produce en la pirámide, los cortes de la arista con ese triángulo serán los puntos de entrada y salida. Vemos también los cortes de las aristas de ambas bases, y así formamos uno de los triángulos de la intersección. En el otro lado nos falta un vértice, ya que no se cortan completamente, así que lo que hacemos es formar el triángulo como si lo cortara completamente, y así vemos en que punto de la arista de la pirámide se produce la entrada en el prisma. Unimos con los vértices que tenemos, y ya tenemos las intersecciones.

Intersección entre 2 polígonos.

Lo que se hace es hacer 2 planos horizontales, cada uno de los cuales nos dará dos rectas intersección, que se cortaran en un punto. Uniendo esos dos puntos obtendremos la recta intersección entre ambos.

Máxima inclinación y máxima pendiente

La máxima pendiente será la recta de mayor inclinación con el plano horizontal (por donde caería una gota

atraída por la gravedad).

La máxima inclinación es la recta de mayor inclinación con el plano vertical (por donde caería una gota si la gravedad viniera del PV)

Ángulos

Los ángulos que forma una recta con el PV y el PH lo podemos medir bien abatiendo la recta o bien girándola.

Para medir el ángulo entre 2 rectas, lo que hacemos es abatirlas y medir el ángulo en el plano abatido.

Para medir el ángulo entre la recta y el plano Hacemos una recta perpendicular al plano, medimos el ángulo entre esas recta, y el complementario será el ángulo que forman.

El ángulo entre 2 planos se puede medir por 2 caminos:

1) Desde un punto interior al diedro hacer rectas perpendiculares a los planos, abatirlas, y el ángulo que formaran los planos será el lateral.

2) Hacemos un plano vertical, qe cortará las razas de los planos en 1 y 2, y a la recta intersección en n. Ahora vamos a abatir ese triángulo, para ver el ángulo. Para ver el radio de giro, para ello abatimos la recta intersección, abatiendo v', y entonces hacemos una perpendicular a esta, y luego esa distancia la llevamos sobre la recta intersección, ahí estará n abatido. Lo unimos con 1 y 2 y vemos el ángulo.