

-1-

TEMA 1º.-INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA.

CÁLCULO VECTORIAL.-

NOTAS.- El estudio del cálculo vectorial comenzó a mediados del s. XIX.

Constituye un instrumento matemático esencial para la Física: proporciona notación precisa para las ecuaciones físicas y ayuda a formar la imagen mental de los conceptos.

Hay magnitudes escalares y vectoriales. las primeras: m , E , Δt , V , T , P , W . Las segundas: v , a , desplazamiento, F ...

1.-sistema de referencia. -se representa por un punto y una base del espacio vectorial. El más usado es el ortonormal, con vectores i , j , k . que son unitarios y perpendiculares entre sí.

2.-Vector: magnitud con módulo, dirección y sentido; a veces necesita también un punto de aplicación.

Componentes cartesianas de un vector: (ver dibujo)

-en el plano: $v = v_x + v_y$

$$v_x = |v| \cos \theta \quad v_y = |v| \sin \theta$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\theta = \arctan(v_y / v_x) \text{ -dirección del vector-}$$

-en el espacio: los ejes coordenados son un triedro como el ya nombrado.

$$V = v_x + v_y + v_z$$

$$v_x = |v| \cos \alpha \quad v_y = |v| \cos \beta \quad v_z = |v| \cos \gamma \text{ -cosenos directores-}$$

$$\text{además: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

vector unitario: tiene de módulo la unidad: $|u| = 1$ y se les suele designar con letras minúsculas. Un vector cualquiera se puede escribir como: $v = |v| u$

además un vector se hace unitario al dividirlo por su módulo.

En el sistema de referencia se toman como unitarios los vectores i , j , k .

-2-

3.-EXPRESIÓN DE UN VECTOR EN COMPONENTES.

Se pueden expresar como la suma de tres vectores, según los ejes de coordenadas de un sistema de referencia:
 $v = v_x i + v_y j + v_z k$ o bien: $r = x i + y j + z k$

módulo: $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ raíz cuadrada.

4. –SUMA, RESTA DE VECTORES.–

$$S = (v_x + v'_x)i + (v_y + v'_y)j + (v_z + v'_z)k$$

5. –PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.– sean a y b los vectores a los que vamos a aplicar este producto:

Es un escalar definido por:

$$a \cdot b = |a||b|\cos \theta. \text{ Si son perpendiculares vale cero.}$$

Aplicaciones: cálculo de los módulos y de los ángulos.

Propiedades: conmutativa, distributiva.

$$\text{Además: } i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 ; i \cdot j = i \cdot k = \dots = 0$$

6. –PRODUCTO VECTORIAL.– Es otro vector de dirección perpendicular al plano de los vectores. Sentido, el de la regla de Maxwell (avance de un sacacorchos desde el primero al segundo por el camino más corto o ángulo menor).

Módulo: $|a \times b| = |a||b|\sin \theta$, y coincide con el área del paralelogramo que delimitan. Si son paralelos el p. vectorial vale cero.

Aplicaciones: momento de un vector.

Propiedades: no conmutativo.

$$\text{Además: } i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 0$$

En general, se puede expresar como: $A \times B = i j k$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

7. –MOMENTO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN PUNTO.– Se define como el producto vectorial del vector de posición respecto de un punto O por el propio vector: $M = r \times v$

TEOREMA DE VARIGNON.– El momento de varios vectores concurrentes respecto a un punto es la suma de los momentos de los vectores componentes respecto al mismo punto.

–3–

8. –REPASO DE INTEGRALES ELEMENTALES.–

–Ver fotocopia o buscarlo en internet.

–Circulación de un vector: es la integral curvilínea del vector, p.e de la velocidad o la intensidad del campo magnético, o la fuerza. En el caso de la fuerza mediría el trabajo.

9.-DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO A UN ESCALAR.REGLAS DE DERIVACIÓN. Ver fotocopia o buscarlo en internet.

Vector nable:

A partir de aquí se pueden introducir otros como gradiente, divergencia y rotacional, en el momento en que nos haga falta alguna de ellas.

10.-RELACIÓN ENTRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. Idem.

PROBLEMAS:

1.-CÁLCULO VECTORIAL:

A.-ESCRIBE UN VECTOR DE POSICIÓN Y HALLA SU MÓDULO.

B.-CUAL ES EL PRODUCTO ESCALAR DE DICHO VECTOR POR ESTE OTRO:

$$r' = 3i + 5k .$$

2.-BUSCA EN INTERNET LAS DERIVADAS Y LAS INTEGRALES DE LAS FUNCIONES.

3.-DETERMINA EL PRODUCTO VECTORIAL DE LOS VECTORES $v = 6i + 2j$

$v' = 21 - 3j + 7k$. EL ÁNGULO QUE FORMAN ES DE 45° .

TEMA 2º: CINEMÁTICA.-

1.-CONCEPTO: Parte de la Mecánica que estudia el movimiento prescindiendo de las causas que lo producen.

Movimiento.- cambio continuo de posición respecto de un S.R. Fijo..

2.-MAGNITUDES DEL MOVIMIENTO:

Para definir un movimiento nos hace falta lo siguiente:

A.-VECTOR DE POSICIÓN: r

la posición queda definida por las ecuaciones paramétricas: $x=f(t)$ $y=f(t)$ $z=f(t)$

-4-

o por el vector de posición: $r = x_i + y_j + z_k$. Su módulo es: $|r| =$

B.-TRAYECTORIA.-Línea descrita por el extremo del vector de posición a lo largo del tiempo. O lugar geométrico de las sucesivas posiciones alcanzadas

por el móvil. Para hallar su ecuación se elimina el tiempo en las ecuaciones paramétricas.

C.-VECTOR DESPLAZAMIENTO.- Es el determinado por los puntos inicial y final. incremento de $r = r_f - r_i$.

Si el movimiento es en línea recta y no hay cambio de sentido el módulo del vector desplazamiento es igual que la distancia recorrida sobre la trayectoria (incr de e).

D.-ESPACIO RECORRIDO. –Escalar que mide la longitud de la trayectoria.

$$e = 3x^2 + 4x + 3$$

E.-VELOCIDAD.–

La velocidad media vectorial: es igual al desplazamiento del móvil en la unidad de t.

$$V_m = r / t$$

la rapidez o celeridad media e: $v_m = e / t$

En cuanto a la **velocidad instantánea o puntual**, coincide con la derivada:

$$v = \lim r / t = r / t \text{ y es tangente a la trayectoria en cada punto.}$$

F.-ACELERACIÓN.– Se definen de igual modo:

$$a_m = a_i =$$

También se puede expresar la a_i como la derivada segunda de la posición con respecto al tiempo.

G.-COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACCELERACIÓN.–

Para un movimiento curvilíneo pueden existir dos aceleraciones.

Tiene dos componentes, según el dibujo:

$$a = a_t + a_n$$

$$\text{módulo } |a| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

la acel. tangencial es tangente a la trayectoria y su módulo representa la variación del módulo del vector velocidad.

$$|a_t| = d|v| / dt$$

la acel normal es un vector perpendicular a la tray. y sentido hacia el centro de curvatura.

$$|a_n| = v^2 / R$$

La a_t hace modificar el módulo de la velocidad. La a_n hace modificar la dirección de la velocidad.

–5–

3.-CLASIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS:

A.-MRU.– trayectoria recta y v cte.

$$\mathbf{v}=\mathbf{c}, a_n=a_t=0$$

$d\mathbf{r}=vdt$ e integrando... $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t$ que es la ecuación del vector de posición. Si es en el eje X: $x=x_0+vt$

si la posición se describe por una coordenada e , que indica la distancia desde el origen medida sobre la trayectoria entonces la ec, escalar es $\mathbf{e}=\mathbf{e}_0+\mathbf{v}t$.

Ver diagramas:

B.-MRUV.-

$$a_n=0 \quad a_t=c$$

integrando: $dv=adt$ queda: $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t$

la ec del vector de posición: $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}_0t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$

Si la posición se describe con una coordenada e , entonces las ecuaciones serán escalares:

$v_0 = v_0 + at$ y $\mathbf{e}=\mathbf{e}_0+\mathbf{v}_0t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$. Por último, tenemos la ecuación de la raíz cuadrada de la velocidad: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0^2 + 2 \mathbf{a} \mathbf{e}$

VER DIAGRAMAS:

C.-MCU.

$$a_t=0, a_n=c$$

Además, tenemos: espacio angular, velocidad angular, periodo y frecuencia. Y las relaciones entre las magnitudes angulares y vectoriales.

D.-MCUV.-

$$a_t=c ; a_n \text{ no es cte.}$$

Tendremos pues, la aceleración a_t y la a_n , que sumadas nos darán la a total.

La aceleración angular será $\alpha = a / R$.

E.-OTROS MOVIMIENTOS. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS.

Se puede recordar también los tiros: HORIZONTAL Y PARABÓLICO(OBLICUO) MEDIANTE LA COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS: TODO MOV SE PUEDE DESCOMPONER EN TRES INDEPENDIENTES Y SITUADOS SOBRE LOS EJES CARTESIANOS.

ESTO CONSISTE EL **Pº DE INDEPENDENCIA**: SI UNA

-6-

PARTÍCULA ESTÁ SOMETIDA A LA VEZ A VARIOS MOV ELEMENTALES INDEPENDIENTES, EL MOV RESULTANTE SE OBTIENE SUMANDOLOS VECTORIALMENTE.

Es decir se pueden sumar por separado posiciones, desplazamientos, v y a.

El Pº DE SUPERPOSICIÓN está basado en el **Pº DE INDEPENDENCIA DE GALILEO**: CUANDO UN PTO ESTÁ DOTADO DE DOS MOV A LA VEZ, SU CAMBIO DE POSICIÓN ES INDEPENDIENTE DE QUE LOS MOV ACTÚEN SUCESIVA O SIMULTÁNEAMENTE.

APLICACIONES Pº SUPERPOSICIÓN: hombre que nada en un río. Objeto soltado en un ascensor, tren...Pelota arrastrada por el aire.

TIROS: VERTICAL, HORIZONTAL, OBLÍCUO.

–ver algún ejemplo–

TEMA 3.DINÁMICA DE LA PARTÍCULA MATERIAL.

1ª PARTE:

DINÁMICA DE TRASLACIÓN DE UNA PARTÍCULA:

1–CONCEPTOS BÁSICOS.–

DINÁMICA.–parte de la Mecánica que estudia las causas del movimiento.

INERCIA.–Es la tendencia que tienen los cuerpos a conservar su estado de movimiento o de reposo.

MASA INERCIAL.–Es una medida cuantitativa de la inercia de un cuerpo.

FUERZA.–Magnitud vectorial capaz de vencer la inercia de un cuerpo.

–7–

2.–LEYES DE NEWTON O PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA DCA.

1ªLEY O PRINCIPIO DE INERCIA.–

2º LEY O PRINCIPIO DE PROPORCIONALIDAD ENTRE FUERZAS Y ACELERACIONES.

Aplicaciones: el Pº de INERCIA es consecuencia del 2º: si $F = 0$ $a = 0$ $v = c$, es decir si sobre un cuerpo no actúa la F, este permanece en reposo o con MRU.

Unidades de la F:

3ºLEY O PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN: Las F actúan por pares. La acción y reacción nunca se anulan mutuamente, porque actúan sobre cuerpos distintos.

PESO DE UN CUERPO.–

3.–SISTEMAS DE REFERENCIA. RELATIVIDAD DE GALILEO.

Galileo puso de manifiesto la dificultad de conocer si existe algo en reposo en el Universo, expresó: por experimentos mecánicos es imposible saber si un S.R. está en reposo o con MRU.

PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE GALILEO: LAS LEYES FÍSICAS SON IGUALES PARA UN OBSERVADOR EN REPOSO O QUE SE MUEVA CON MRU. O BIEN: LAS LEYES SON IGUALES PARA DOS OBSERVADORES QUE SE HALLEN CON MRU UNO RESPECTO AL OTRO.

CLASES DE S.R:

A.-INERCIALES: está en reposo o con MRU. Se aplican las leyes de Newton. En él solo producen aceleración las fuerzas reales.

B.-NO INERCIALES: tiene aceleración. Para que se cumplan las leyes hay dos soluciones:

1.-suponer despreciables los efectos de la aceleración.

2.-introducir una fuerza ficticia o inerciales que causan dicha aceleración.ej:

Al tomar una curva en coche: los objetos se desplazan hacia fuera de la curva. Para el conductor ello es debido a una F inercial $F = -m v^2 / r$ llamada fuerza centrífuga, que es una fuerza de reacción. Para un observador exterior, es debido al principio de inercia.

Las fuerzas de inercia, que aparecen como consecuencia de la aceleración de los ejes, son unas fuerzas ficticias por no tratarse de fuerzas reales aplicadas a la partícula.principio de D Alembert: $F + F_i = 0$

-8-

4.-FUERZA DE ROZAMIENTO POR DESLIZAMIENTO.-es la que existe entre dos sup. en contacto y que se opone al deslizamiento. Son debidas a la adherencia de una superficie con otra y al encaje de las irregularidades de las superficies. Características:

Dirección.-paralela a las sup. deslizantes.

sentido.-opuesto al movimiento.

Módulo.- el producto: $F_r = \mu N$ en donde μ es una constante característica de las sup. en contacto, y puede ser estático o dinámico.

Dependen de la naturaleza de las superficies.

Son independientes del área de contacto y de la velocidad de deslizamiento.

Leyes del rozamiento de Coulomb: el roz es indep de la velocidad, del valor de las superficies. Depende de la naturaleza de las superficies. Es proporcional a la Normal.

El coef de roz estático anterior es el que hay que vencer para que se inicie el movimiento. En cuanto al coef dinámico actúa cuando ya se ha iniciado. Se suelen medir con el tribómetro, y es mayor el primero, que se calcula por:

$$\mu = \frac{F_r}{N}$$

-existe además otro tipo de rozamiento: por rodadura.

5.-NORMAS PARA RESOLVER PROBLEMAS.-

Hay muchos tipos de problemas que se resuelven aplicando las leyes de Newton. Primero vamos a dar una clasificación de las fuerzas:

a. – Reales: producen aceleración, y pueden ser: motrices, cuando favorecen el movimiento y su signo se toma como positivo. Las otras se llaman resistentes, y se oponen al movimiento, se toman con signo negativo, p.e. La fuerza de rozamiento.

b. – Inerciales: se emplean cuando el problema se resuelve por el principio de

D'Alembert. Sumatorio de F_m – sumatorio de $F_r - F_i = m a$.

Pasos para resolver un problema:

1. – Elegir el sistema de ref.
2. – Hacer un dibujo del sistema de partículas.
3. – aislar cada cuerpo o partícula que componen el sistema.
4. – Dibujar el diagrama de fuerzas sobre cada componente aislado.
5. – hallar las componentes de las fuerzas que intervienen.
6. – aplicar a cada cuerpo la 2º ley o el Pº anterior.

–9–

7. – Resolver el sistema de ecuaciones.

Los distintos ejercicios se clasifican en tres grupos:

1º. – cuerpos apoyados en superficies: plano horizontal y plano inclinado. ej.

2º. – cuerpos enlazados con hilos: se suponen despreciables la masa de los hilos. También la masa de la polea. Ejemplo de polea.

3º. – cuerpos en donde actúa la F centrífuga. (pº de D'Alembert)

6. – MOMENTO LINEAL O CANTIDAD DE MOV: p

Relaciona la masa y la velocidad.

Es un vector cuya dirección y sentido son los de v.

Ecuación: $p = m \cdot v$ Unidades:

7. – SEGUNDA LEY DE NEWTON. – se puede deducir así:

un objeto modifica su cant de mov al interaccionar con otro. Al resultado de la interacción se le llama fuerza.
 $F = p / t$

para una F instantánea: $F = \lim p / t = dp/dt$

que es la expresión general de la ec fund de la dca. Desarrollando: $F = dp/dt =$

$$= d(mv)/dt = m \cdot dv/dt = m \cdot a \text{ por tanto } F = m a$$

la cte m se llama masa inerte, es una caract de los cuerpos que indica su tendencia a conservar su estado de reposo o de mov.

8.-EL PESO.— es al fuerza con que la Tierra interacciona con objetos colocados en su sup. y no es cte, pues dep. del lugar.

Se define masa gravitatoria como la relación: $m = |P|/|g|$ la masa inerte y la masa gravitatoria son escalares, que tienen las mismas propiedades y son equivalentes a la cantidad de materia.

9.-IMPULSO MECÁNICO O LINEAL.— Vamos a demostrar que el impulso mecánico I es igual a la variación de la cantidad de movimiento:

Integrando la ecuación fund de la DCA, se tiene: $F = m a = m dv / dt ;$

$$F dt = dp$$

$I = F dt = dp = m(v - v_0)$. En donde I es la definición de impulso mecánico.

El impulso que actúa sobre un cuerpo es igual a la variación de su cant de mov.

—10—

10.-CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOV. 2ª LEY: LEY DE INERCIA.

Si la F que actúa sobre una partícula es cero, su cant de mov se conserva: $F = dp/dt = 0 \Rightarrow dp = 0 \Rightarrow p = mv = \text{cte.}$

Para varios cuerpos aislados, la cantidad de mov total no varía:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = \text{cte.}$$

Así, se puede enunciar de otra forma la ley de inercia.

11.-DINÁMICA DEL MCU.— De acuerdo con la 2ª ley de Newton la partícula está sometida a una fuerza normal o centrípeta dirigida hacia el centro de la trayectoria: $F_n = m a_n = m v^2/R$ un $= m \omega^2 R$ un

con un vector unitario perpendicular a la trayectoria y con sentido hacia el centro de la misma. Esta F puede ser debida a múltiples causas, al rozamiento lateral y al peralte de una curva, a la tensión de una cuerda, etc.

12.-LEY DE ACCIÓN Y REACCIÓN.—veamos ahora el tercer principio desde otro punto de vista:

sean dos objetos m_a y m_b aislados y que interaccionan entre sí por choque o a distancia.

Como el sistema está aislado: $p_{\text{sistema}} = p_a + p_b = 0$

$$p_a = -p_b \Rightarrow dp_a/dt = -dp_b/dt; F_{ab} = -F_{ba}$$

si uno interactúa con una fuerza, este otro lo hace sobre el primero con otra

fuerza de igual intensidad y sentido opuesto. Son simultáneas y no se equilibran entre sí, porque actúan

sobre objetos diferentes.

13.-PERALTE DE CURVAS.—cuando un auto toma una curva en una carretera horizontal la F centrípeta viene definida por el roz. entre las llantas y el pavimento. El valor máximo de la F_r determina la veloc. máxima con que un vehículo puede tomar una curva sin derrapar: $mg = m v^2/R$ $v =$

si la F_r es menor que la F_c , el coche derrapa.

Así pues las fuerza que intervienen son la centrífuga, causante del deslizamiento lateral o derrape, y la F de rozamiento que impide el derrape. El peso del coche se compensa con la reacción de la carretera.

Si la carretera tiene peralte, queda: $F_c \cos = mg \sin$, de donde

–11–

se deduce el ángulo del peralte por la tangente, y depende de la v y del radio.

2ª PARTE:

DINÁMICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS.–

1.–SISTEMA DE PARTÍCULAS o cuerpos es un conjunto con alguna característica común que permita delimitarlo y en el que la posición y el mov. de cada partícula depende de la posición y movimiento de las demás. El mov de cada parte influye en el de los demás.

Se llama **cerrado** cuando las partículas interaccionan entre sí, pero no con las del entorno. En los sist cerrados se conservan la cant de mov, el impulso mecánico y la energía. Son ejemplo de ello las fuerzas de acción y reacción, o el sistema solar tomado aisladamente.

En un sistema **abierto** se ejercen fuerzas exteriores sobre el mismo.

Se denomina: **discreto o discontinuo** cuando está formado por un nº finito de partículas y están localizadas. La masa total es la suma de las individuales. Ejemplo: varias partículas aisladas.

Se llama **continuo** cuando el nº de partículas deja de ser finito y se pasa de una a otra sin solución de continuidad. la masa se obtiene mediante la integral: $M = \int dm = \int dV$. Ejemplo: una masa de agua.

2.–CENTRO DE MASAS.– CM:

ES UN PTO TAL QUE SI TODA LA MASA DEL SISTEMA ESTUVIERA CONCENTRADA EN ÉL, EL SISTEMA SE COMPORTARÍA COMO UNA PARTÍCULA MATERIAL. LA RESULTANTE DE DICHAS F ESTARÁ APLICADA EN DICHO PUNTO. SE DENOMINA CENTRO DE GRAVEDAD SI LAS ÚNICAS F EXTERIORES SON LOS PESOS.

MEDIANTE EL CONCEPTO DE CM EL MOV DE UN SIST SE REDUCE AL MOV DE UNA PARTÍCULA. Sirve para simplificar los problemas.

–12–

En un sistema discontinuo, el vector de posición del CM, viene dado por:

$$R_{cm} = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n / M = \text{sumatorio} \dots$$

que es la ecuación vectorial.

En general: $R_{cm} = X_i + Y_j + Z_k$

el cm se comporta como una partícula que encierra toda la masa del sistema.

Para determinarlo, se observa la simetría del sistema; si el sistema tiene plano o eje de simetría, en él se encontrará el cm, y si el sistema tiene centro de simetría en el mismo se hallará el cm.

Para un sistema continuo, es decir un sólido compacto, entonces descompondremos el cuerpo en porciones infinitesimales de masa dm , situadas a una distancia r del origen de coordenadas.

Para un cuerpo sólido y compacto: $R_{cm} = \int dm \cdot r / \int dm =$

$= \int r \, dm / M$. además masa = dens x volumen

3.-PROPIEDADES DEL CM:

1.-PERMITE REDUCIR UN SISTEMA A UNA SOLA PARTÍCULA.

2.-LA MASA DE ESA PARTÍCULA ES LA MASA TOTAL DEL SISTEMA.

3.-TODAS LAS F SE SUPONEN APLICADAS EN EL CM.

4.-LA CANT DE MOV: $P = M V_{cm}$. VEÁMOSLO:

CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA.- Es igual a la suma de las cantidades de mov. de sus partículas. $P = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots$

También: $P = M V_{cm}$. Y de ambas se obtiene: $V_{cm} = (m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots m_n v_n) / M$

5.-ADEMÁS LA 2ª LEY QUEDA: sumatorio de $F_{ext} = M a$ del CM.

6.-EL Pº DE CONSERVAC DE LA CANT DE MO: para un sistema aislado: $M V_{cm} = cte$.

4.-MOMENTO CINÉTICO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS:

sumatorio de $M_e = dL/dt$ en donde L es el momento cinético de cada partícula: $L = r_i \times m_i v_i$.

La conservación del momento cinético: en un sist aislado:

el sumatorio de $M = 0$; $L = L_1 + L_2 + \dots L_n = cte$.

-13-

3ª PARTE:

DINÁMICA DE ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO.-

1.-INTRODUCCIÓN:

El sólido rígido es un sist. de partículas en que las distancias relativas entre ellas permanecen ctes después de aplicarle una fuerza o un par de fuerzas.

Si el sólido gira alrededor de un eje fijo todas sus partículas tienen la misma velocidad angular y la misma aceleración angular. El cuerpo se mueve sin que su centro de masas se traslade. El cuerpo gira alrededor de un eje fijo que pasa por el CM. Las ec son análogas a las del mov de traslación, solo que se emplean magnitudes angulares.

Es decir ahora nos referiremos a cuerpos que giran o rotan alrededor de un eje fijo que pase por el CM.

2.-MOMENTO DE UNA FUERZA: Recordemos el concepto de momento para una F que actúa sobre una partícula, marcada por su vector de posición:

$$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = r F \sin \theta = F d$$

la d es el brazo de la fuerza. La dirección del momento es perp al plano de F y r . el sentido viene dado por la regla del tornillo.

Si sobre el sólido actúan varias fuerzas: $M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$

3.-MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN EJE.-

Es una magnitud escalar que indica como está distribuida la masa de un sólido respecto del eje de rotación.

-Ecuación para una partícula: $I = m r^2$; unidades: kg m²

El mom de inercia representa en el mov de rotación el mismo papel que la masa inerte en el mov de traslación, solo que aunque antes solo había una masa, ahora puede haber tantos momentos como ejes posibles de rotación.

-14-

-momento de inercia de un sistema de partículas:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \text{sumatorio } m_i r_i^2$$

-momento de inercia de un sólido rígido(sist continuo, partículas deslocalizadas):

$$I = r^2 dm = r^2 dV$$

-momento de inercia de un sólido en función del radio de giro:

Se determina a partir de la ec: $I = M R_g^2$

4.-TEOREMA DE HUYGENS-STEINER:

Sirve para calcular el mom de inercia de un cuerpo respecto a un eje cualquiera que sea paralelo al eje que pasa por el CM, si se conoce el mom de inercia del cuerpo respecto de este último eje:

$$I = I_c + m d^2$$

EJEMPLO: una varilla que gira respecto a un eje.

5.-MOMENTO CINÉTICO O MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA:

Su expresión es $L = r p = L p \sin$ siendo el ángulo el formado entre el vector de posición y la v. su dirección es perpendicular al plano de los vectores y su sentido viene dado por la regla del tornillo. Es pues un vector.

Es de interés cuando se analiza la rotación de una partícula, o bien la rotación de un sistema de partículas o de un sólido rígido.

Además, tomando derivadas: $dL / dt = r F$ que es la ec fundamental de la dinámica de rotación. Recordemos que para la traslación: $dp / dt = F$

6.-PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO.-

Si el momento de las fzas ext es cero ($M=0$) $d(I\omega) / dt = 0$; $I\omega = \text{cte}$, el momento cinético del sistema permace cte:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

sería el caso de:

- un sistema sobre el que actúan solo fuerzas internas, como explosiones, rotura de cuerdas al girar cuerpos, acoplamiento de un cuerpo con otro...
- en las fuerzas centrales.

-15-

FUERZAS CENTRALES: Cuando las fuerzas aplicadas están dirigidas siempre hacia un punto fijo O, y además son función de la distancia r:

$F = F(r) U_r$ en donde U_r es el vector unitario en dirección radial.

Son F CENTRALES: LA GRAVITATORIA Y LA ELECTROMAGNÉTICA.

7.-IMPULSO ANGULAR:

se define como $M dt$. Por tanto $M dt = dL$, que nos indica que el impulso angular es igual a la variación del mom angular de la partícula.

8.-TRABAJO Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN.-

$$T = M \text{ increm de}$$

En donde M es la suma de todos los momentos y el incremento es el ángulo girado por el sólido en radianes.

$$P = T / t = M \text{ increm de} / t$$

9.-ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN.-

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Si además de rotar, el sólido se traslada: $E_c \text{ total} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$

10.-TEOREMA DE LA ENERGÍA.-

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

8.-P° DE CONSERVACIÓN DE LA E PARA LA ROTACIÓN:

Si no hay rozamiento, aplicando el tma de cons de la Em:

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \text{ para el caso de una polea.}$$

9.-ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DCA DE ROTACIÓN.-

$$\text{sumatorio de } M = dL/dt = d(I\omega)/dt = I$$

se puede aplicar también a poleas.

-16-

11.-ANALOGÍAS ENTRE EL MOV DE TRASLACIÓN Y DEL DE ROTACIÓN.-

lineal: angular: relación:

$$\text{Espacio } e \quad e = R$$

$$\text{Masa } m \quad I = m r^2 \text{ (al cuadrado)}$$

$$v \text{ media } v \quad v = \omega R$$

$$a \text{ media } a \quad a = R$$

$$\text{fuerza: } F \quad M = I$$

$$\text{momento: } p \quad L = r \times p$$

$$E \text{ Cinética: } E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{Trabajo: } T = F e \quad T = M$$

TEMA 4°.TRABAJO Y ENERGÍA.

1-TRABAJO.-

Es el efecto producido por una fuerza, que al actuar traslada su punto de aplicación una cierta distancia. Si la F es variable

$$dT = F dr = F dr \cos \theta ; \text{ tomando integrales:}$$

Unidades.-Es el Julio, que es el trabajo desarrollado por una fuerza de 1 N cuando desplaza su punto de aplicación 1 metro en la misma dirección que la fuerza. Es una magnitud escalar.

Recordar los casos del trabajo en función del ángulo.

2-POTENCIA.-

Es el trabajo realizado por unidad de tiempo.

$P_m = T/t = F r/t = F v_m$ es el valor medio.

$P = dT/dt = F v$ es el valor instantáneo.

En el S.T se utiliza el caballo de vapor (735,5 w). En la práctica se utiliza como unidad de trabajo el Kw h igual a 1000 w 3,6 1000 s = 3600000 J.

Para la P instantánea: $P = dT/dt = F dr/dt = F v$, que representa la rapidez con la que se realiza el trabajo.

-17-

3.-ENERGÍA CINÉTICA.-

Es la capacidad que tiene un cuerpo de realizar un trabajo debido a su estado de movimiento.

$E_c = 1/2 m v^2$ en Julios.

Teorema de la Ec: el trabajo realizado sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética:

$T = F dr = 1/2 m v^2 - 1/2 m v_i^2$, se llama teorema del trabajo-energía o teorema de las fuerzas vivas.

Energía cinética de un sistema de partículas: vamos a estudiar el choque central, que es aquel que tiene lugar entre dos cuerpos cuya masa está concentrada en el CM. En general: $E_c = 1/2 M V_{cm}^2 + 1/2 \sum m_i v_i^2$

4.-CHOQUES.-

Pueden ser **elásticos**: las partículas no experimentan ninguna deformación permanente y se conservan la cantidad de movimiento y la E_c del sistema. Ecuaciones: dos.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_i^2 + \frac{1}{2} m_2 v_f^2$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_i + m_2 v_f$$

Inelásticos. -las partículas quedan unidas moviéndose con una velocidad común. Ahora solo se conserva la cantidad de movimiento. Ecuación: una

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f$$

Coeficiente de restitución: El parámetro K mide el grado de elasticidad de un choque. $K = \dots$. Si vale cero el choque es perfectamente inelástico, si vale 1 será lo contrario, y si su valor está comprendido entre 0 y 1 el choque es intermedio.

5-FUERZAS CONSERVATIVAS.-

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo realizado entre dos puntos depende solamente de la posición de esos puntos y es independiente de la trayectoria seguida. La fuerza gravitatoria lo es. También lo es la F

recuperadora de un muelle, y en general, cualquier F cte.

También se puede decir que un **campo es conservativo** cuando la circulación a lo largo de una línea cerrada es cero; por ejemplo si el campo es de fuerzas, la circulación recibe el nombre de trabajo: $T = \text{integral de } F \, dr$ entre los puntos A y B = 0

En general, los campos pueden ser escalares o vectoriales

–18–

6.–ENERGÍA POTENCIAL.–

Es una magnitud característica de las fuerzas conservativas, cuya disminución mide el trabajo realizado por una fuerza conservativa. $E_p = m g h$

Teorema de la E_p : $T = F \, dr = E_{pA} - E_{pB} = -() = - E_p$

Para una F gravitatoria: $T = mgdh = mgh - mgh = -mg()$

7.–ENERGÍA MECÁNICA.–

Es la suma de las dos energías anteriores.

8.–Principio de conservación de la E_m :

Si sobre una partícula actúan solamente fuerzas conservativas, la E_m de la partícula permanece constante. $T = F \, dr = E_c$

$T = F \, dr = - E_p$

igualando: $E_c = - E_p \quad E_c + E_p = 0$

En el caso de que haya rozamiento, la E_m no se conserva, y se enuncia así:

El trabajo no conservativo de la F_r es igual a la disminución de E_m :

$T = - (E_c + E_p)$ o bien: $E_{mi} = E_{mf} + \text{Troz.}$

esta pérdida de E se transforma en calor. El trabajo para vencer el rozamiento es igual a la disminución de E_m .