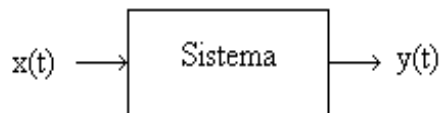


SEÑALES Y SISTEMAS

INTRODUCCIÓN:

Definimos una señal como una función matemática que depende de una o más variables independientes, y cuyo valor nos da información sobre el fenómeno físico al que está asociada.

Igualmente definimos un sistema como cualquier transformación realizada sobre una señal.



Un ejemplo serían las transformaciones que sobre la señal de un generador hace el circuito al que esta conectado.

SEÑALES:

CLASIFICACIÓN DE LAS SEÑALES:

Podemos dividir las señales según varios criterios. Los más usuales son:

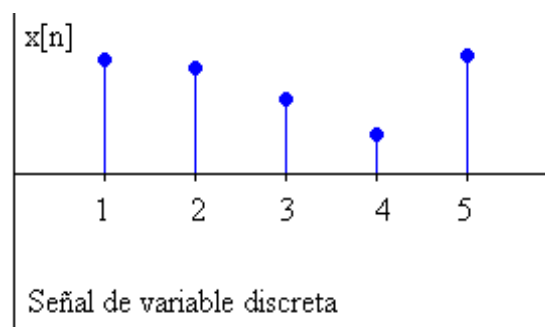
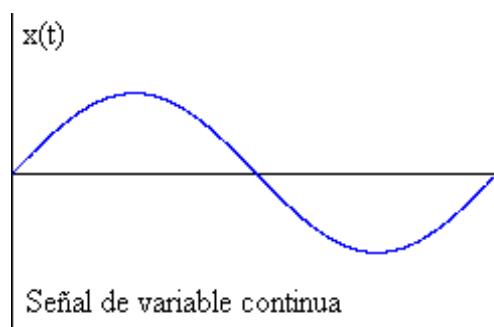
- Por el número de variables independientes:

Unidimensional	$y(t) = 3t - 5$
Multidimensional	$f(x, y) = x^2 + 3xy + 5$

- Por la variable independiente: Según si los valores que toma la variable pertenecen a un conjunto continuo (Variable continua), o si pertenecen a un conjunto finito (Variable discreta). Las señales se escribirán de la forma $x(t)$

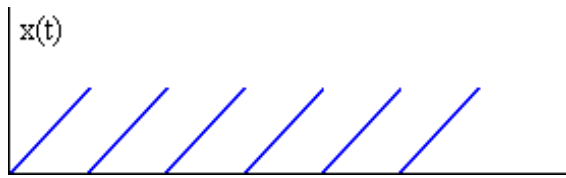
y $x[n]$

respectivamente. Un ejemplo de ambas sería:

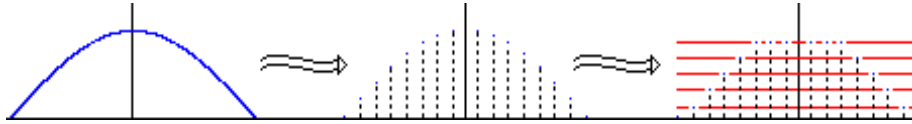


En aquellos puntos en los que la señal de variable discreta no tenga valores, no se considera que la señal sea nula, sino que no está definida. A este tipo de señales las llamaremos secuencias.

No se debe confundir la señal de variable continua con una señal continua. Por ejemplo la siguiente señal no es continua, pero si es de variable continua:



- Por el rango de valores: La señal puede dividirse, al igual que la variable, en continua y discreta. Por ello existen señales continuas de variable continua (Sinusoide), continuas de variable discreta (Temperatura diaria a lo largo de un mes), discretas de variable continua (Parte entera) y discreta de variable discreta (Señal digital). Se puede pasar de una a otra mediante el proceso de muestreo:



- Por la determinación de la señal: Serán determinísticas aquellas señales cuyo valor para cada valor de la variable sea fijo (función matemática), y serán aleatorias aquellas cuyo valor es indeterminado (Temperatura en una fecha futura).

ENERGÍA Y POTENCIA DE UNA SEÑAL:

Sabemos que en una resistencia la potencia viene dada por:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{r}$$

la energía por:

$$e(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{v^2(t)}{r} dt$$

y la potencia media por:

$$p_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

Definiremos entonces la energía y la potencia media de una señal como $(0 \leq t_1 \leq t_2)$:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

$$P_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

y la energía y potencia totales de una señal como:

$$E_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Para el caso de una señal de variable discreta los definiremos como (n_1, n, n_2) :

$$E = \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

$$P_m = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

y las totales como:

$$E_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P_m = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |x[n]|^2$$

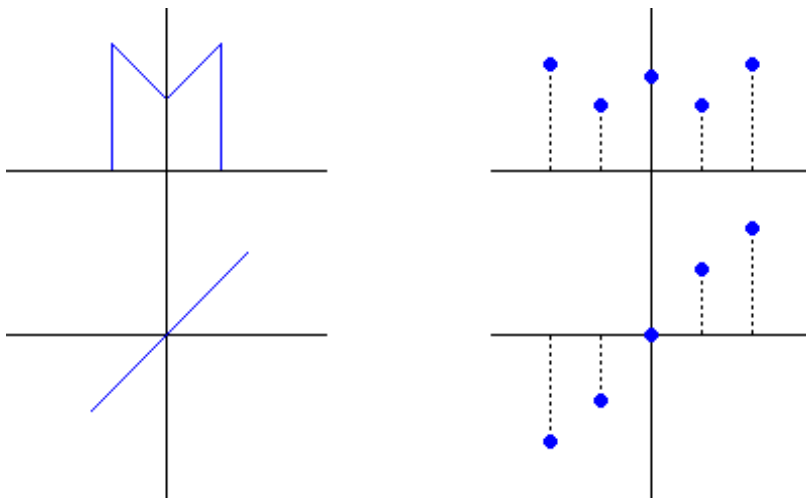
Diremos que una señal es definida, bien en potencia, bien en energía, o bien en ambas, cuando la potencia, la energía, o ambas respectivamente no sean nulas ni infinitas. Así, pues, la señal formada por $x(t) = t$ no está definida ni en potencia ni en energía.

PROPIEDADES DE LAS SEÑALES:

- Simetría: Una señal es:

par si:	$x(t) = x(-t)$	$x[n] = x[-n]$
impar si:	$x(t) = -x(-t)$	$x[n] = -x[-n]$

Por ejemplo:



Toda señal impar, sea de variable discreta o continua, ha de valer cero en el origen, excepto si es discontinua en él.

Evidentemente no todas las señales son pares o impares, pero siempre vamos a poder descomponerlas en suma de una señal par y otra señal impar:

Sea $x(t)$

una señal. Entonces la podemos descomponer como $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

, siendo:

$$x_p(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

e igualmente en señales de variable discreta.

- Periodicidad: Una señal $x(t)$ es periódica si existe $T > 0$ tal que $x(t) = x(t + T)$, donde T es el mínimo valor tal que se cumple la condición dada. Análogamente se dice que una señal $x[n]$ es periódica si existe $N > 0$ tal que $x[n] = x[n + N]$, donde N es el mínimo valor tal que se cumple la condición dada.
- Causalidad: Una señal $x(t)$ es causal si $x(t) = 0 \forall t < 0$. Igualmente en variable discreta.
- Ortogonalidad: Dos señales $x(t)$ e $y(t)$ se dice que son ortogonales en un intervalo $[t_1, t_2]$ si:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = 0$$

Análogamente, y para dos señales $x[n]$

e $y[n]$

se dice que son ortogonales en un intervalo $\{n_1, n_2\}$

si:

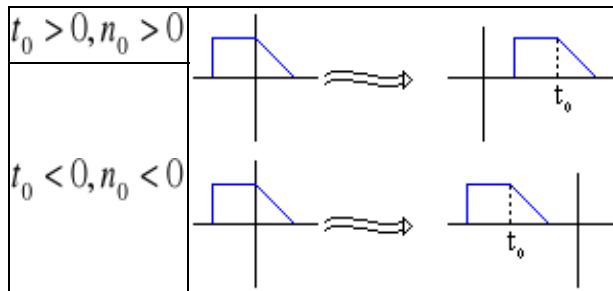
$$\sum_{n_1}^{n_2} x[n]y[n] = 0$$

TRANSFORMACIONES EN LA VARIABLE INDEPENDIENTE:

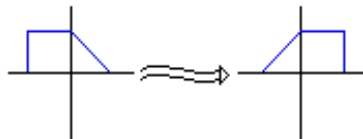
- Desplazamiento en la variable: Consiste en restar a la variable una constante:

$$x(t - t_0)$$

$$x[n - n_0]$$



- Reflexión: Consiste en invertir la señal respecto del origen de la variable:

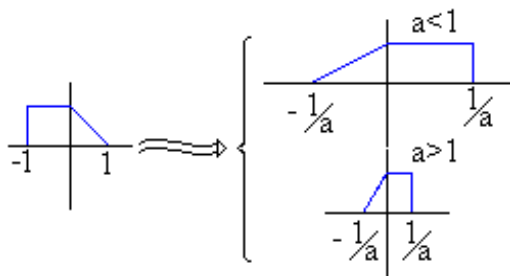


- Escalado: Aquí hay que diferenciar el escalado en tiempo continuo y el escalado en tiempo discreto. Vamos a estudiar el escalado en tiempo continuo:

Consiste en multiplicar la variable por una constante:

$$x(at)$$

Aquí debemos tener en cuenta que la constante puede ser mayor o menor que la unidad:



Es decir:

$$a > 1$$

disminuye la amplitud

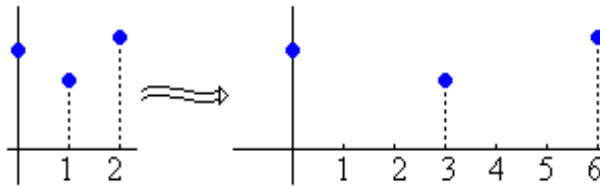
$$a < 1$$

aumenta la amplitud

En tiempo discreto la operación es ligeramente distinta, pues consiste en cambiar la señal $y[n]$ de tal manera que (Suponiendo que $k > 1$):

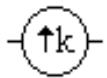
$$y[kn] = \begin{cases} y[n/k] & n = k \cdot n_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Por ejemplo, para una señal dada, y $k = 3$



A esta operación de escalado aplicada a una señal de variable discreta se le llama interpolación, y consiste en intercalar $k - 1$

ceros entre cada dos valores consecutivos. Se representa por el siguiente simbolo:



En el caso de que $k < 1$

la operación consiste en eliminar $k - 1$

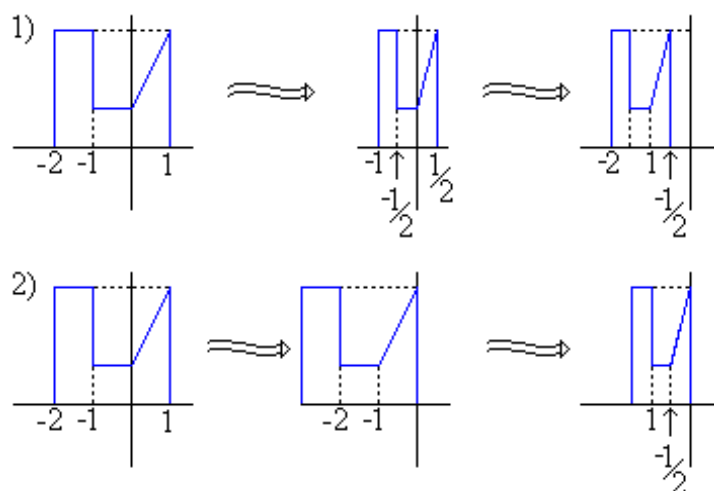
muestras entre cada k

muestras separadas. A este proceso se le llama diezmado, y no tiene más plicación práctica que recomponer una señal ya interpolada. Se representa por:



Evidentemente es posible conjugar las operaciones, pero siempre teniendo cuidado con el orden de actuación. Veamos un ejemplo de conjugación a partir de una señal dada:

$$x(2t + 1)$$



Evidentemente la primera conjugación está mal, ya que en realidad lo que está haciendo es $x(2(t + 1))$, que es incorrecto. Lo correcto es, pues, desplazar primero y escalar despues.

EJEMPLOS DE SEÑALES:

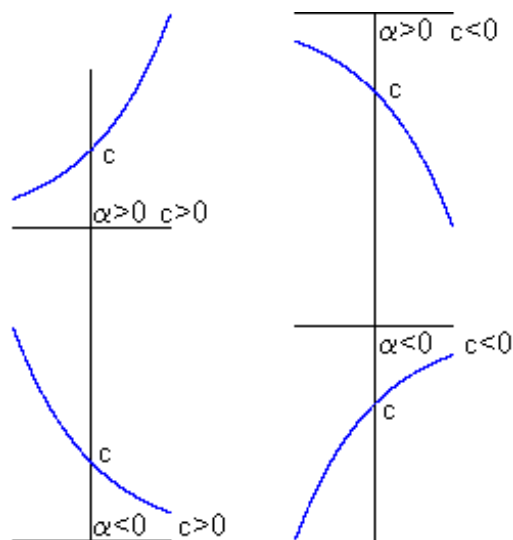
TIEMPO CONTINUO:

- Exponencial compleja:

$$x(t) = ce^{\alpha t}$$

, donde $c, \alpha \in \mathbb{C}$

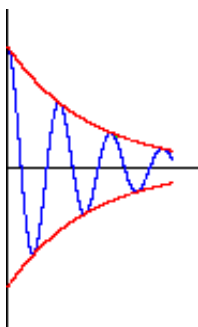
En el caso de que $c, \alpha \in \mathbb{R}$



Si $\alpha = j\omega$
y $c \in \mathbb{R}$

$$x(t) = ce^{j\omega t} = c(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

con lo que la función resultante es periódica



En el caso general:

$$\alpha = \sigma + j\omega$$

$$c = c_0 e^{j\theta}$$

$$x(t) = c_0 e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t} = c_0 e^{\sigma t} e^{j(\theta + \omega t)} = c_0 e^{\sigma t} (\cos(\theta + \omega t) + j \sin(\theta + \omega t))$$

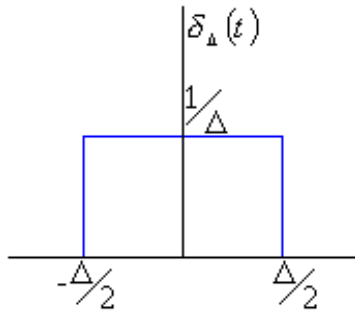
Podemos representar la parte real. La parte imaginaria es idéntica.

Relacionada con este tipo de señal están las exponenciales armónicamente relacionadas, que son todas aquellas exponenciales complejas de la forma:

$$\phi_k(t) = ce^{j(\omega_0 kt)} \quad k = 1, 2, K$$

Evidentemente todas son periódicas de periodo T_0 , y el periodo mínimo de cada una de ellas es $T_0/|k|$

- Impulso unidad o Delta de Dirac:

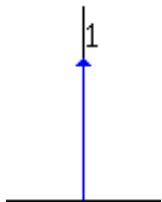


Para definir esta señal vamos a empezar por definir una señal $\delta_{\Delta}(t)$ como una señal cuadrada centrada en el origen, de anchura $2/\Delta$ y área unidad:

El límite de dicha función es la función delta de Dirac:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

Dicha función se representa por :



Donde el 1 indica que el área es la unidad, ya que la altura es infinita.

Podemos definirla como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

Algunas de sus propiedades son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

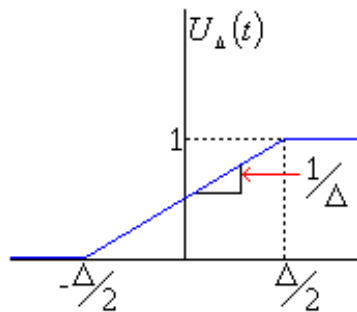
Indef. $t = 0$

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t)$$

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

$$x(t - t_0) \delta(t) = x(-t_0) \delta(t)$$

$$x(t - t_0) \delta(t - t_0) = x(0) \delta(t - t_0)$$



- Escalón unidad:

Al igual que en la anterior, vamos a definir una función accesoria cuyo límite nos va a dar la función escalón unidad. Por tanto definimos la función $U_\Delta(t)$ como:

Su límite es la función escalón unidad:

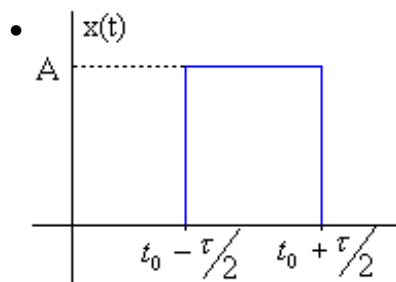
$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} U_\Delta(t) = U(t)$$

Sus propiedades son análogas a las de la delta de Dirac. Además, si la derivamos, obtenemos:

$$\frac{d(U_\Delta)}{dt} = \begin{cases} 0 & t < -\Delta/2 \\ 1/\Delta & -\Delta/2 < t < \Delta/2 \\ 0 & t > \Delta/2 \end{cases} = S_\Delta(t) \quad \frac{d(U)}{dt} = S(t)$$

Por tanto podemos definir:

$$U(t) = \int_{-\infty}^t S(\tau) d\tau$$



Pulso rectangular:

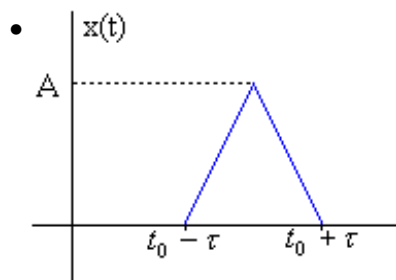
Esta señal se re presenta por:

$$x(t) = A\Pi \frac{t-t_0}{\tau}$$

Su representación gráfica es la de la derecha:

Es posible crear esta señal a partir de dos funciones escalones retardadas convenientemente:

$$x(t) = A\Pi \frac{t-t_0}{\tau} = A \left[U\left(t-t_0+\frac{\tau}{2}\right) - U\left(t-t_0-\frac{\tau}{2}\right) \right]$$



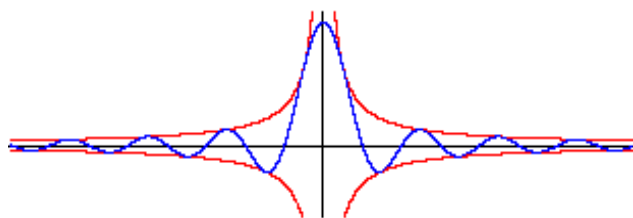
Señal triangular:

Esta señal se re presenta por:

$$x(t) = A\Delta \frac{t-t_0}{2\tau}$$

Su representación gráfica es la de la derecha:

- Función $\text{sinc}(t)$
- :



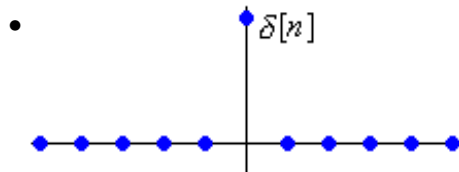
Se define como:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

Se puede verificar que es continua en $t = 0$. Asimismo $\text{sinc}(t)$

es nulo en todos los puntos en los que t sea entero, exceptuando a $t = 0$.

TIEMPO DISCRETO:



Impulso delta de Kronecker:

Se define como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Algunas de sus propiedades más importantes son:

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

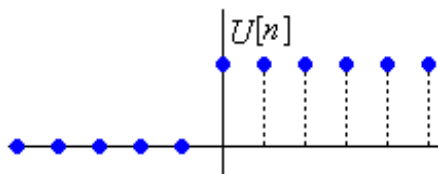
$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0]$$

$$x[n - n_0]\delta[n] = x[-n_0]\delta[n]$$

$$x[n - n_0]\delta[n - n_0] = x[0]\delta[n - n_0]$$

$$\delta[m] = \begin{cases} 0 & m < 0 \\ 1 & m \geq 0 \end{cases}$$

• Escalón unidad en tiempo discreto:



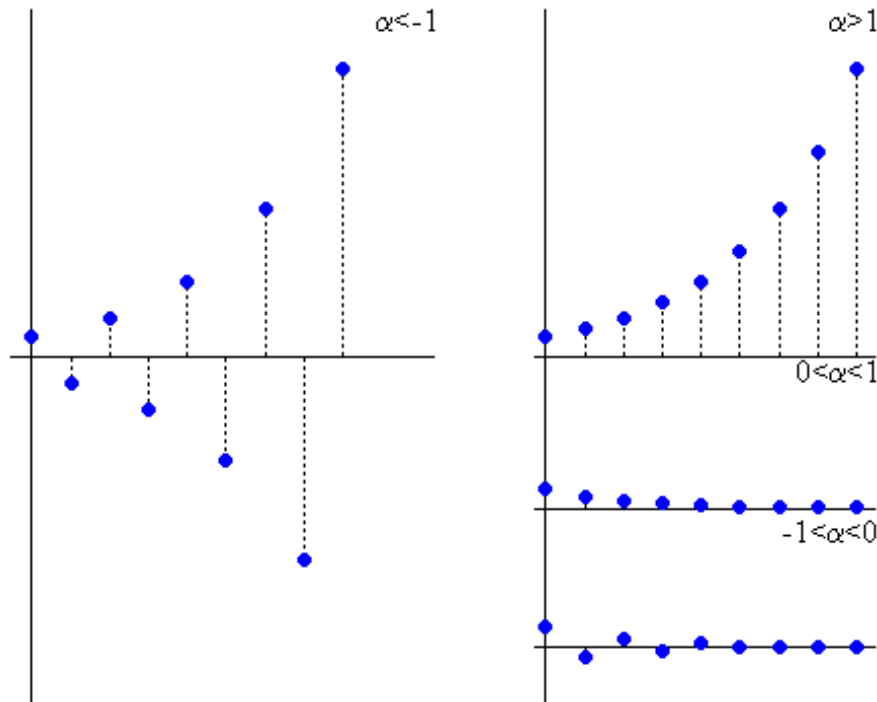
Se define como:

$$U[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$

También se puede definir como:

$$U[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m]$$

- Exponencial compleja en tiempo discreto:



Se define como:

$$x[n] = c\alpha^n$$

, donde $c, \alpha \in \mathbb{C}$

En el caso de que $c, \alpha \in \mathbb{R}$
:

En el caso de que $c \in \mathbb{R}$
, $\alpha \in \mathbb{C}$
, escribimos:

$$x[n] = ce^{j\Omega_0 n}$$

Donde las unidades de Ω_0

son radianes, y le llamamos pulsación, o vulgarmente frecuencia. Por las formulas de Euler podemos escribir:

$$e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j \sin(\Omega_0 n)$$

Dicha señal es periódica en la frecuencia, es decir, para valores de Ω_0

separados por un múltiplo entero de veces 2π

, el comportamiento se repite, de tal manera la oscilación va creciendo con la frecuencia hasta llegar a π
, y luego vuelve a disminuir hasta llegar a 2π

, repitiéndose el proceso.

También puede ser periódica en la variable. Para ello se ha de cumplir que:

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N}$$

Si $\Omega_0 N = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

, entonces $e^{j\Omega_0 N} = 1$

y la señal es periódica.

Al igual que en variable continua, existen unas exponenciales armónicas relacionadas, de frecuencia múltiplo de la fundamental Ω_0

, cuyo número no es infinito, ya que son periódicas en la frecuencia. Las representamos como:

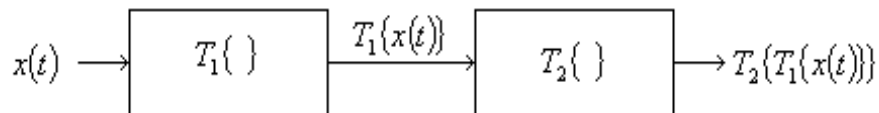
$$\Phi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n}$$

SISTEMAS:

CONEXIÓN DE LOS SISTEMAS:

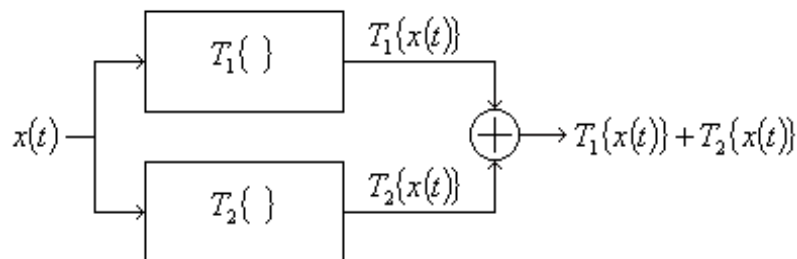
- En serie o cascada:

Consiste en conectar la señal de salida de un sistemas a la entrada de otro sistema:

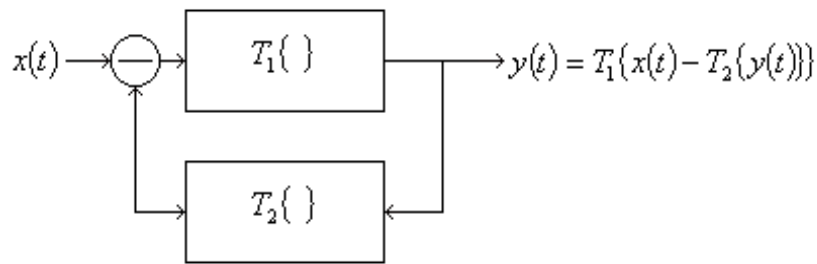


- En paralelo:

Este tipo de conexión consiste en hacer dividir la señal y hacerla pasar por diferentes sistemas, para luego sumarlos:

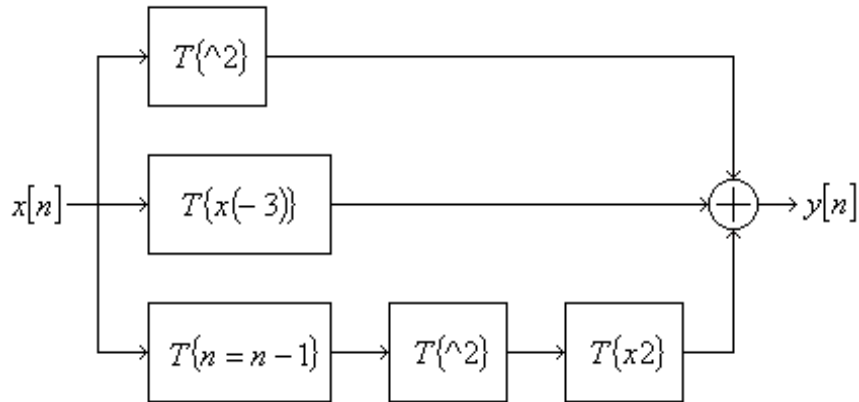


- Con realimentación. Consiste en sumar parte de la señal de salida de un sistema a su propia entrada:



Por supuesto es posible usar combinaciones de los tres tipos de conexión. Un ejemplo sería:

$$y[n] = x^2[n] - 3x[n] + 2x^2[n-1]$$



PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS:

- Linealidad:

Se dice que un sistema es lineal si cumple los principios de superposición y multiplicación por una constante. La manera de expresarlo es:

Un sistema $T\{f(x)\}$
 es lineal si $T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\}$
 , para cualesquiera señales $x_1(t)$
 , $x_2(t)$
 y para cualesquiera constantes a
 , b
 .

Por ejemplo:

$T\{\text{sen}(x)\}$	No es lineal
$T\{\text{Re}[x]\}$	No es lineal
$T\{x^2\}$	No es lineal
$T\{3x\}$	Si es lineal

Existe un tipo de sistemas, no lineales, consistentes en aplicar una transformación lineal y sumar una

constante al resultado. Por ejemplo:

$$T\{3x + 1\}$$

Sin embargo, estos sistemas si son lineales con respecto a los incrementos de la señal, y por ello se les llama sistemas incrementalmente lineales.

Por último hacer notar que todo sistema lineal verifica que ante una señal de entrada nula, la señal de salida es nula.

- Invarianza:

Un sistema se dice invariante si un desplazamiento en la señal o secuencia de entrada produce el mismo desplazamiento en la señal o secuencia de entrada. Podemos decir que:

Un sistema $y(t) = T\{f(x)\}$
 es invariante si $y(t - t_0) = T\{x(t - t_0)\}$
 , para cualquier señal $x(t)$
 .

Por ejemplo:

$$y[n] = T\{x[n]\} = n \cdot x[n]$$

$$T\{x[n - n_0]\} = n \cdot x[n - n_0]$$

$$y[n - n_0] = (n - n_0) \cdot x[n - n_0]$$

Son distintas, luego el sistema es variante.

$$y(t) = T\{x(t)\} = \text{sen}(x(t))$$

$$T\{x(t - t_0)\} = \text{sen}(x(t - t_0))$$

$$y(t - t_0) = \text{sen}(x(t - t_0))$$

Luego el sistema es invariante.

- Causalidad:

Un sistema es causal si en un instante dado la señal de salida depende solamente del valor de la señal de entrada en dicho instante, o en instantes anteriores, nunca posteriores.

Por ejemplo:

$y(t) = T\{x(t)\} = 3x(t) - x^2(t)$	Es causal
$y[n] = T\{x[n]\} = 3x[n - 1] + x[n] + x[n + 2]$	No es causal

Los sistemas no causales con variable temporal no son realizables físicamente.

- Estabilidad:

Un sistema se dice estable si ante una señal de entrada acotada da una señal de salida acotada. En inglés se dice que el sistema es BIBO. Se puede expresar como:

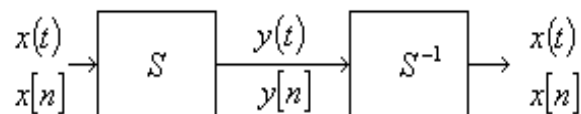
Un sistema $y(t) = T\{f(x)\}$
 es estable si $\forall |x(t)| \leq k_1 \implies |T\{x(t)\}| \leq k_2$
 , para cualquier señal $x(t)$

Por ejemplo:

$y[n] = T\{x[n]\} = x^2[n]$	Es estable
$y(t) = T\{x(t)\} = e^{at} x(t)$	No es estable
$y(t) = T\{x(t)\} = \sin(x(t))x(t)$	Es estable
$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$	No es estable

- Invertibilidad:

Un sistema es invertible si podemos encontrar un sistema que al introducir la señal de salida del original nos devuelva la señal de entrada. Es decir:



Por ejemplo:

$y(t) = T\{x(t)\} = 3x(t)$	$x(t) = T^{-1}\{y(t)\} = \frac{1}{3} y(t)$
$y(t) = T\{x(t)\} = x^2(t)$	$\nexists T^{-1}$
$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$x[n] = T^{-1}\{y[n]\} = y[n] - y[n-1]$

- Memoria:

Se dice que un sistema no tiene memoria si la señal de salida depende únicamente del valor actual de la señal de entrada.

Por ejemplo:

$y(t) = T\{x(t)\} = t \cdot x(t)$	Sin memoria
$y(t) = T\{x(t)\} = x(t) + x(t-3)$	Con memoria

Evidentemente todo sistema sin memoria es causal.

Por ejemplo, una función cuya variable pertenece a $[a, b]$ es continua, pero una cuyos posibles valores para la variable son $\{a_1, K, a_n\}$ es discreta

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \frac{0}{0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi t)}{\pi} = 1$$

4

