

Capítulo 5

CIRCUITOS EN CORRIENTE CONTINUA.

En este capítulo se define, primeramente, el concepto de corriente eléctrica como un flujo de portadores de carga eléctrica en respuesta a un campo eléctrico externo aplicado. Se analiza el caso de conductores metálicos de sección transversal pequeña (alambres) y conductores de sección transversal grande (conductores macizos y huecos); se definen dos parámetros físicos que describen la conducción de carga eléctrica en cada uno de los tipos de conductores.

A continuación se discute la Ley de Ohm, definiéndose un parámetro característico de los materiales conductores y que se denomina resistencia eléctrica. Luego, se presentan las reglas que rigen la combinación de resistencias eléctricas, y a través de ellas se obtienen simplificaciones de los circuitos eléctricos.

Finalmente, se analizan las reglas de Kirchhoff (ley de los nudos y ley de las mallas) que suministran las herramientas básicas para resolver los circuitos eléctricos.

5.1.- INTENSIDAD DE CORRIENTE Y VECTOR DENSIDAD DE CORRIENTE.

La corriente eléctrica se define como el flujo de portadores de carga eléctrica

(electrones, iones positivos, iones negativos) que se produce en un medio conductor como respuesta a un campo eléctrico externo aplicado. En el caso de los medios conductores metálicos, la corriente eléctrica es debida esencialmente a un flujo de electrones, en virtud de que son partículas de considerable menor masa comparada con los protones (masa de un protón = $1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg; masa de un electrón = $9.11 \cdot 10^{-31}$ Kg) y, por lo tanto, presentan una mayor movilidad. El campo eléctrico aplicado implica una fuerza ejercida sobre el electrón ($\vec{F} = -e\vec{E}$)

) que modifica su estado de movimiento. Como en una pequeña muestra de material conductor existe un gran número de electrones, el conjunto tendrá un movimiento efectivo en la dirección del campo eléctrico, a una velocidad llamada velocidad de deriva, generándose la corriente eléctrica.

Se utilizan dos magnitudes físicas para definir el flujo de cargas eléctricas: la intensidad de corriente y la densidad de corriente. La intensidad corriente es una magnitud escalar que mide la cantidad de carga eléctrica que atraviesa normalmente un área unitaria transversal del conductor en la unidad de tiempo.

Matemáticamente, la intensidad de corriente se expresa como:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

(5.1)

y se indica en el S.I. (sistema internacional de medidas) en unidades llamadas [Ampère], y que corresponde a (Coulomb/segundo). Esta magnitud representa bien la conducción si se trata de conductores de sección transversal pequeña, los cuales se denominaran alambres. En particular, cuando se analicen conductores acoplados conformando un circuito eléctrico, se supondrá que estos tienen el carácter de alambres.

La corriente eléctrica así definida, se clasifica en:

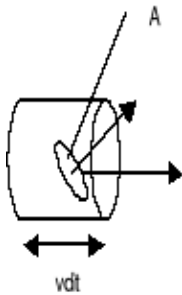
- corriente continua, entendida como aquella que tiene un valor constante $I = I_0$, y circula siempre en el mismo sentido a lo largo del conductor;

- corriente alterna, que es aquella que tiene un valor variable en el tiempo $I = I(t)$, y que además cambia de sentido de circulación en forma periódica.

El vector densidad de corriente, en cambio, define localmente la conducción y equivale a una función distribución de la corriente, y se denota como $\vec{J}(\vec{r})$

. Es una cantidad vectorial que se relaciona con la intensidad de corriente según:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (5.2)$$



donde S es una sección transversal del conductor. Aún más, se puede mostrar que la densidad de corriente es un vector proporcional a la velocidad de deriva de los electrones ($\vec{J} = \eta e \vec{v}$

). En efecto, si se considera una porción de conductor de longitud vdt y sección da , y tal que el vector unitario normal al infinitésimo de área forma un ángulo θ con el vector velocidad, como se muestra en la figura, entonces:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \eta e \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{n} da dt) \quad dI = \eta e \vec{v} \cdot \vec{n} da$$

y comparando con la expresión (5.2) se infiere que $\vec{J} = \eta e \vec{v}$

, siendo η el número de electrones por unidad de volumen y e la carga eléctrica del electrón.

• ECUACION DE CONTINUIDAD.

Una de las propiedades fundamentales de la carga eléctrica es su carácter conservativo, propiedad que se expresa matemáticamente mediante una ecuación diferencial conocida como ecuación de continuidad. Esta ecuación relaciona en cada punto del medio conductor a la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ con la densidad de cargas $\rho(\vec{r})$

.

Si se considera un volumen V en el espacio conductor, cuya superficie frontera es S , entonces la corriente que ingresa al volumen esta dada por:

$$I = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

que se reduce mediante la aplicación del teorema de Gauss a:

$$I = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$$

Por otra parte, se puede medir la misma corriente en función de la carga acumulada en el volumen V:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

dado que el volumen es fijo. Por igualación de las expresiones anteriores se deduce:

$$\int_V \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0$$

(5.3)

que es la ecuación de continuidad, y que establece que cualquiera variación de la carga encerrada por el volumen V significa un flujo de cargas a través de la superficie frontera de ese volumen; si aumenta la carga encerrada es porque hubo un flujo de cargas hacia el interior del volumen, y viceversa.

• LEY DE OHM.

Esta es una ley que establece localmente una relación de proporcionalidad entre el vector densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$

y el campo eléctrico externo aplicado $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

(5.4)

donde la constante de proporcionalidad (A/Vm) se denomina conductividad eléctrica, y es una constante característica de cada conductor metálico. También se suele emplear el recíproco de la conductividad, que se llama resistividad (Vm/A).

Resulta conveniente expresar esta ley de Ohm en términos de parámetros medibles directamente con instrumentos. Para ello, se supone un trozo de conductor de longitud L y sección A, y se admite condiciones de uniformidad tanto del campo eléctrico como de la densidad de corriente en todo punto interior del conductor. Esto quiere decir que:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad I = JA$$

, dado que J = constante y $\mathbf{J}$

es paralelo a $d\mathbf{a}$

.

Además,

$$V = \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad V = EL$$

, dado que E = constante y $\mathbf{E}$

es paralelo a $d\mathbf{l}$

Reemplazando, entonces, en la expresión (5.4) se obtiene para esta aproximación:

$$V = \frac{\rho L}{A} I$$

donde la cantidad $\frac{\rho L}{A}$

, que depende únicamente de la geometría y de la naturaleza del elemento conductor, se denomina resistencia eléctrica R. Con lo cual, se escribe finalmente la ley de Ohm como:

$$V = RI$$

(5.5)

En la expresión (5.5), los voltajes son medidos con instrumentos llamados voltímetros, la intensidad de corriente con amperímetros, y las resistencias eléctricas se miden en unidades llamadas Ohm simbolizadas como (Ω).

El parámetro resistencia eléctrica permite independizarse de la geometría de los conductores y adoptar un símbolo común para todos ellos, diferenciando uno de otros solamente en términos del valor de la resistencia. Así también, se facilita el diagrama y el análisis de la combinación de resistencias, uniéndola mediante conductores ideales.

• COMBINACION DE RESISTENCIAS.

Dos son los tipos de combinaciones que se pueden construir con las resistencias: la conexión serie y la conexión paralela. El análisis de cada combinación conlleva a la determinación de la resistencia equivalente, entendida como aquella única resistencia que cumple las mismas prestaciones que el conjunto de resistencias. Estas reglas de combinación serie y paralela, permiten posteriormente la simplificación de los circuitos eléctricos.

La combinación serie consiste en la unión sucesiva de las resistencias componentes mediante conductores ideales (elementos conductores de resistencia nula). En la figura (5.2) se tiene una combinación serie de N resistencias entre los terminales a y b, cada una con valores R1, R2, R3,, RN.

Aplicando la conservación de la carga eléctrica y la conservación de la energía, se puede inferir las dos siguientes propiedades para la conexión en serie:

- La corriente eléctrica es la misma por todas las resistencias, vale decir, $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_N$.
- El voltaje total entre a y b es igual a la suma de los voltajes de cada resistencia, es decir, $V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_N$.

Así entonces, aplicando la ley de Ohm se tiene que:

$$V_{ab} = I(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N)$$

pero como, $V_{ab} = IR_{eq}$

se concluye que el valor de la resistencia equivalente de la combinación serie es:

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

(5.6)

La combinación paralela de resistencias es aquella en la cual todas las resistencias están conectadas a los mismos terminales a y b, como muestra la figura (5.3).

Las propiedades que satisface esta combinación de resistencias son:

- El voltaje medido entre los terminales de cada resistencia es el mismo, e igual al voltaje medido entre los terminales a y b, o sea, $V_{ab} = V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \dots = V_N$
- La corriente total que ingresa o sale de la combinación es igual a la suma de las corrientes por cada una de las resistencias, es decir, $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \dots + I_N$

Luego, haciendo uso de la ley de Ohm se obtiene que:

$$\frac{V_{ab}}{R_{eq}} = V_{ab} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N} \right)$$

de donde se deduce finalmente que la resistencia equivalente de la combinación paralela se calcula como:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

(5.7)

• POTENCIA ELECTRICA CONSUMIDA EN UNA RESISTENCIA.

La resistencia eléctrica indica una medida de la oposición que enfrentan los electrones a la libre circulación a lo largo del medio conductor, afectada por choques con los núcleos positivos, choques con otros electrones, choques con impurezas, choques con las paredes del conductor, etc. Todas estas acciones sobre los electrones implican pérdidas de su energía de movimiento, transformándose esencialmente en calor. Para los propósitos de este texto, las resistencias eléctricas son elementos disipadores de energía eléctrica, y la potencia eléctrica consumida se determina evaluando el trabajo que debe realizar el campo eléctrico en el interior del conductor, para trasladar un infinitésimo de carga dq desde un punto a mayor potencial hasta un punto a menor potencial,

$$dW = Vdq \quad P = \frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt}$$

$$P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}$$

(5.8)

en la expresión (5.8) se ha utilizado la ley de Ohm ($V=IR$) para dar otras formas alternativas para calcular la potencia consumida por una resistencia. La potencia eléctrica se mide en el S.I. en unidades llamadas (watts).

5.6. FUERZA ELECTROMOTRIZ (FEM)

Se ha mencionado anteriormente, que es estrictamente necesario la existencia de un campo eléctrico para

producir una corriente eléctrica a lo largo de un conductor. A pesar de que un conductor posee cargas eléctricas positivas y negativas que están generando un campo eléctrico en todo el espacio, no se producirá una corriente permanente a través del conductor si este forma un circuito cerrado; la razón es que este campo eléctrico es conservativo, es decir, satisface la condición de circulación nula a lo largo de una trayectoria cerrada ($\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$)

y, por lo tanto, es incapaz de suministrar continuamente energía para que los electrones recorran el circuito. Se debe, entonces, aplicar un campo eléctrico del tipo no conservativo, y el trabajo por unidad de carga que realiza este campo se conoce como la fem (fuerza electromotriz):

$$\xi = \int_C \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.9)$$

donde se ha denominado como $\mathbf{E}_{ef}$

el campo no electrostático. La expresión (6.9) indica que la fem es fundamentalmente una diferencia de potencial y, por lo tanto, se mide en unidades de volts. Su valor determina la cantidad de energía suministrada a los electrones, y la potencia correspondiente se conoce como potencia suministrada.

Así, las fem's son dispositivos que transforman algún tipo de energía en energía eléctrica; por ejemplo, las baterías hacen un proceso de transformación de energía química en energía eléctrica.

Existen dos tipos de fem, dependiendo del tipo de corriente que suministran: la fem continua y la fem alterna. La fem continua es aquella que tiene un valor constante V_0 y proporciona corriente continua, mientras que la fem alterna tiene un valor que es variable en el tiempo $V(t)$ y suministra una corriente alterna. Además, para efectos de análisis de circuitos, se puede distinguir una fem ideal de una fem real; la fem ideal es aquella que proporciona entre sus terminales a-b un voltaje constante independientemente de las resistencias (resistencias de carga) a las que esté conectada la fuente, es decir, $V_0 = \xi$

; en tanto que, la fem real es aquella que entrega un voltaje entre sus terminales a-b que depende de las resistencias de carga, o en otras palabras, es aquella que presenta un consumo de energía eléctrica interna y que se representa en términos de una resistencia interna que está en serie con la fem (ver figura), en consecuencia, el voltaje entre los terminales a-b de una fem real es: $V_0 = \xi - R_i I$

, siendo I la corriente que se establece en el circuito.

Es claro, que una fem real puede suministrar una corriente máxima finita, llamada corriente de cortocircuito I_{cc} , que es aquella que circula cuando entre los terminales a y b se conecta una resistencia nula (cortocircuito) y que tiene un valor de:

$$I_{cc} = \frac{\xi}{R_i} \quad (5.10)$$

(una fem ideal se indica, por ejemplo, como 12 V; mientras que una fem real se indica como 12 V; 0,5)

• LEYES DE KIRCHHOFF.

Con una o más fem's unidas mediante conductores ideales a una o más resistencias eléctricas se forma un circuito eléctrico. La solución del circuito eléctrico implica determinar todas las corrientes que circulan, los voltajes en cada uno de los elementos eléctricos conectados, y las potencias eléctricas suministradas y consumidas. Para simplificar la lectura del circuito se definen algunos conceptos como rama eléctrica, nudo eléctrico y malla eléctrica.

Rama eléctrica es cualquier segmento del circuito, que contiene fem's y/o resistencias eléctricas, y que es recorrida por una única corriente.

Nudo eléctrico es todo punto de unión de tres o más ramas eléctricas, y a la cual confluyen distintas corrientes eléctricas.

Malla eléctrica es cualquier ligazón de ramas eléctricas formando una trayectoria cerrada.

Las ecuaciones básicas para resolver un circuito eléctrico se derivan de la aplicación de las leyes de Kirchhoff, las cuales a su vez, se infieren de la validez de la conservación de la energía y de la conservación de la carga eléctrica. Se conocen como la ley de las mallas y la ley de los nudos, respectivamente.

La **ley de nudos** establece que la suma algebraica de las corrientes en todo nudo eléctrico debe ser siempre igual a cero, es decir,

$$\sum_j I_j = 0 \quad (5.11)$$

Al nudo pueden llegar o salir corrientes, entonces se diferencia, convencionalmente, una de otra mediante el empleo de signos positivos y negativos. En consecuencia, la ecuación (6.11) se puede expresar también como una igualdad entre la suma de las corrientes que llegan al nudo y las que salen del nudo:

$$\sum_j I_j(\text{llegan}) = \sum_k I_k(\text{salen})$$

Para el ejemplo de la figura, la ecuación (6.11) se escribe como:

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

$$\text{o bien, } I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

La **ley de las mallas** establece que la suma algebraica de los voltajes en toda malla eléctrica debe ser siempre igual a cero.

$$\sum_j V_j = 0 \quad (5.12)$$

En cada elemento eléctrico(fem y resistencia eléctrica) se establecen polaridades más(+) y menos(-) entre sus terminales. Se habla entonces de una subida de potencial cuando se recorre el elemento desde el terminal (-) hacia el terminal (+); y de una bajada de potencia cuando el recorrido es desde el terminal (+) hacia el (-). Para efectos de aplicar la ley de mallas debe asignarse, convencionalmente, un signo a las subidas de potencial y otro a las bajadas de potencial.

Ahora bien, para resolver un circuito aplicando las leyes de Kirchhoff conviene seguir el siguiente procedimiento:

- Identificar el número de ramas eléctricas que existen en el circuito, pues eso determinará el número de corrientes incógnitas a resolver.
- Asignar arbitrariamente los sentidos de recorrido de cada una de las corrientes incógnitas.

- Establecer las polaridades en los terminales de las resistencias eléctricas, considerando que la corriente ingresa por un terminal positivo y sale por un terminal negativo. Las polaridades de las fem's son independientes de los sentidos elegidos para las corrientes.
- Escribir un número de ecuaciones, de nudo y de malla, necesario para la cantidad de corrientes incógnitas, y resolverlas.

Ejemplo 5.1. Para el circuito de la figura, determine:

- La diferencia de potencial entre los puntos a-b.
- La potencia que suministran las fuentes y la potencia disipada en la resistencia de 5 ().

SOLUCION.-

Elegidas así las corrientes I₁, I₂ e I₃, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a) I_3 = I_1 + I_2$$

$$b) 5 - 3I_1 - 5I_3 = 0$$

$$c) 5I_3 - 10 + 7I_2 = 0$$

resolviendo el sistema de tres ecuaciones, se encuentra que:

$$I_1 = 0.142 \text{ (A)} \quad I_2 = 0.773 \text{ (A)} \quad I_3 = 0.915 \text{ (A)}$$

Luego,

$$a) V_{ab} = 3I_1 + 10 = 10.426 \text{ (V)}$$

$$b) P_1 = 5I_1 = 0.71 \text{ (watts)}$$

$$P_2 = 10I_2 = 7.73 \text{ (watts)}$$

$$P_3 = I_3^2 R = (0.915)^2 5 = 4.186 \text{ (watts)}$$

Ejemplo 5.2. Para el circuito resistivo de la figura, calcule:

- La potencia consumida por la resistencia de 20 ().
- La corriente en la resistencia de 6 ().

SOLUCION.- Primeramente, se simplifica el circuito aplicando la regla de combinación de resistencias en paralelo, a las resistencias de 3 (), 6 () y 18 ():

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \quad R = 1.8 \text{ (}\Omega\text{)}$$

Luego, el circuito se reduce a:

El sistema de ecuaciones es entonces,

$$1) I_3 = I_1 + I_2$$

$$2) 10 - 4I_1 - 1,8I_3 = 0$$

$$3) 1,8I_3 + 20I_2 - 15 = 0$$

Resolviendo el sistema, se obtienen

las corrientes:

$$I_1 = 4.79 \text{ (A)} \quad I_2 = 0.29 \text{ (A)} \quad I_3 = 5.08 \text{ (A)}$$

Luego,

$$a) P_{20} = I_2^2 20 = 1.68 \text{ (watts)}$$

$$b) V_6 = RI_3 = 1.8 \cdot 5.08 = 9.14 \text{ (V)} \quad I_6 = \frac{9.14}{6} = 1.52 \text{ (A)}$$

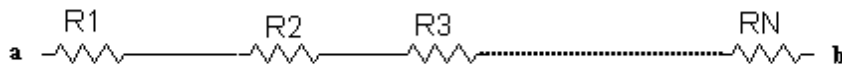
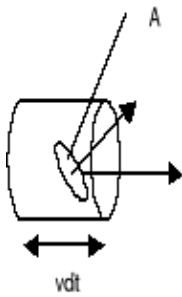


Fig. 5.2

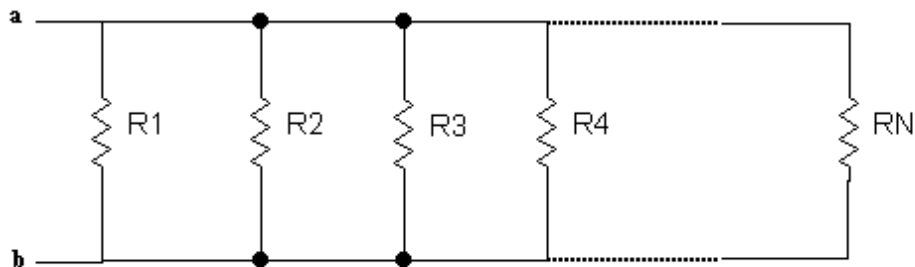


Fig. 5.3

