

Respuesta en Frecuencia.

La respuesta en frecuencia, se refiere a la respuesta en estado estable de un sistema sujeto a una señal senoidal de amplitud fija, pero con una frecuencia que varía con cierto rango.

El procedimiento analítico para determinar la respuesta en frecuencia, es relativamente sencillo y consta de cuatro pasos :

- 1.- Se obtienen las funciones de transferencia para el elemento ó combinación de elementos que haya, es decir $O(s)/I(s) = F(s)$, donde $O(s)$ e $I(s)$ son las transformadas de la respuesta y la señal, respectivamente. Todas las condiciones iniciales se desprecian porque estas no afectan la respuesta en el estado estable.
- 2.- En la función de transferencia, se sustituye cada s por j .
- 3.- Para varios valores de la frecuencia , se determina la relación de magnitud M y el ángulo de fase .
- 4.- Se grafican los resultados en coordenadas rectangulares ó polares.

Justificación de la sustitución de s por j .

En el paso 2, se menciona que hay que sustituir a s por j en la función de transferencia. El procedimiento será trabajar con una función de transferencia general, obteniendo primero la respuesta en el estado estable a una señal senoidal usando las transformadas de Laplace y después haciendo dicho cambio.

Si las respuestas resultan idénticas, la sustitución puede considerarse válida.

Supongase una función de transferencia general como numerador $N(s)$ y un denominador $D(s)$, entonces :

$$O(s) / I(s) = F(s) = N(s) / D(s).$$

Sea la señal, una senoidal con una amplitud unitaria ($\sin t$). La transformada de la señal $I(s)$, es

$1/(s^2 + 1)$. Por lo tanto :

$$O(s) = \frac{I(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s^2 D(s)} = \frac{N(s)}{(s+j)(s-j) D(s)}$$

Recordando que todas las condiciones iniciales pueden despreciarse, ya que estas no afectan a la respuesta en el estado estable.

Desarrollando en fracciones parciales:

$$\frac{C_1}{s+j} + \frac{C_2}{s-j} + \frac{C_3}{s+r_1} + \dots + \frac{C_n}{s+r_{n-2}}$$

$$s+j \quad s-j \quad s+r_1 \quad s+r_{n-2}$$

donde $s+r_1, \dots$, son factores de $D(s)$. Para un sistema estable los transitorios desaparecen [las transformadas inversas de $C_3/(s+r_1), \dots$, se anulan conforme $t \rightarrow \infty$], y la respuesta en el estado estable es :

$$x(t) = C_1 e^{-j\omega t} + C_2 e^{j\omega t}$$

Donde

$$C_1 = -\frac{1}{2j} \frac{N(-j\omega)}{D(-j\omega)}$$

$$C_2 = \frac{1}{2j} \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

$$C_2 = \frac{1}{2j} \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

$$C_2 = \frac{1}{2j} \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

Como alternativa, la fracción $N(j\omega)/D(j\omega)$ se puede expresar en la siguiente forma :

$$N(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$D(j\omega)$$

$$N(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

$$D(-j\omega)$$

Donde $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son números reales y son función de la frecuencia.

Por lo tanto :

$$C_1 = -\frac{1}{2j} [A(\omega) - jB(\omega)] \text{ y } C_2 = \frac{1}{2j} [A(\omega) + jB(\omega)]$$

$$2j$$

Sustituyendo y desarrollando, se obtiene :

$$A(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t$$

La respuesta en el estado estable se aprecia que está compuesta de la suma de una senoide y de una cosenoide, la suma de estas dos ondas se lleva a cabo por adición vectorial, como se muestra en la siguiente figura:

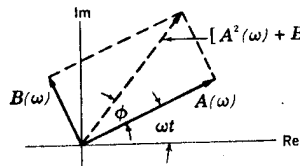


Fig. 9-2. Adición de vectores

aquí un vector o fasor de magnitud $A(\omega)$, se considera que está girando en sentido contrario al de las manecillas de un reloj con una frecuencia ω . La proyección de este vector sobre el eje imaginario produce la senoide requerida. Un fasor de magnitud $B(\omega)$, se muestra adelantado 90° con respecto al primer fasor, su proyección sobre el eje imaginario, produce la cosenoide requerida.

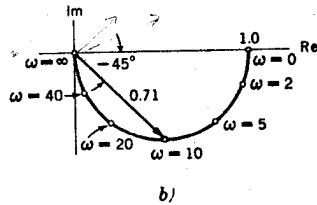
Los dos vectores pueden reemplazarse por un solo vector de magnitud $[A^2(\omega) + B^2(\omega)]^{1/2}$ $\angle \phi$ $\sin(\omega t + \phi)$,

donde:

$$= \arctan B(\omega)/A(\omega).$$

La grafica polar.

Considerando el sistema mostrado a continuación:



La ecuación diferencial:

$$c \cdot \frac{dy}{dt} + y = x(t)$$

k dt

y cuya función de transferencia es : $Y(s) = \frac{1}{s + 1}$.

$$X(s) \frac{1}{s + 1}$$

donde la constante de tiempo $\tau = c/k$. Haciendo la sustitución s por $j\omega$ y suponiendo que $\tau = 0.1$ seg, queda :

$$Y(j\omega) = \frac{1}{1 + j0.1\omega}$$

$$X(j\omega) \frac{1}{1 + j0.1\omega}$$

Ahora se muestra una tabla que relaciona la magnitud con la fase, para varios valores de ω .

ω (rad/seg)	$M(\omega)$	$\angle Y(j\omega)$ (°)
0	1.00	0.0
2	0.98	-11.3
5	0.89	-26.6
10	0.71	-45.0
20	0.45	-63.4
40	0.24	-76.0

Los datos de esta tabla se muestran en la figura b).

La gráfica rectangular.

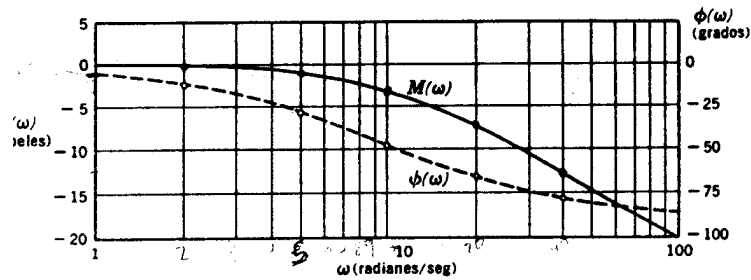
La relación de magnitud y fase, se grafican contra la frecuencia. Se acostumbra y es conveniente hacer las gráficas contra $\log_{10} \omega$.

En el caso de los ángulos de fase, se usa una escala lineal, de manera que la gráfica se hace en papel semilogarítmico.

La relación de magnitud puede graficarse como $\log_{10} M(\omega)$, en cuyo caso puede graficarse en papel logarítmico, ó puede expresarse en decibeles, y queda expresada como : $\phi_{db} = 20 \log_{10} M$.

Tomando la tabla ántes mostrada su gráfica en coordenadas rectangulares, se expresa en la siguiente figura :

ados en las figuras 9-3a y 9-4a, están graficados en las figuras 9-6



9-6. Gráfica en coordenadas rectangulares para el sistema mostrado en la figura 9-3a.

angulares.

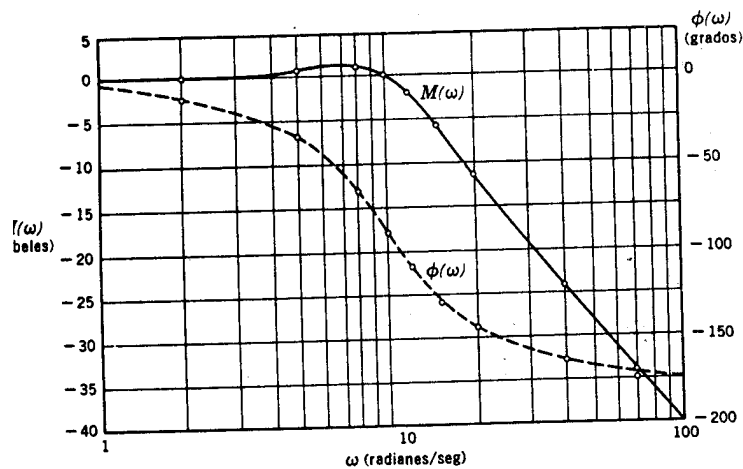


Fig. 9-7. Gráfica en coordenadas rectangulares para el sistema mostrado en la figura 9-4a.