

## **LABORATORIO DE RESISTENCIA DE MATERIALES**

### **TEMA.**

Ensayo de pandeo.

### **OBJETIVO.**

El objeto del ensayo de pandeo es investigar el comportamiento de elementos largos (esbeltos) sometidos a cargas de compresión axial, es decir, que no fallan por aplastamiento.

### **FUNDAMENTO TEÓRICO.**

En forma normal se piensa que las deflexiones dentro del límite elástico varían en forma lineal con la carga, sin embargo ocurren varias excepciones notables, como la falla por estabilidad o pandeo cuando se aplican cargas de compresión.

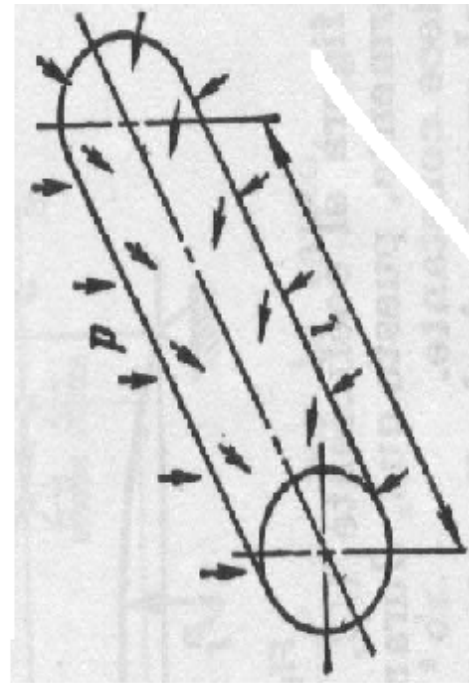
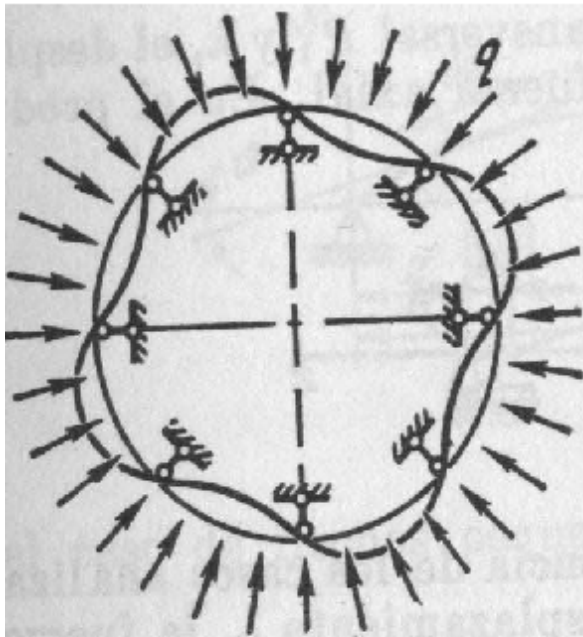
Se entiende por estabilidad la propiedad del sistema de mantener su estado durante las acciones exteriores. Si el sistema no tiene esta propiedad se dice que el sistema es inestable. En la misma medida se puede afirmar que su estado es inestable.

En las condiciones reales siempre existen causas que pueden conducir a la perturbación del estado original de equilibrio. Es decir, que siempre se realiza la posibilidad del paso del sistema inestable a un nuevo estado. En este caso se dice que no tiene lugar la pérdida de estabilidad.

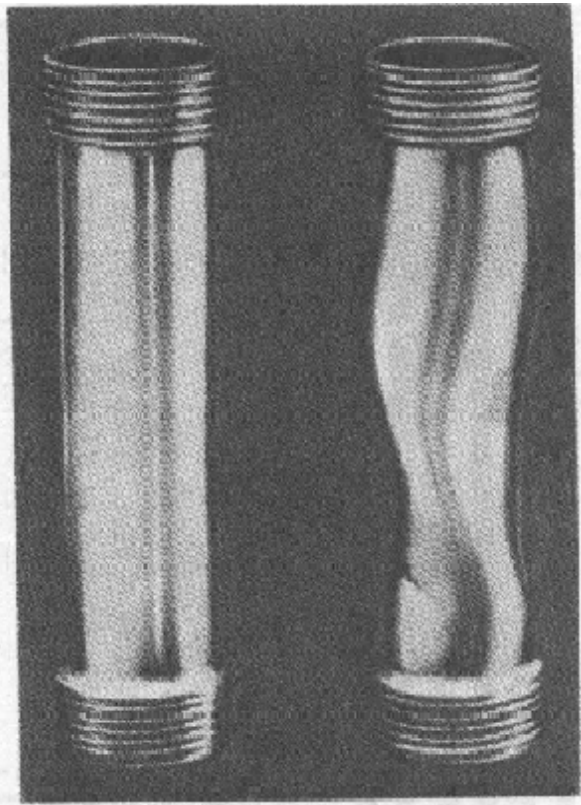
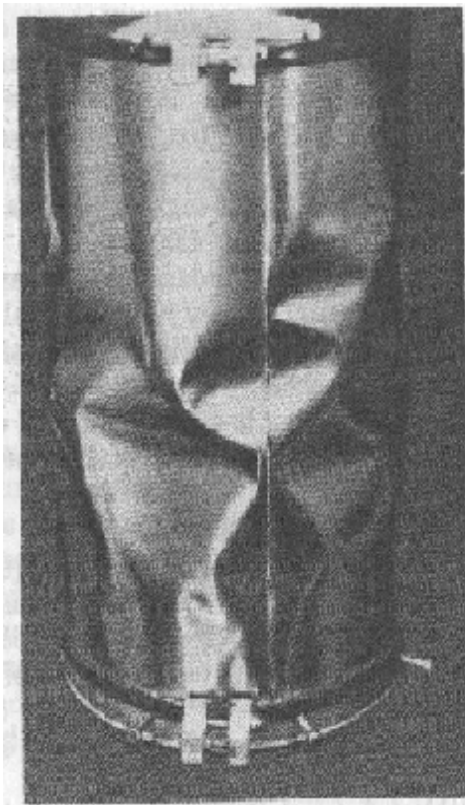
Al perder la estabilidad, el sistema se puede comportar de diversas formas. Generalmente, tiene lugar el paso a un nuevo estado de equilibrio, lo que, en la mayoría de los casos va acompañado de grandes deformaciones, de deformaciones plásticas o de una rotura completa. En algunos casos, después de perder la estabilidad, la estructura sigue trabajando y cumple, como antes, sus funciones principales. Pueden ocurrir, por fin, casos cuando el sistema perdió estabilidad, al no tener una posición estable de equilibrio, pasa al régimen de las oscilaciones no amortiguadas.

Es necesario destacar que el fenómeno de la pérdida de estabilidad se manifiesta de la forma más clara en las estructuras ligeras de paredes delgadas: en las cáscaras comprimidas y en las paredes delgadas. Tal vez los más comunes son las columnas largas esbeltas trabajando a la compresión. Los ejemplos incluyen columnas en edificios, eslabones estructurales a la compresión (como en puentes), bielas conectadas a pistones, resortes helicoidales a la compresión y tornillos de gatos; también los tubos de paredes delgadas solicitados por una presión exterior es capaz de perder estabilidad. En este caso, la forma circular de la sección pasa a ser elíptica y el tubo se aplasta, a pesar de que, en el momento de perder la estabilidad, las tensiones están lejos de alcanzar el límite de fluencia.

En las siguientes figuras se muestran algunos elementos con falla por pandeo:



Presiones externas sobre un cilindro de pared delgada.



Elementos que fallaron por Pandeo.

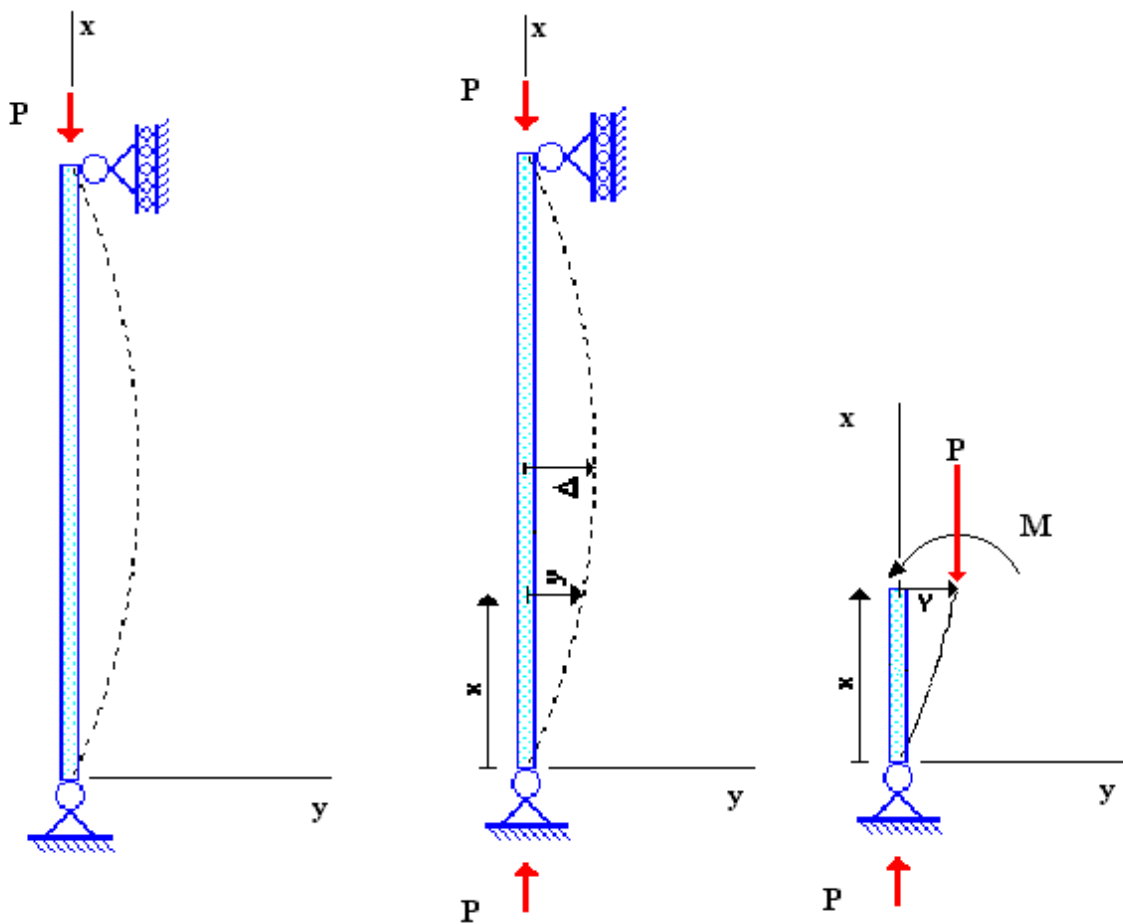
En el caso de barras esbeltas, debemos tener en cuenta que si la fuerza aplicada sobre una barra perfecta sigue la dirección exacta del lugar geométrico de los centros de gravedad de la sección no se producirá el pandeo. Pero en las condiciones reales en que actúa el sistema pueden existir una o más de las siguientes causas que determina el pandeo, como por ejemplo:

- Irregularidades en la forma.
- Irregularidades en la estructura.
- Excentricidad de la carga respecto al centroide geométrico.
- Pequeña flexión del eje.

En el caso de barras esbeltas sometidas a fuerzas axiales de compresión, éstas corresponden al caso general tratado por Leonard Euler en 1744 cuando publicó el primer tratado conocido sobre la estabilidad elástica.

La carga axial que da inicio a la inestabilidad por pandeo en un elemento estructural se conoce como **carga crítica de pandeo** del elemento o **carga de Euler**. Para el análisis de Euler se considera que la barra está articulada en ambos extremos. Se puede tomar como referencia a un elemento estructural ideal de eje recto, sin imperfecciones del material ni de alineación del elemento, con una longitud  $L$ , de sección constante  $A$  e inercia  $I$ , constituido por un material lineal elástico cuyo módulo de elasticidad es  $E$ . En uno de sus extremos se coloca un apoyo fijo y en el otro, un apoyo deslizante longitudinal.

Al elemento mencionado se lo somete a una carga axial de compresión en el extremo del apoyo deslizante, y se le proporciona una elástica de deformación flexionante continua similar a la que se observa en piezas de libre rotación en sus extremos (elementos articulados– articulados), debido a la inestabilidad por pandeo.



El momento flector  $M$  inducido por la deformación inicial, a una distancia genérica  $x$ , determinado sobre la pieza deformada sera:

$$M(x, y) = P \cdot y$$

Las deformaciones transversales del elemento por el efecto de flexión se pueden describir mediante la **Ecuación General de la Flexión**, tomada de la Resistencia de Materiales:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M(x,y)}{E(x).I(x)}$$

Reemplazando la ecuación de momentos flectores en la ecuación general de flexión, y considerando la sección constante del elemento y un único material elástico, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{P.y}{E.I}$$

Rescribiendo:

$$y'' + \frac{P}{E.I}y = 0$$

Se define un parámetro auxiliar **C** , donde **C** es siempre positiva y se puede calcular con la expresión:

$$C^2 = \frac{P}{E.I}$$

Entonces la ecuación diferencial se puede rescribir como:

$$y'' + C^2 . y = 0$$

La solución a la ecuación diferencial planteada es:

$$y = A . \text{Sen} (C . x) + B . \text{Cos} (C . x)$$

Por la condición de borde del extremo inferior:

para **x = 0** **y = 0**, de donde:

$$B = 0$$

La solución simplificada es:

$$y = A . \text{Sen} (C . x)$$

Por la condición de borde del extremo superior:

para **x = L** **y = 0**, por lo que:

$$0 = A . \text{Sen} (c . L)$$

$$\text{Como } A \neq 0 \text{ Sen} (c . L) = 0$$

$$\text{Por lo tanto: } C . L = n . \pi$$

Despejando **C**:

$$C = \frac{n \cdot \pi}{L}$$

Elevando al cuadrado:

$$C^2 = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2}$$

Donde **n** puede tomar cualquier valor entero mayor o igual a 1 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Igualando los valor definidos anteriormente para **C2** se obtiene:

$$\frac{P}{E \cdot I} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2}$$

Despejando **P** de la igualdad, se obtienen las cargas axiales específicas o **cargas críticas de pandeo** correspondientes a todos los modos de deformación por pandeo:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

La menor carga crítica está asociada a **n = 1**, y corresponde al **primer modo de deformación por pandeo**:

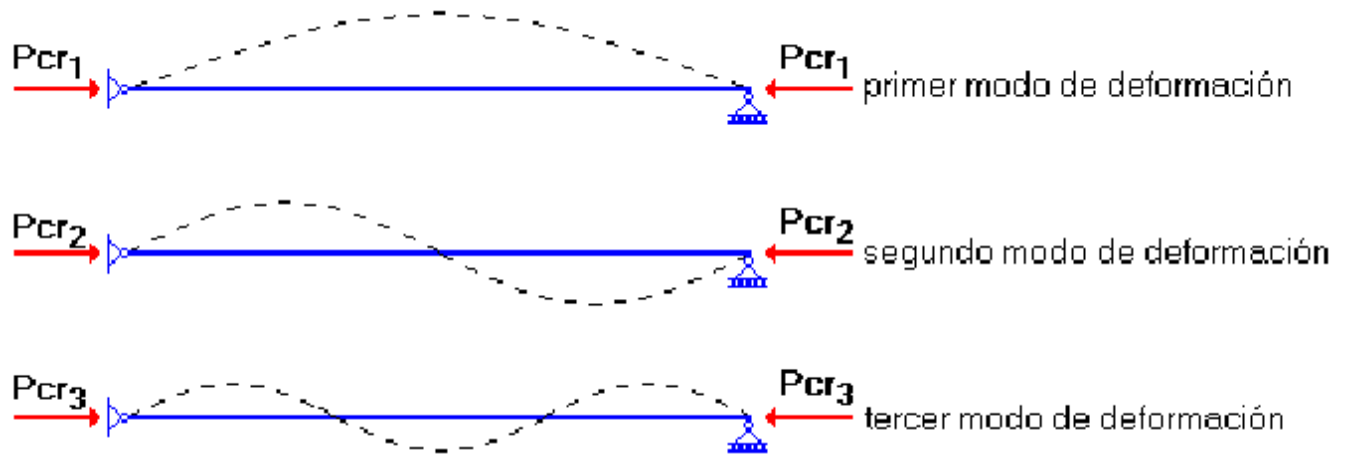
$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Las cargas críticas para los restantes modos de deformación se obtienen con los otros valores que puede tomar **n** ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

$$P_{cr2} = \frac{4\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$P_{cr3} = \frac{9\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

A continuación se presenta un gráfico que describe la geometría de las deformaciones causadas por el pandeo de acuerdo con los tres primeros modos de deformación.



Debe anotarse que, en el presente caso, la carga crítica de pandeo para el segundo modo de deformación es 4 veces mayor que la carga crítica de pandeo para el primer modo de deformación, y la carga crítica de pandeo para el tercer modo de deformación es 9 veces mayor que la carga crítica de pandeo para el primer modo de deformación.

Es evidente que el primer modo de deformación controlará el pandeo de las columnas.

El segundo modo de deformación tiene utilidad por su semejanza a las deformaciones producidas por estados de carga flexionantes frecuentes, que afectan a las columnas, lo que podría provocar un amortiguamiento temporal del primer modo de deformación en elementos estructurales reales (no ideales). Los restantes modos de deformación tienen una utilidad estrictamente académica, por lo que no son trascendentales para la práctica ingenieril.

Para otros tipos de condiciones de borde (bordes empotrados, bordes libres, bordes elásticamente sustentados, etc.), la ecuación básica de Euler para el primer modo de deformación se ve modificada por un factor de forma de la elástica de deformación que afecta a la longitud de pandeo:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(L_p)^2}$$

donde  $L_p$  toma los siguientes valores para condiciones de borde bien definidas:

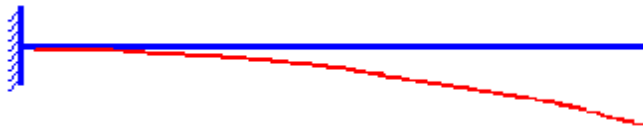
- Barras articuladas–articuladas en los extremos:

$$L_p = L$$



- Barras empotradas en un extremo y libres en el otro :

$$L_p = 2xL$$



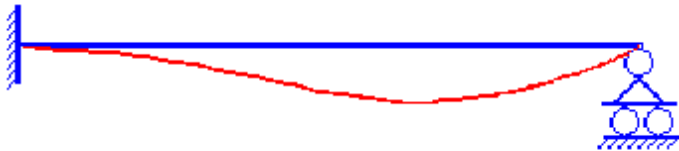
- Barras empotradas en los dos extremos :

$$L_p = 0.5L$$



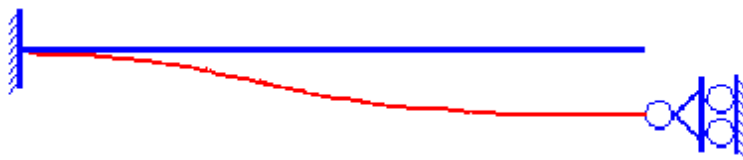
- Barras empotradas en un extremo y articulada en el otro :

$$L_p = 0.70.L$$



- Barra empotrada en un extremo y empotrada monodeslizante en el otro extremo:

$$L_p = 0.70.L$$



- Barra articulada–empotrada monodeslizante :

$$L_p = 0.70.L$$



Ahora sí podemos generalizar la expresión que nos da  $P_{cr}$  para  $n=1$ ; para cualquier caso de extremos del elemento analizado, pero no con la longitud real  $L$  sino con la equivalente o efectiva  $L_p$ .

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(L_p)^2}$$

El esfuerzo correspondiente será:

Y el factor de esbeltez queda redefinido como:

Debemos definir también el **plano crítico de pandeo**; que es el plano en el cual es más probable que se produzca el pandeo teniendo en cuenta no solo el tipo de apoyo en las distintas direcciones sino también el momento de inercia en los ejes correspondientes a cada una de estas direcciones. En muchos casos el plano crítico de pandeo no es fácil de identificar y por ello se deberán realizar cálculos previos. El plano para el que se obtenga el mayor coeficiente de esbeltez será el crítico.

### **Material y equipo utilizado.**

- Probetas de 6 mm. de diámetro, de las siguientes longitudes : 290, 250, 210, 160 y 130.
- Equipo Scott con todos sus accesorios.
- Un micrómetro.

### **Procedimiento.**

- Abrir la válvula del equipo Scott, hasta que el manómetro indique cero y la placa inferior esté en su punto máximo inferior.
- Colocar la probeta correspondiente en la máquina Scott, debemos colocar la probeta lo más centrada posible para reducir la excentricidad que podría producirse al aplicarle la carga de compresión. Se usaran los accesorios debidamente colocados hasta lograr el tamaño ideal para cada barra.
- Sujetarla la probeta en ambos extremos, pasando el pin respectivo por cada orificio del extremo de la barra.
- Aplicar la carga lentamente, hasta llegar a la carga crítica de pandeo, momento en el cual la probeta fallará (será con un fuerte ruido).

### **EJEMPLO DE CÁLCULO.**

Para la probeta N°1:

Longitud: 290 mm.

Diámetro: 6 mm.

Hallando radio de giro:

Donde :

Reemplazando:

Hallando grado de esbeltez:



Reemplazando:

Hallando  $F_p$  (teórico):

Reemplazando:

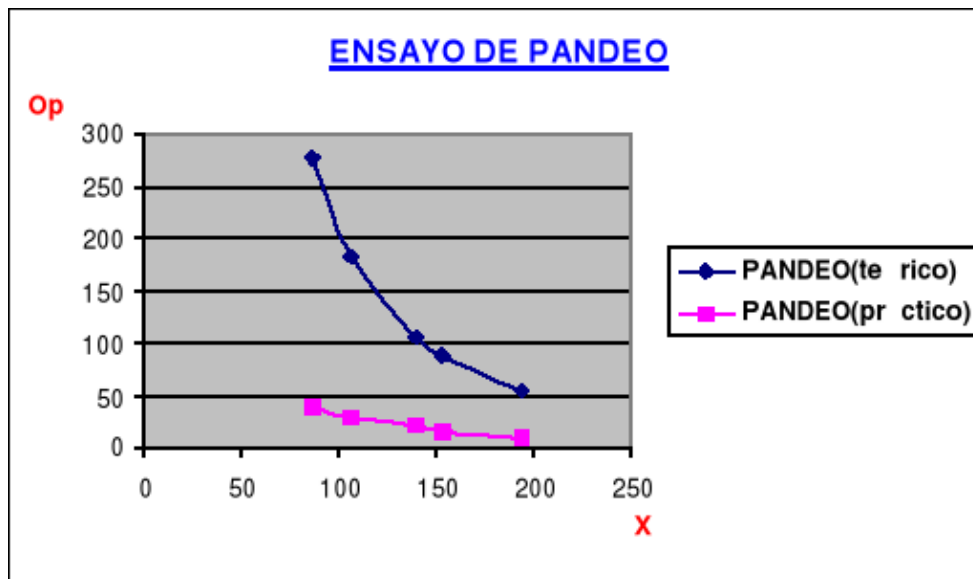
Hallando  $F_p$  (práctico):

Reemplazando:

## RESULTADOS.

| Probeta | Longitud | Diámetro | $i=d/4$ |        | $F_p$ (teórico) |                      | $F_p$ (práctico) |                      |
|---------|----------|----------|---------|--------|-----------------|----------------------|------------------|----------------------|
| Nº      | (mm)     | (mm)     | (mm)    |        | (N)             | (N/mm <sup>2</sup> ) | (N)              | (N/mm <sup>2</sup> ) |
| 1       | 290      | 6        | 1.5     | 193.33 | 1567.83         | 55.45                | 268.565          | 9.5                  |
| 2       | 230      | 6        | 1.5     | 153.33 | 2492.58         | 88.17                | 428.8            | 15.17                |
| 3       | 210      | 6        | 1.5     | 140    | 2989.97         | 105.76               | 584.8            | 20.68                |
| 4       | 160      | 6        | 1.5     | 106.66 | 5150.69         | 182.19               | 857.8            | 30.34                |
| 5       | 130      | 6        | 1.5     | 86.66  | 7802.24         | 275.99               | 1091.7           | 38.61                |

### Diagrama de Esfuerzo de Pandeo de Euler vs Grado de Esbeltez.



### OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES.

- Debemos tener en cuenta hay una pequeña excentricidad en la aplicación de la carga, pero para efectos de cálculo se desprecia.
- Las probetas además de ser relativamente simétricas, no presentan la zona crítica de pandeo en el centro; pues ésta depende de varios factores como por ejemplo al momento de torneear la probeta.
- Debemos tener en cuenta que para la deducción de la fuerza crítica de pandeo se ha empleado la fórmula de la línea elástica del elemento deformado; luego, el resultado obtenido sólo podrá ser

empleado en el rango elástico del material.

- Observamos una diferencia notable entre los resultados teóricos y prácticos, pues  $F_p(\text{práctico}) \approx 1.7 * F_p(\text{teórico})$ .
- La falla por pandeo se produce de forma instantánea, produciendo un sonido estridente debido a la brusca liberación de energía.
- Debido a la gran diferencia de la carga para la falla, en estructuras esbeltas se suelen usar factores de seguridad bastante altos.
- Parte de la gran diferencia que existe entre los valores teórico y práctico es consecuencia de la poca precisión y fugas de los equipos utilizados.