

MODELOS MATEMATICOS DE SISTEMAS FISICOS.

• **Introducción.**

Para efectuar el análisis de un sistema, es necesario obtener un modelo matemático que lo represente. El modelo matemático equivale a una ecuación matemática o un conjunto de ellas en base a las cuales podemos conocer el comportamiento del sistema.

Es necesario comentar que el modelo matemático que se desarrolla a partir de un sistema no es único, debido a lo cual se pueden lograr representaciones diferentes del mismo proceso.

Estas diferentes representaciones no contradicen una a la otra. Ambas contienen información complementaria por lo que se debe encontrar aquella que proporcione la información de interés para cada problema en particular.

Dentro de este contexto, por lo general se emplea la representación en "variables de estado" aunque no por ello el método de "relación entrada-salida" deja de ser interesante a pesar de proporcionar menor información de la planta.

Para uniformizar criterios respecto a las denominaciones que reciben los elementos que conforman un sistema de control es necesario tener en mente las siguientes definiciones:

Planta Cualquier objeto físico que ha de ser controlado.

Proceso Operación o secuencia de operaciones, caracterizada por un conjunto de cambios graduales que llevan a un resultado o estado final a partir de un estado inicial.

Sistema Combinación de componentes que actúan conjuntamente y cumplen un objetivo determinado.

Perturbación Es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema.

Servomecanismo Sistema de control realimentado cuya salida es una posición mecánica.

• **Sistemas de control de lazo abierto y lazo cerrado.**

Sistema de lazo abierto.

Un sistema de lazo abierto es aquél donde la salida no tiene efecto sobre la acción de control. La exactitud de un sistema de lazo abierto depende de dos factores:

a) La calibración del elemento de control.

b) La repetitividad de eventos de entrada sobre un extenso período de tiempo en ausencia de perturbaciones externas.

Un esquema típico de un control de lazo abierto se puede apreciar en la figura 1.1. En estase muestra que para que la temperatura del agua en el tanque permanezca constante es necesario que las temperaturas en las tomas de agua fría y caliente no sufran cambios. Otro factor que incide sobre el estado final de la salida es la temperatura de operación del proceso. Si por cualquier motivo esta cambia, entonces la salida cambia en casi la misma proporción.

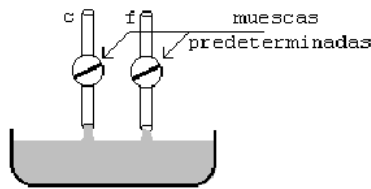


FIG. 1.1 SISTEMA DE CONTROL DE TEMPERATURA DE LAZO ABIERTO

Sistema de lazo cerrado.

Un sistema de control de lazo cerrado es aquél donde la señal de salida tiene efecto sobre la acción de control. La figura 1.2 da un panorama general de un sistema de lazo cerrado donde se puede apreciar que la salida es medida y retroalimentada para establecer la diferencia entre el valor deseado y el valor obtenido a la salida, y en base a esta diferencia, adoptar acciones de control adecuadas.

En las figuras de la 1.3 y 1.5 se dan dos ejemplos para sistemas de control de lazo cerrado.

En cada una de estas figuras se puede apreciar que la parte fundamental para el control de la planta en cuestión es la red de retroalimentación que sensa el estado de la salida. En estos ejemplos se ha pretendido establecer que la naturaleza de las señales en un lazo de control no necesariamente es la misma, esto es, pueden estar involucradas diferentes tipos de señales por ejemplo, mecánicas, eléctricas, térmicas, hidráulicas, etc., dentro del mismo lazo.

• Funciones de transferencia.

Una vez que se han definido los diferentes tipos de sistemas, es necesario conocer la dinámica de los mismos a partir de ecuaciones que relacionen el comportamiento de una variable respecto a otra. Para lograr lo anterior se requiere de gran conocimiento de los procesos y de los elementos que los conforman, y de cada una de las disciplinas de la ingeniería involucradas. Es por ello que la ingeniería de control se considera un campo interdisciplinario.

Una planta o cada una de las partes que forman un sistema de control, puede ser representada por un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales de n -ésimo orden con coeficientes lineales invariantes en el tiempo que relacionan la variable de entrada con la variable de salida de la forma:

donde: a_i 's y b_i 's son constantes, $u(t)$ es la entrada y $y(t)$ es la salida.

Usando la transformada de Laplace para convertir la ecuación integro-diferencial (1.1) en una ecuación algebraica considerando que las condiciones iniciales son iguales a cero llegamos a la siguiente expresión:

Relacionando la salida $Y(s)$ con la entrada $X(s)$ tenemos:

Esta última expresión es denominada la Función de transferencia de sistema.

La función de transferencia de un sistema lineal con coeficientes constantes invariantes en el tiempo está definida como: "La relación de la transformada de Laplace de la salida con la transformada de Laplace de la entrada, suponiendo condiciones iniciales cero".

El hecho de trabajar con funciones de transferencia, simplifica en gran medida el manejo matemático de los sistemas dado que las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones algebraicas lineales, y las operaciones en el dominio de la frecuencia compleja s son multiplicaciones simples. Con ello la salida del

bloque de la figura 1.6 es $Y(s) = H(s)X(s)$

Una metodología a seguir para la determinación de la función de transferencia de un sistema es la siguiente:

- 1) Identificar las ecuaciones de equilibrio o leyes físicas involucradas en el sistema.
- 2) Siguiendo las ecuaciones de equilibrio plantear las ecuaciones integro-diferenciales correspondientes a cada variable de interés.
- 3) Obtener la transformada de Laplace de cada ecuación considerando condiciones iniciales cero.
- 4) Relacionar la variable de salida con las variable de entrada.

Dada la naturaleza multidisciplinaria de un sistema de control este puede estar conformado por subsistemas interconectados, donde cada uno de ellos contiene elementos cuyo comportamiento es estudiado por diferentes ramas de la ingeniería.

Es por esta razón que a continuación se estudiarán los elementos así como las leyes de

equilibrio de los sistemas más comunes como son:

- Sistemas mecánicos.
- Sistemas eléctricos.
- Sistemas de nivel de líquidos.
- Sistemas térmicos.

1.4. Sistemas mecánicos.

Los sistemas mecánicos son una parte fundamental de la vida común, ya que cualquier cuerpo físico se comporta como tal. En general los sistemas mecánicos son gobernados por la segunda ley de Newton, la cual establece para sistemas mecánicos de traslación que "la suma de fuerzas en un sistema, sean estas aplicadas o reactivas, igualan a la masa por la aceleración a que esta sometida dicha masa".