

DISEÑO DE OBSERVADORES DE ESTADO

CONCEPTO

TIPOS

1. OBSERVADOR DE ORDEN COMPLETO

DISEÑO DE OBSERVADORES DE ORDEN COMPLETO

1.1. METODO DE DISEÑO ABREVIADO

1.2. METODO DE DISEÑO POR LA FORMULA DE ACKERMAN

1.3. METODO DE DISEÑO COMPLETO

1.4. DISEÑO MEDIANTE EL SOFTWARE MATLAB

2. OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO

2.1. DISEÑO DE OBSERVADORES DE ORDEN REDUCIDO

2.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO

3. OBSERVADOR PARA SISTEMAS MIMO

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS DE INTERNET

CONCEPTO:

Los observadores de estado, son herramientas virtuales, que permiten estimar las variables o estados de un sistema en base a mediciones de las señales de salida y señales de control. Estos observadores permiten enviar información estimada acerca del valor que toman dichos estados, permitiendo conocer un aproximado del valor real, además cuentan con muy poco margen de diferencia o error.

Se le considera una herramienta virtual, puesto que se desarrolla como software o programa dentro de una computadora.

TIPOS:

Existen 2 tipos de observadores: observadores de orden completo, y observadores de orden reducido u orden mínimo.

- Los observadores de orden Completo, son aquellos utilizados para observar o estimar todos los estados de un sistema.
- Los observadores de orden Reducido, son aquellos utilizados para observar o estimar solo algunos estados de un sistema.

1. OBSERVADOR DE ORDEN COMPLETO

Dado el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Dx$$

donde:

x Vector de estado ($n \times 1$)

u Señal de control (escalar)

y Señal de salida (escalar)

A Matriz ($n \times n$)

B Matriz ($n \times 1$)

C Matriz ($1 \times n$)

D Matriz (escalar)

Se puede estimar sus estados mediante la siguiente expresión:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \bar{y})$$

donde:

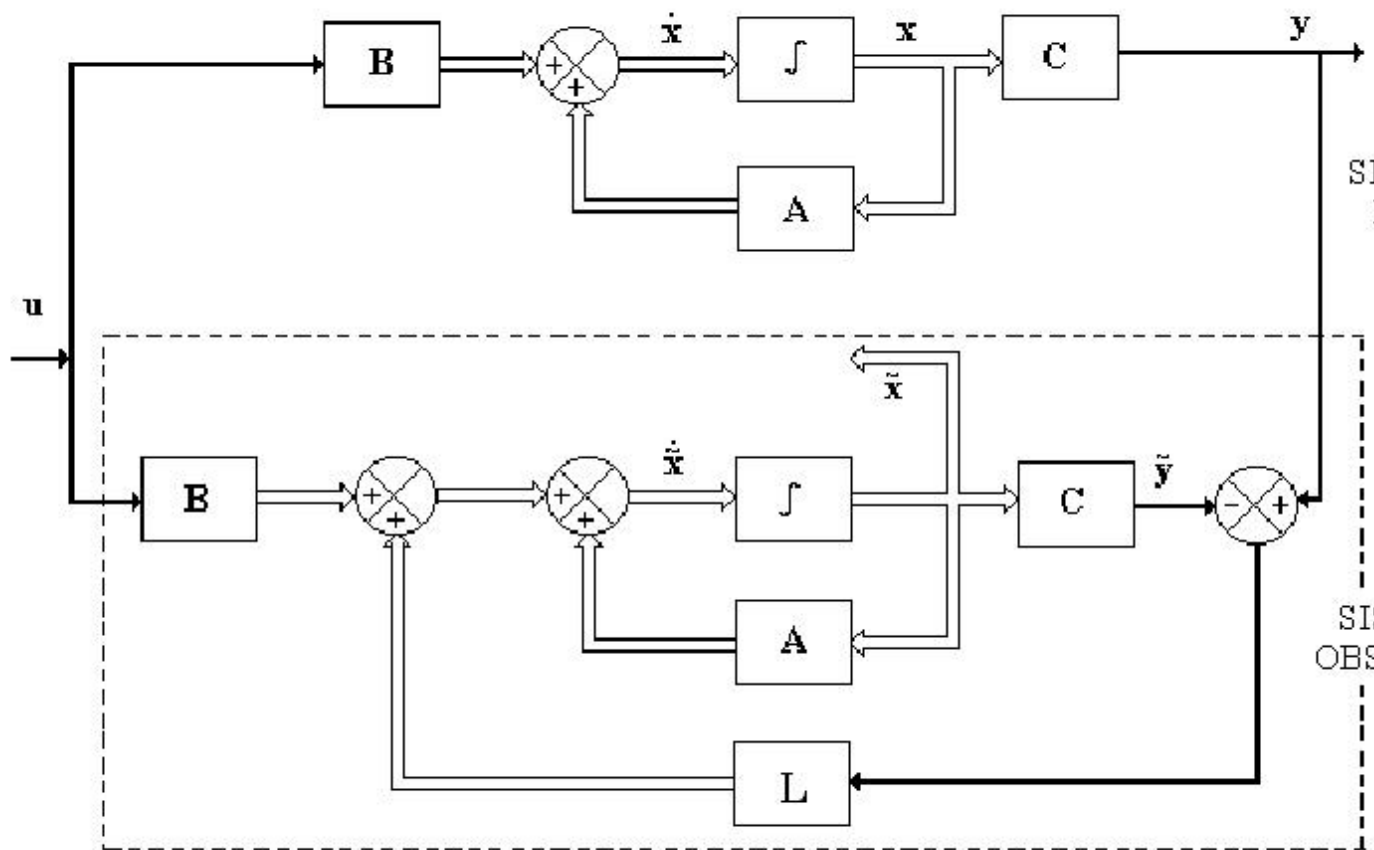
L Vector de ganancias que permiten la observación de estados ($1 \times n$)

$\hat{x}$

Vector de estados estimados

$\bar{y}$

Salida estimada



Debe notarse que las matrices A, B, C, D son las mismas tanto para un sistema real como para el sistema estimado. Para los cálculos siguientes se asume que el valor de D es cero.

La diferencia existente entre x y $\bar{x}$ se denomina error de observación, y el término $L(y - \bar{y})$ se denomina factor de corrección.

Para determinar el error de observación restamos $x - \bar{x}$, así tenemos:

$$x - \bar{x} = (Ax + Bu) - (A\bar{x} + Bu + L(y - \bar{y}))$$

$$x - \bar{x} = Ax - A\bar{x} - L(y - \bar{y})$$

$$x - \bar{x} = A(x - \bar{x}) - L(Cx - C\bar{x})$$

$$x - \bar{x} = A(x - \bar{x}) - LC(x - \bar{x})$$

$$x - \bar{x} = (A - LC)(x - \bar{x})$$

Si se sabe que el error está definido como la diferencia entre el estado real y el estado estimado, entonces se tendrá:

$$e = x - \bar{x}$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\bar{x}}$$

$$\dot{e} = (A - LC) e$$

A partir de esta expresión se puede conocer el comportamiento dinámico y la estabilidad del sistema, si la matriz $|A-LC|$ es estable, entonces el observador hará bien su trabajo, y dada cualquier condición inicial, el sistema tenderá a un error cero.

La elección de correctos valores para el vector de observabilidad L , permitirá que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y lo suficientemente rápido para tender a un valor de cero.

La estabilidad asintótica y la velocidad de respuesta de la dinámica del error se determina mediante los autovalores de la matriz $|A-LC|$, dados por el polinomio característico $|sI-A+LC|$.

Existe una condición necesaria, la cual consiste en que el sistema obtenido sea estable y completamente controlable y observable.

Ejemplo:

Determinar la ecuación característica del sistema siguiente, si se le agrega un observador de estados L .

Solución.

Si el sistema es de orden 2, es de suponer que el observador también será de orden 2, y lo podemos definir como

Luego el polinomio característico estará dado por:

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 2 + L_1 \\ -1 & s + 4 + L_2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = s(s + 4 + L_2) + (2 + L_1)$$

$$[sI - A + LC] = s^2 + (4 + L_2)s + (2 + L_1)$$

DISEÑO DE OBSERVADORES DE ORDEN COMPLETO

1.1. METODO DE DISEÑO ABREVIADO

Analizando la respuesta del ejemplo anterior nos podemos dar cuenta que los valores que toman L_1 y L_2 están condicionadas por las raíces del polinomio, las cuales a su vez están condicionadas por las características con que queremos que cuente el sistema, por tanto se puede elegir raíces de tal modo de poder controlar la respuesta del sistema en lazo cerrado.

Por lo tanto podemos asumir valores para dichas raíces, a los que llamaremos γ y δ de modo tal que el polinomio tenga una respuesta estable. Luego por simple equivalencia de términos podemos hallar el valor de las incógnitas.

Ejemplo:

Dado el polinomio característico del ejemplo anterior: $s^2 + (4+L_2)s + (2+L_1)$, encontrar el valor de L_1 y L_2 si se quiere que los polos deseados del sistema se ubiquen en -4 y -3 .

Solución.

Las raíces del polinomio son $s = -4$ y $s = -3$

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 4)(s + 3) = s^2 + 7s + 12$$

Luego por equivalencia $|sI - A + LC| = s^2 + 7s + 12$

Es decir, $s^2 + (4 + L_2)s + (2 + L_1) = s^2 + 7s + 12$

$$s^2 = s^2$$

$$\text{donde } (4 + L_2)s = 7s \quad L_2 = 3$$

$$(2 + L_1) = 12 \quad L_1 = 10$$

Podemos generalizar la metodología seguida anteriormente, de la siguiente manera:

Si tenemos que $[\mu_1 \dots \mu_n]$ son los autovalores deseados para la matriz del observador $|A - LC|$, estos conforman el polinomio característico:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n)$$

Este polinomio se iguala al polinomio característico original $|sI - A + LC|$, creándose una equivalencia entre términos:

$$|sI - A + LC| = (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n)$$

Resolviendo la equivalencia se podrá encontrar el valor del vector L .

NOTA: Este método está restringido a sistemas de hasta 3er orden, además el sistema debe estar en la forma canónica observable.

Es aconsejable que los polos del observador sean de 3 a 5 veces mayores (más negativos) que los polos del controlador por realimentación de estados, pero sin salirse de la región de estabilidad dada por el lugar geométrico de las raíces. La elección de los polos deseados van a determinar las características de la respuesta obtenida, por lo que puede existir un conjunto infinito de vectores L como solución, de las cuales solo un limitado número de soluciones cumplen con las necesidades requeridas para el sistema (como por ejemplo: sobreimpulso, velocidad de respuesta, etc. del sistema estimado), por lo que se aconseja probar, mediante simulación, la respuesta del sistema a diferentes valores de polos escogidos.

1.2. METODO DE DISEÑO POR LA FORMULA DE ACKERMAN

La formula de Ackerman aplicada al diseño de observadores de estado, está dada por:

$$L = \Phi(A) \begin{pmatrix} C & -1 & 0 \\ CA & 0 & \\ M & M & \\ CA^{n-1} & 1 & \end{pmatrix}$$

En donde $\Phi(A)$

es equivalente a $\Phi(s)$

, que es el polinomio característico deseado, pero en vez de la s se coloca la matriz A.

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en $-3+j$ y $-3-j$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1]x$$

Solución.

$$\text{Si } (s) = (s - (-3+j)) (s - (-3-j)) = (s+3-j)(s+3+j) = s^2 + 6s + 10$$

$$\text{por lo tanto } (A) = A^2 + 6A + 10I$$

$$L = (A^2 + 6A + 10I) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.3. METODO DE DISEÑO COMPLETO

1º) Determinar la controlabilidad del sistema y la observabilidad

Controlabilidad:

Observabilidad:

2º) Calcular el polinomio característico original $|sI-A|$, el cual será :

$$|sI-A| = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

3°) Es conveniente trabajar con las ecuaciones de estado en su forma canónica observable, si no se encuentra en esta forma, se debe determinar una matriz de transformación para llevarla a esta forma, la cual se define como:

$$Q = (W \times W_o)^{-1}$$

En donde W_o es la matriz de observabilidad, y W se define como:

En donde $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-3}$, son los coeficientes del polinomio característico original $|sI - A|$.

4°) Se determina el polinomio característico deseado a partir de $(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)$, donde p_i es un polo deseado, obteniéndose:

$$s^n + b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_{n-1}s + b_n$$

5°) Finalmente el vector L se encuentra a partir de la siguiente expresión: (*)

$$L = Q \begin{bmatrix} b_n - a_n \\ b_{n-1} - a_{n-1} \\ b_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L , si se quiere que los polos deseados se ubiquen en $-5, -2+j$ y $-2-j$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0]x \end{aligned}$$

Solución.

1°)

Controlabilidad	Observabilidad
$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$	$W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
rank(W_c) = 3	rank(W_o) = 3
det(W_c) = -1	det(W_o) = 1

$\therefore$ El sistema es controlable	$\therefore$ El sistema es observable
---	--

2°)

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3°) $Q = (W \times W_0)^{-1}$

4°)

$$(s -) (s -) (s -)$$

$$= (s + 5) (s + 2 + j) (s + 2 - j)$$

$$= (s + 5) (s^2 + 4s + 5)$$

$$= s^3 + 9s^2 + 25s + 25 = s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3$$

$$b_1 = 9 \quad b_2 = 25 \quad b_3 = 25$$

5°)

$$L = Q \begin{bmatrix} b_3 - a_3 & 0 & 0 & 1 & 23 \\ b_2 - a_2 & 0 & 1 & -2 & 24 \\ b_1 - a_1 & 1 & -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 7 \\ L_2 & 10 \\ L_3 & -4 \end{bmatrix}$$

1.4. DISEÑO MEDIANTE EL SOFTWARE MATLAB

Se puede hacer uso del software Matlab, para lo cual se emplea el comando acker o el comando place.

Dado el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx + Dx$$

, y un vector de polos deseados: $P = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n]$

Se puede obtener un observador de estados utilizando:

$$L = \text{place}(A', B', P) \text{ o también}$$

$$L = \text{acker}(A', B', P)$$

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L , si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -2 , $-1+j$ y $-1-j$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Solución.

```
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -3 -2 -1];
```

```
>> C = [2 0 0];
```

```
>> P = [-2 -1+j -1-j];
```

```
>> L = acker(A',C',P)'
```

L =

1.5000

0.5000

-3.0000

```
>> L = place(A',C',P)'
```

L =

1.5000

0.5000

-3.0000

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar el vector de observadores de estados L aplicando los 4 métodos antes descritos, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -2 , $-3+0.5j$ y $-3-0.5j$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Solución.

1º) METODO COMPLETO

Controlabilidad	Observabilidad
$W_c = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$	$W_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$
rank(W_c) = 3	rank(W_o) = 3
det(W_c) = 16	det(W_o) = -1
∴	∴
El sistema es controlable	El sistema es observable

Polinomio característico original

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & s & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 \\ -1 & s & 1 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = s(s^2 + 2s + 1) + 4$$

$$[sI - A] = s^3 + 2s^2 + s + 4$$

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 4$$

$$s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$$

$$Q = (W \times W_o)^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \times W_o = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$$(s -) (s -) (s -)$$

$$= (s + 2) (s + 3 + 0.5j) (s + 3 - 0.5j)$$

$$= (s + 2) (s^2 + 6s + 9.25)$$

$$= s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5 = s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3$$

$$b_1 = 8 \quad b_2 = 21.25 \quad b_3 = 18.5$$

Vector Observador

$$L = Q \begin{bmatrix} b_3 - a_3 & 1 & 0 & 0 & 14.5 \\ b_2 - a_2 & 0 & 1 & 0 & 20.25 \\ b_1 - a_1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & 14.5 \\ L_2 & 20.25 \\ L_3 & 6 \end{bmatrix}$$

2º) METODO ABREVIADO

$$[sI - A + LC] = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & s & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A + LC] = \begin{bmatrix} s & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s+2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

Polinomio deseado

$$\text{Luego por equivalencia } s^3 + (L_3)s^2 + (1 + L_2)s + (4 + L_1) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$$

$$(2+L_3)s^2 = 8s^2 \quad L_3 = 6$$

$$\text{donde } (1 + L_2)s = 21.25s \quad L_2 = 20.25$$

$$(4 + L_1) = 18.5 \quad L_1 = 14.5$$

3º) METODO POR FORMULA DE ACKERMAN

$$\text{Si } (s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) = s^3 + 8s^2 + 21.25s + 18.5$$

por lo tanto $(A) = A^3 + 8A^2 + 21.25A + 18.5I$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & +8 & 1 & 0 & -1 & +21.25 & 1 & 0 & -1 & +18.5 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 14.5 & -24 & -33 & 1 \\ 20.25 & 8.5 & 32.25 & 0 \\ 6 & 8.25 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 14.5 \\ L_2 & 20.25 \\ L_3 & 6 \end{pmatrix}$$

4°) USANDO MATLAB

```
>> A = [0 0 -4; 1 0 -1; 0 1 -2];
```

```
>> C = [0 0 1];
```

```
>> P = [-2 -3+0.5j -3-0.5j];
```

```
>> L = acker(A',C',P)'
```

```
L =
```

```
14.5000
```

```
20.2500
```

```
6.0000
```

```
>> L = place(A',C',P)'
```

```
L =
```

```
14.5000
```

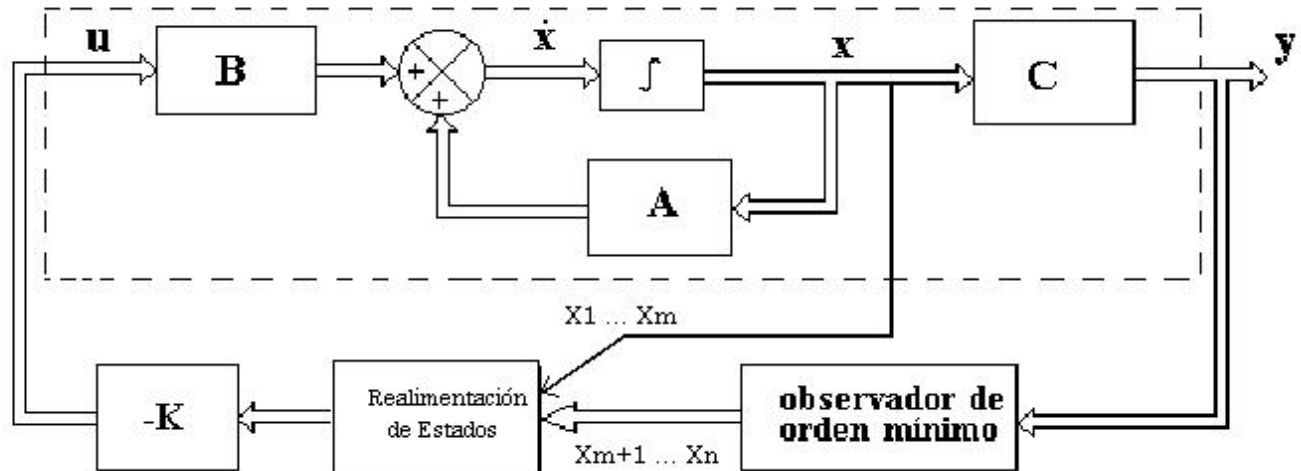
```
20.2500
```

```
6.0000
```

2. OBSERVADOR DE ORDEN REDUCIDO

En la práctica no todas las variables necesitan ser observadas, habrá algunas que se podrán medir directamente y con buena precisión, por tanto no será necesario un observador que estime todos los estados, sino más bien solo algunos de ellos.

Si se cuenta con un vector de estados X de dimensión $(n \times 1)$ del cual m estados pueden ser medibles, se tendrá que el orden del observador será $(n-m \times 1)$.



El vector X puede ser dividido en 2 vectores:

- X_a que corresponde a los estados medidos, de orden $(m \times 1)$
- X_b que corresponde a los estados observados, de orden $(n-m \times 1)$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \\ X_{m+1} \\ X_{m+2} \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$X_1 \dots X_m$ Estados conocidos o medibles

$X_{m+1} \dots X_n$ Estados no conocidos que requieren ser observados

Obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_a \\ \dot{X}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} C_a & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix}$$

Las dimensiones de las sub-matrices son:

A_{aa} $m \times m$

A_{ab} $m \times n-m$

A_{ba} $n-m \times m$

A_{bb} $n-m \times n-m$

B_a $m \times 1$

B_b $n-m \times 1$

C_a $1 \times m$

C_b $1 \times n-m$

El sistema queda reducido a la siguiente expresión:

$$\dot{\bar{X}}_a = A_{aa} \bar{X}_a + A_{ab} \bar{X}_b + B_a u$$

$$\dot{\bar{X}}_b = A_{ba} \bar{X}_a + A_{bb} \bar{X}_b + B_b u$$

2.1. DISEÑO DE OBSERVADORES DE ORDEN REDUCIDO

En el diseño de observadores de orden completo, el sistema era descrito por

$$\dot{X} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Dx$$

En cambio para el diseño de observadores de orden reducido el sistema es descrito por

la Ecuación de Estado: $\dot{\bar{X}}_b = A_{ba} \bar{X}_a + A_{bb} \bar{X}_b + B_b u$

y por la Ecuación de Salida: $\bar{X}_a - A_{aa} \bar{X}_a - B_a u = A_{ab} \bar{X}_b$

De estos 2 sistemas se pueden establecer una serie de equivalencias:

Observador Orden Completo	Observador Orden Reducido
$\bar{X}$	$\bar{X}_b$
A	A_{ab}
$B u$	$A_{ba} \bar{X}_a + B_b u$
Y	$\bar{X}_a - A_{aa} \bar{X}_a - B_a u$
$\bar{Y}$	$A_{ab} \bar{X}_b$
C	A_{ab}

Cabe mencionar que se busca encontrar un vector de observadores L , de orden $(n-m \times 1)$

En el diseño de observadores de orden completo se determino la siguiente ecuación:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(y - \bar{y})$$

La cual puede llevarse a su correspondiente equivalencia para el caso de observadores de orden reducido, obteniéndose la siguiente representación: (*)

$$\dot{\bar{x}} = (Abb - L Aab) \bar{x} + Aba \bar{x}_a + Bb u + L (\bar{x}_a - Aaa \bar{x}_a - Ba u)$$

y la Ecuación del Error es: $\dot{e} = (Abb - L Aab) e$

La Ecuación Característica para el observador es la siguiente:

$$|sI - Abb + L.Aab| = s^i + a_1s^{i-1} + a_2s^{i-2} + \dots + a_{i-1}s + a_i = 0$$

donde i equivale al orden de L, es decir (n-m)

2.2. METODOLOGÍA DE DISEÑO

Se pueden aplicar los mismos métodos usados para hallar los observadores de orden completo, pero tenemos que hacer una variación la cual consiste en reemplazar los índices: en vez de considerar el índice n, se debe considerar el índice i. Por ejemplo si un sistema es de orden 4 y tiene un estado medible, entonces m=1, y por tanto el sistema observado será de orden 3 (n - m = 4 - 1 = 3 = i).

El otro cambio que hay que hacer es realizar una equivalencia entre las matrices, dada de la siguiente manera:

Aaa D

Aab C

Aba B

Abb A

Lo que resta por hacer, es aplicar la misma metodología que para los observadores de orden completo, considerando el nuevo orden del sistema (i) y las nuevas matrices del sistema (Abb, Aba, Aab, Aaa).

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, suponga que el estado X_1 se puede medir con precisión, diseñe el observador de orden reducido L aplicando los 4 métodos antes descritos, si se quiere que los polos deseados se ubiquen en $-3+0.5j$ y $-3-0.5j$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0] \bar{x} \end{aligned}$$

Solución.

Nuevo orden para el sistema observado: $3 - 1 = 2$

Nuevas matrices del sistema:

D Aaa

C Aab

B Aba

A Abb

$$Aaa = [0] \quad Aab = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Aba = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad Abb = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

1°) METODO COMPLETO

Controlabilidad	Observabilidad
$Wcr = \begin{bmatrix} Aba & Abb & Aba \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$	$Wor = \begin{bmatrix} Aab \\ Aab & Abb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
rank(Wc) = 2	rank(Wo) = 2
det(Wc) = -36	det(Wo) = 1
∴	∴
El sistema es controlable	El sistema es observable

Polinomio característico original

$$\begin{bmatrix} sI - A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - Abb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} sI - Abb \end{bmatrix} = s^2 + 6s + 11 \quad s^2 + a_1s + a_2$$

$$a_1 = 6 \quad a_2 = 11$$

$$Q = (W \times Wo)^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W \quad Wor = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$$(s -) (s -)$$

$$= (s + 2 + 3.4641j) (s + 2 - 3.4641j)$$

$$= s^2 + 4s + 16 = s^2 + b_1s + b_2$$

$$b_1 = 4 \quad b_2 = 16$$

Vector Observador

$$L = Q \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

2°) METODO ABREVIADO

$$[sI - A + LC] \quad [sI - Abb + L \quad Aab] = (s - \mu_1)(s - \mu_2)$$

..

$$[sI - Abb + L \quad Aab] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[sI - Abb + L \quad Aab] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 11 & s+6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[sI - Abb + L \quad Aab] = \begin{bmatrix} s + L_1 & -1 \\ 11 + L_2 & s + 6 \end{bmatrix}$$

$$[sI - Abb + L \quad Aab] = (s + L_1)(s + 6) + (11 + L_2)$$

$$[sI - Abb + L \quad Aab] = s^2 + (6 + L_1)s + (11 + L_2)$$

Polinomio deseado

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 4s + 16$$

Luego por equivalencia

$$6 + L_1 = 4 \quad L_1 = -2$$

$$6 L_1 + 11 + L_2 = 16 \quad L_2 = 17$$

3°) METODO POR FORMULA DE ACKERMAN

$$\text{Si } (s) = (s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + 4s + 16$$

por lo tanto $(A)^{-1} (Abb) = Abb^2 + 4Abb + 16I$

$$L = (Abb^2 + 4Abb + 16I) [Wor]^{-1} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$L = \begin{matrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{matrix}^2 + 4 \begin{matrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{matrix} + 16 \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}^{-1} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

$$L = \begin{matrix} 5 & -2 & 0 \\ 22 & 17 & 1 \end{matrix}$$

$$L = \begin{matrix} L_1 & -2 \\ L_2 & 17 \end{matrix}$$

4°) USANDO MATLAB

```
>> Aaa = [0];
```

```
>> Aab = [1 0];
```

```
>> Aab = [0; -6];
```

```
>> Abb = [0 1; -11 -6];
```

```
>> P = [-2 + 3.4641j -2-3.4641j];
```

```
>> L = acker(Abb', Aab',P)'
```

```
L =
```

```
-2
```

```
17
```

```
>> L = place(Abb', Aab',P)'
```

```
L =
```

```
-2
```

```
17
```

3. OBSERVADOR PARA SISTEMAS MIMO

Hasta el momento hemos visto el diseño de observadores para sistemas SISO (single input, single output), es decir, sistemas que tienen una entrada y una salida. A continuación vamos a estudiar el diseño de observadores para el caso de sistemas con varias entradas y varias salidas, llamados sistemas MIMO (multiple input, multiple output).

Un sistema MIMO puede ser descrito de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax + B[u]_{1 \times r}$$

$$y = [C]_{q \times n} x + D[u]_{q \times r}$$

donde:

x Vector de estado ($n \times 1$)

u Señal de control ($1 \times r$)

y Señal de salida (escalar)

A Matriz ($n \times n$)

B Matriz ($n \times r$)

C Matriz ($q \times n$)

D Matriz ($q \times r$)

n Es el orden del sistema (numero de estados)

r Es el número de entradas

q Es el número de salidas

En el diseño de observadores, se sabe que el número de entradas que tenga el sistema, no afectará el diseño del observador, puesto que estos datos no intervienen en los cálculos.

En cambio, el número de salidas con que cuente el sistema si afecta el diseño del observador. En este caso se aplica el Principio de Separabilidad Lineal, el cual consiste en separar las salidas y trabajarlas como si fueran provenientes de sistemas distintos.

Ejemplo:

Si se tiene la siguiente matriz C (matriz de salidas) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Esta se podrá descomponer bajo el Principio de Separabilidad Lineal, en dos sub-matrices:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad C_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Para cada una de estas nuevas matrices se requerirá un observador independiente: L_1 y L_2 , cuyo orden será de ($n \times 1$), en este caso será de (3×1) c/u. Así mismo cada observador requiere de polos deseados, los cuales pueden ser independientes o también comunes, siempre que cumplan con dar estabilidad al sistema y dependiendo de las condiciones de respuesta que se desee obtener al estimar cada salida.

Ejemplo:

Para el siguiente sistema, determinar la matriz de observadores de estados L , si se quiere que los polos deseados se ubiquen en -1 y -2 para la primera salida, y $-1-j$, y $-1+j$ para la segunda salida.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Solución:

$$C_1 = [1 \ 0] \quad C_2 = [0 \ 1]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{bmatrix} \quad L = [L_1 \ L_2] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$$

METODO COMPLETO

Controlabilidad $W_c = [B \ A \ B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ rank(Wc) = 2 det(Wc) = -1 ∴ El sistema es controlable	Observabilidad $W_{o_1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ rank(Wo) = 2 det(Wo) = 1 ∴ El sistema es observable $W_{o_2} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ rank(Wo) = 2 det(Wo) = 5 ∴ El sistema es observable
--	---

Polinomio característico original

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = s^2 + 5s + 5 \quad s^2 + a_1s + a_2$$

$$a_1 = 5 \quad a_2 = 5$$

DISEÑO DEL PRIMER OBSERVADOR (L1)

$$Q = (W \times W_{o1})^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W W_{O_1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$$(s -) (s -)$$

$$= (s + 1) (s + 2)$$

$$= s^2 + 3s + 2 = s^2 + b_1s + b_2$$

$$b_1 = 3 \quad b_2 = 2$$

Vector Observador

$$L_1 = Q \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

DISEÑO DEL SEGUNDO OBSERVADOR (L2)

$$Q = (W \times W_{O_2})^{-1}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W W_{O_2} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico deseado

$$(s -) (s -)$$

$$= (s + 1+j) (s + 1-j)$$

$$= s^2 + 4s + 5 \quad s^2 + b_1s + b_2$$

$$b_1 = 2 \quad b_2 = 2$$

Vector Observador

$$L_2 = Q \begin{bmatrix} b_2 - a_2 & -0.2 & 0 & -3 \\ b_1 - a_1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} L_{21} & 0.6 \\ L_{22} & -3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0.6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Se puede obtener los mismos resultados usando Matlab:

```
>> A = [0 1; -5 -5];
```

```
>> B = [0; 1];
```

```
>> C = [1 0; 0 1];
```

```
>> C1 = C(1,:);
```

```
>> C2 = C(2,:);
```

```
>> P1 = [-1 -2];
```

```
>> P2 = [-1+j -1-j]
```

```
>> L1 = acker(A',C1',P1)'
```

```
L1 =
```

```
-2.0000
```

```
7.0000
```

```
>> L2 = acker(A',C2',P2)'
```

```
L2 =
```

```
0.6000
```

```
-3.0000
```

```
>> L = [L1 L2];
```

```
L =
```

-2.0000 0.6000

7.0000 -3.0000

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- *Chi – Tsong Chen*

Linear System. Theory and Design

Oxford University Press. 3ra Edición. USA. 1998

- *Katsuhiko Ogata*

Ingeniería de Control Moderna

Prentice Hall. 3ra Edición. México. 1998

- *Michael O'Flynn*

Linear Systems. Time Domain and Transform Analysis

Wiley. Singapore. 1987

- *Donald M. Wiberg*

Espacio de Estado y Sistemas Lineales

Mc.Graw-Hill. México. 1971

- *MathWorks Inc*

MATLAB User's Guide, Toolbox deCcontrol.

Versión 5.3. USA. 1998.

- *Apuntes de clases de Teoría de Sistemas Lineales.*

Maestría en Ingeniería de Control y Automatización

Pontificia Universidad Católica del Perú

REFERENCIAS DE INTERNET

- <http://www.manufacturing.net/>
- <http://www.prodigyweb.net.mx/saucedo8/>
- <http://www.fiobera.unam.edu.ar/Materias/ControlDigital/home.text.html>

(*) La deducción de esta expresión puede encontrarse en el libro Ingeniería de Control Moderna, Katsuhiko Ogata, 3ra Edición, Cap.12, Pág. 817–820.

(*) La deducción de esta expresión puede encontrarse en el libro Ingeniería de Control Moderna, Katsuhiko

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \\ X_{m+1} \\ X_{m+2} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$