

Análisis Matemático I

Números Reales:

Cotas: $A = (a; b)$ k es cota superior de A ! " x " A , x " k

q es cota inferior de A ! " x " A , x " q

Conjunto Mayorante: Conjunto de todas las cotas superiores $MA = [b; +\infty)$

Conjunto Minorante: Conjunto de todas las cotas inferiores $mA = (-\infty; a]$

Supremo: La menor de las cotas superiores $SA = \{b\}$ si b " A ! b es MÁXIMO

Ínfimo: La mayor de las cotas inferiores $IA = \{a\}$ si a " A ! a es MINIMO

Función Par: $f(-x) = f(x)$

Función Impar: $f(-x) = -f(x)$

Función Inyectiva: " x_1 " Df , " x_2 " Df : x_1 " x_2 ! $f(x_1)$ " $f(x_2)$

Función Sobreyectiva: $f: A \rightarrow B$! $If = B$

Función Biyectiva: Si es INYECTIVA y SOBREYECTIVA

Composición de funciones: $g \circ f(x) = g[f(x)]$

Función Signo: $h(x) = |f(x)| / f(x)$

Logaritmo: $\log_a x = y$! $ay = x$

Cambio de base de a a b : $\log_b x = \log_a x / \log_a b$

Límite:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$! " $\epsilon > 0$ " " $(\delta > 0)$ / " x : (x " Df " $|x-a| < \delta$! $|f(x) - L| < \epsilon$)

$x \rightarrow a$

Ley del Sándwich: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$x \rightarrow a$ " $h(x) / f(x)$ " $h(x)$ " $g(x)$! $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$! $x \rightarrow a$

$x \rightarrow a$

Asíntota Vertical: $x = a$! $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ " Df

$x \neq a$

Asíntota Horizontal: $y = L \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ f(x) cociente de polinomio de igual grado

$x \neq \infty$

Asíntota Oblicua: $y = mx + b \neq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = b$

$x \neq \infty$ $x \neq \infty$

Discontinuidad:

- Discontinuidad esencial de 1ª especie con salto infinito: es cuando los límites laterales con x tendiendo a a dan $+\infty$ y $-\infty$. Siempre es asíntota vertical en $x = a$.
- Discontinuidad esencial de 1ª especie con salto finito $= d$: es cuando los límites laterales con x tendiendo a a dan b y c . $d = b - c$.
- Discontinuidad esencial de 2ª especie: no existe uno de los límites laterales.
- Discontinuidad evitable: los límites laterales dan iguales con $x \neq a$ pero a ∞ Df. Es cuando a es simultáneamente raíz del numerador y del denominador.

Teorema de Bolzano: f continua en $[a; b]$ $\neq \text{sg } f(a) \neq \text{sg } f(b) \neq f(a) > 0 \neq f(b) > 0$

$\neq \text{sg } f(a) \neq \text{sg } f(b) \neq f(a) < 0 \neq f(b) < 0$

Teorema del Valor Medio: f continua en $[a; b]$ $\neq f(a) \neq f(b) \neq f(a) < k < f(b)$

$\neq \text{sg } f(a) \neq \text{sg } f(b) \neq f(a) < k < f(b)$

Derivadas:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$x \neq x_0 \quad x \neq x_0 \quad x \neq x_0$$

Derivada de la función compuesta: $y = f[g(x)] \neq y' = f'[g(x)]g'(x)$

Ecuación de la recta tangente: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Ecuación de la recta normal: $y = -1/f'(a)(x - a) + f(a)$

Derivada de la función inversa: $f^{-1}[f(x)] = 1/f'(x)$

Crecimiento y decrecimiento: Si $f'(x) < 0 \neq f$ decrece

Si $f'(x) > 0 \neq f$ crece

Teorema del Valor Medio (Rolle):

H) f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$

T) $\text{sg } f'(c) \neq \text{sg } f'(c) \neq f'(c) = 0$

(Lagrange):

H) f continua en [a, b], derivable en (a, b)

$$T) \exists c \in (a, b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$b - a$$

(Cauchy): H) f y g continuas en [a, b] y derivable en (a, b) y $g'(x) \neq 0$

$$T) \exists c \in (a, b) / \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$g(b) - g(a) \neq 0$$

L'Hopital:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ (lo mismo para } \infty \text{)}$$

$$0/0 \text{ o } \infty/\infty \text{ o } \frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty} \text{ o } \frac{0}{\infty} \text{ o } \frac{\infty}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{f'(x) - g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } f(x) = k/f(x)$$

$$x \rightarrow a \text{ o } x \rightarrow \infty \text{ o } x \rightarrow -\infty$$

$$0 \cdot \infty \text{ o } \infty \cdot 0 \text{ o } \frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty} \text{ o } \frac{0}{\infty} \text{ o } \frac{\infty}{0}$$

$$x \rightarrow a \text{ o } x \rightarrow \infty \text{ o } x \rightarrow -\infty$$

$$1^\circ, 0^\circ, \infty^\circ \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{1/f(x)} = k = \ln L \text{ si } L = e^k$$

$$x \rightarrow a \text{ o } x \rightarrow \infty \text{ o } x \rightarrow -\infty$$

Extremos: 1) $f'(x_0) = 0$ (posible extremo)

2) f crece a la iz. y decrece a la d. ! es MÁXIMO ! $f''(x_0) < 0$

f decrece a la iz. y crece a la d. ! es MINIMO ! $f''(x_0) > 0$

Concavidad: 1) $f''(h) = 0$ 2) Debe cambiar de signo

Si $f''(a) > 0$! cóncava !

Si $f''(b) < 0$! cóncava !

Integral:

Integración por partes: $\int u dv = u.v - \int v du$

Integral definida: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ $M(b-a) \leq f(x) \leq M$ $M = f(b)$

#a

Teorema del Valor Medio:

f continua en $[a, b]$! " c " $(a, b) / f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

$b - a \neq 0$

Sucesiones:

Si una sucesión tiene un límite finito ! la sucesión **converge**

Si una sucesión converge ! es una sucesión **acotada**

Si una sucesión no tiene límite finito ! la sucesión es **divergente**

Si una sucesión es de la forma $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, \dots\}$! es **oscilante**

Criterio de D'Alembert:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L$	$L < 1$ es convergente en 0	
		$L = 1$? no dice nada
		$L > 1$ es divergente

Criterio de Cauchy:

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k(a_n) = L$	$L < 1$ es convergente en 0	
		$L = 1$? no dice nada
		$L > 1$ es divergente

Con

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = 1$	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a = 1$
$n! + \infty$	$n! + \infty$

Series:

Armonica: $1/n^k$ converge si $k > 1$

Geométrica: $S_n = a/(1-r) - ar^n/(1-r)$ converge si $|r| < 1$

Criterio de Leibnitz:

Si $|a_{n-1}| > |a_n|$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$! converge

$n! + \infty$

Si " $|a_n|$ es convergente ! " $(-1)^n a_n$ es absolutamente convergente

Si " $|a_n|$ es divergente ! " $(-1)^n a_n$ es condicionalmente convergente

Criterio de D'Alembert:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_n}{a_{n-1}} \right = L$	$L < 1$ es absolutamente convergente	
		$L = 1$? no dice nada
		$L > 1$ es divergente

Criterio de Raabe:

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left 1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} \right = L$	$L > 1$ es convergente	
		$L \leq 1$ es divergente

Polinomio de Taylor:

"

" $f_n(x - a)$ n a = al numero que busco

$n=0$ $n!$

McLaurin "

" $f_n(x)$ n el numero que busco es el 0

$n=0$ $n!$

Termino Complementario: $\frac{f_{n+1}(a + h)}{(n+1)!} h^{n+1}$ $0 < h < 1$ y $h = x - a$

$(n + 1)!$