

## **METODO GRAFICO**

### **PRESENTACION**

Algunas veces, en las primeras clases del curso de Investigación de Operaciones nos llevamos solo por el deseo de realizar un modelo matemático que trate de reflejar la realidad a través de una Función Objetivo y algunas restricciones, pero como las ganas de seguir aprendiendo hace que surjan nuevas preguntas. Un buen día interrogamos a nuestro profesor acerca de la solución que debe tener todo modelo, él como siempre sonriente y con una expresión de misterio nos dijo: Creo que ya es el momento de que tengan algunas respuestas a algunos modelos que han podido resolver en sus primeras clases, felices por este anuncio es que nos propusimos a poner atención a sus palabras y sacar el mejor provecho a los conocimientos de nuestro profesor, que sin saberlo se volvía cada vez mas respetado por nosotros.

Claro que yo no me perdí ninguna clase acerca de gráficas, pero como siempre llegó el día del examen, llegue temprano, confiado me senté adelante y cuando el profesor empezó a dictar las preguntas acerca de gráficas yo con voz baja decía: esta vez me lo hago todo el examen, !pero que sorpresas tiene la vida! ninguna de las gráficas dictadas se parecían a las que resolvimos en clase, que se va hacer, otra vez aquel personaje noble, sereno y casi enigmático volvía a ganar.

Entendí el mensaje, se tiene que investigar y como te lo dije en el primer libro, aún sigo investigando y todavía me encuentro con algunas cosas que parecieran fáciles a primera vista pero que necesitan algún desarrollo especial.

Es por eso que ahora, en este segundo libro quiero darte a conocer como solucionar gráficamente los modelos matemáticos que se elaboran en un modelo de programación lineal, será necesario primero hacer una introducción de como realizar las gráficas, dar a conocer los diferentes tipos de gráficos, los casos especiales que podemos encontrar y además ingresar a explicar los resultados a los modelos graficados.

Como vez, tenemos una gran aventura que realizar, espero que me acompañes y que este libro te sea de mucha utilidad para que afiances mas tus conocimientos en cuanto a la Investigación de Operaciones.

No quisiera dejar de aprovechar la oportunidad para rendir el merecido reconocimiento y agradecimiento a mis amigas y amigos de las diferentes universidades de la ciudad de Trujillo que a través de todos estos años me han dado la oportunidad de ser participe de sus esperanzas y sueños en su camino a ser profesional y poder estar juntos en nuestras charlas de estudio, Gracias por su confianza

## **CAPITULO I**

### **COMO GRAFICAR**

#### **1.- METODO GRAFICO**

Indudablemente plasmar un modelo y tratar de resolverlo gráficamente tiene una limitación muy grande, sólo se pueden resolver modelos que tengan sólo dos variables( bidimensional ) ya que contamos con un plano formado por  $X_1$  y  $X_2$  que es la región en la cuál vamos a trabajar, se podría tener la posibilidad de trabajar con modelos que tienen tres dimensiones pero ser—>[Author:SJV]ía muy tedioso ( sin embargo en la parte final de este libro realizaremos algunos ejemplos para resolver estos tipos de modelos).

Vamos entonces a desarrollar modelos relativamente pequeños pero que sean provechosos para cumplir con los objetivos que deseamos alcanzar, los cuales son familiarizarnos con una representación geométrica de un

modelo lineal y llegar a tener algunas respuestas importantes a algunas interrogantes que nos vamos a plantear a través del desarrollo del tema.

## **2.- PASOS PARA RESOLVER MODELOS DE PROGRAMACION LINEAL MEDIANTE GRAFICAS**

Se va a tener que llevar un orden para poder resolver un modelo, supongamos que tenemos el siguiente problema planteado:

### **Ejemplo 1.-**

$$\text{Maximizar} = 4x_1 + 9x_2$$

sujeto a:

$$5x_1 + 8x_2 \leq 50$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$8x_1 - 5x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Los pasos que tenemos que seguir son los siguientes:

### **1.- TODA RESTRICCIÓN DEBE CONVERTIRSE A IGUALDAD, SEA CUAL SEA SU ORIENTACIÓN**

Aplicando este primer paso a nuestro ejemplo:

$$5x_1 + 8x_2 = 50$$

$$6x_1 + 5x_2 = 60$$

$$8x_1 + 5x_2 = 90$$

### **2.- SE DEBE DESPEJAR LAS VARIABLES EN CADA UNA DE LAS RESTRICCIONES, COLOCANDO A UNA DE LAS VARIABLES EL VALOR DE CERO Y DESPEJANDO LA OTRA.**

En nuestro ejemplo:

**Para la primera restricción:**

$$5x_1 + 8x_2 = 50$$

Si  $x_1 = 0$ , la restricción queda:

$$5(0) + 8x_2 = 50$$

$$\text{despejando } x_2 = 50/8$$

Entonces agrupando en par ordenado:  $(x_1, x_2) = (0, 50/8)$ ,

Luego si  $x_2=0$ , la restricción queda:

$$5x_1 + 8(0) = 50$$

despejando  $x_1 = 50/5$  Entonces agrupando en pares ordenados:  $(x_1, x_2) = (50/5, 0)$

**Para la segunda restricción:**

$$6x_1 + 5x_2 = 60$$

si  $x_1=0$ . La restricción queda:

$$6(0) + 5x_2 = 60$$

despejando  $x_2 = 60/5$

entonces agrupando en pares ordenados:  $(x_1, x_2) = (0, 60/5)$

Luego ,si  $x_2=0$ , la restricción queda

$$6x_1 + 5(0) = 60$$

despejando :  $x_1 = 60/6$

entonces agrupando en pares ordenados:  $(x_1, x_2) = (60/6, 0)$

**Para la tercera restricción:**

$$8x_1 + 5x_2 = 40$$

si  $x_1=0$  , la restricción queda:

$$8(0) + 5x_2 = 40$$

despejando:

$$x_2 = 40/5$$

entonces agrupando en pares ordenados:  $(x_1, x_2) = (0, 40/5)$

Luego, si  $x_2=0$ , la restricción queda:

$$8x_1 + 5(0) = 40$$

despejando:  $x_1 = 40/8$

entonces agrupando en pares ordenados:  $(x_1, x_2) = (40/8, 0)$

### **3.- REALIZAR LA GRÁFICA .**

Teniendo los pares ordenados podemos realizar la gráfica ya que por cada restricción tenemos dos puntos, los cuales al unirse nos darán las líneas rectas que son las representaciones geométricas de las restricciones.

$$(x_1, x_2) = (0, 50/8=6.25) , (x_1, x_2) = (50/5=10, 0)$$

$$(x_1, x_2) = (0, 60/5=12) , (x_1, x_2) = (60/6=10, 0)$$

$$(x_1, x_2) = (0, 40/5=8) , (x_1, x_2) = (40/8= 5, 0)$$

$x_2$  12

( II )

11

10

9

8 ( III )

7

6

5

( I )

4

3

2

1

$x_1$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

#### 4.- ORIENTACIÓN

La parte mas importante en la gráfica es la orientación, para este caso vamos a tomar en cuenta las siguientes condiciones generales de acuerdo a los tipos de restricciones que se tiene:

##### Restricción Orientación

$\leq$  Se acerca al origen

$=$  Se conserva la restricción como una línea

$\geq$  Se aleja del origen

Debemos aclarar que estas orientaciones sirven para restricciones que contengan las dos variables, lado

derecho positivo y con valores numéricos diferentes de cero( casos diferentes lo trataremos posteriormente) .

Entonces nuestra gráfica queda:

x2 12

( II )

11

10

9

8 ( III )

7

6

5

( I )

4

3

2

1

X1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

## 5.- UBICACIÓN DE LA REGIÓN FACTIBLE

Una vez dada la orientación a cada restricción es importante hallar una región donde todas las restricciones se cumplan, esta región se llama REGION FACTIBLE que no viene a ser sino el lugar donde se va a encontrar la solución a nuestro problema lineal planteado, es por eso que debemos tener mucha visión para ubicar esta región , es necesario aclarar que hay veces en que no se puede hallar una región factible .

Para nuestro ejemplo , la región factible esta dada por la región con bordes mas oscuros y limitado con las letras A, B , C y D.

Entonces nuestra gráfica queda:

X2

12

( II )

11

10

9

8 ( III )

7

**B**

6

**C**

5

( I )

4

3

2 REGION

1 FACTIBLE

X1

**A D**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Como vez, la región factible es aquella que en sus esquinas A,B,C,D tienen las posibilidades de ser el punto que solucione el modelo, a ese punto le llamaremos **PUNTO OPTIMO**.

## **6.- HALLAR EL PUNTO OPTIMO**

Una vez que se han identificado los puntos extremos, vamos a reemplazar las coordenadas de los puntos extremos en la Función Objetivo:

**Puntos Coordenadas MAX. F.O.  $4x_1 + 9x_2$**

$$\mathbf{A ( 0 , 0 ) } \quad 4(0) + 9(0) = 0$$

$$\mathbf{B ( 0 , 6 ) } \quad 4(0) + 9(6) = 54$$

$$\mathbf{*C ( 1.79488 , 5.1282 ) } \quad 4(1.79488) + 9( 5.1282 ) = 53.33332$$

$$D(5, 0) \quad 4(5) + 9(0) = 20$$

\*El punto C se halla por ecuaciones simultaneas de las rectas que dan origen a este punto, es decir las rectas I y II, calculando:

$$(I) \quad 5x_1 + 8x_2 = 50 \quad (-8)$$

$$(II) \quad 8x_1 - 5x_2 = 40 \quad (5)$$

$$-64x_2 + 25x_2 = -400 + 200$$

$$-39x_2 = -200$$

$$x_2 = 5.1282$$

Reemplazando en (I) :

$$5x_1 + 8(5.1282) = 50$$

Como la Función Objetivo es de maximización, entonces se comparan los resultados de reemplazar las coordenadas de los puntos extremos en la función objetivo y se elige el mayor, para este ejemplo:

54 es el mayor valor y entonces el punto B es el punto optimo.

## 7.- GRAFICA DE LA FUNCION OBJETIVO

Bueno pero ahora falta graficar la Función objetivo, procederemos de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar} = 4x_1 + 9x_2$$

Como podemos ver la función objetivo no tiene lado derecho, entonces nosotros lo vamos a crear multiplicando sus coeficientes, entonces queda así:

$$4x_1 + 9x_2 = (4)(9)$$

Ahora podemos tratar a la función Objetivo como lo hicimos con las restricciones:

$$4x_1 + 9x_2 = (4)(9)$$

Sí  $x_1=0$  entonces:

$$4(0) + 9x_2 = (4)(9)$$

despejando:

$$x_2 = 4(9)/9 \text{ entonces queda : } x_2=4 \text{ el par ordenado es: } (x_1, x_2) = (0, 4)$$

Luego :

$$4x_1 + 9x_2 = (4)(9)$$

$$\text{si } x_2=0 \text{ entonces: } 4x_1 + 9(0) = (4)(9)$$

$$x_1 = (4)(9)/4$$

queda:  $x_1 = 9$  el par ordenado es:  $(x_1, x_2) = (9, 0)$

La gráfica es:

X2

12

(II)

11

10

9

8 (III)

7

**B**

6

**C**

5

(I)

FUNCION 4

OBJETIVO

3

2 REGION

1 FACTIBLE

X1

**A D**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

## 8.- GRAFICAR LA FUNCION OBJETIVO EN EL PUNTO OPTIMO

Ahora, lo único que nos falta es trasladar la Función Objetivo(F.O.) al punto óptimo, entonces la F.O. se iguala al valor máximo, es decir 54:



$$4x_1 + 9x_2 = 54$$

despejando  $X_1$ :

$$4x_1 + 9(0) = 54$$

$x_1 = 13.5$  , las coordenadas queda : ( 13.5 , 0 )

despejando  $X_2$ :

$$4(0) + 9x_2 = 54$$

$x_2 = 6$  , las coordenadas queda: ( 0 , 6 )

Teniendo estos dos puntos, la gráfica final queda:

$X_2$

12

( II )

11

10

9

8 ( III )

7

**B**

6

**C**

5

( I )

4

3

F.O Ubicación Final

2 REGION

1 FACTIBLE

X1

**A D**

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

F.O. Ubicación Inicial

Como se puede apreciar la F.O. se ha trasladado hacia el punto optimo.

Entonces la respuesta es:

Rpta.

$x_1 = 0$  ,  $x_2 = 6$  . el valor de la F.O. es: 54

Como las variables son  $\geq$  que cero , entonces la gráfica queda en el primer cuadrante, pero nada impide que en algún momento se tenga regiones factibles en otros cuadrantes cuando se tengan variables irrestrictas( son aquellas que pueden tener valores positivos o negativos) eso va a suceder cuando experimentemos con otros ejemplos por el momento nos limitaremos al primer cuadrante.

Ahora vamos a graficar otro modelo:

### **EJEMPLO 2:**

**Minimizar  $8X_1 + 5X_2$**

**SUJETO A:**

$$5X_1 + 6X_2 \geq 30$$

$$3X_1 + 6X_2 \geq 18$$

$$2X_1 + 4X_2 \geq 8$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

**SOLUCION:**

$$( I ) 5x_1 + 6x_2 = 30$$

Si:  $X_1 = 0$  entonces  $X_2 = 5$ , la coordenada es : ( 0,5)

Si :  $X_2=0$  entonces  $X_1 = 6$  , la coordenada es : ( 6,0)

$$( II ) 3x_1 + 6x_2 = 18$$

Si :  $X_1=0$  entonces  $X_2= 3$  , la coordenada es : ( 0,3)

Si:  $X_2=0$  entonces  $X_1=6$ , la coordenada es: ( 6,0)

$$( III ) 2x_1 + 4x_2 = 8$$

Si  $X_1=0$  entonces:  $X_2=2$ , la coordenada es: ( 0,2)

Si  $X_2= 0$  entonces:  $X_1=4$ , la coordenada es: (4,0)

Como todas las restricciones son  $\geq$  ,entonces todas se alejan del origen,

Graficando:

$X_2$

7

6

5 A =(0,5)

4

3 ( I )

( II )

2

( III )

1

B=(6,0)

0 1 2 3 4 5 6 7  $X_1$

Buscando punto Optimo:

**PUNTOS COORDENADAS MIN.  $8X_1 + 5X_2$**

A ( 0, 5)  $8(0) + 5(5) = 25$

B ( 6,0 )  $8(6) + 5(0) =48$

Al comparar los puntos ,el punto mínimo es A con valor de 25.

Para culminar la gráfica, vamos a dibujar la F.O. en su ubicación inicial:

$8x_1 + 5x_2 = (8)(5)$

Si :  $X_1= 0$  entonces  $X_2=8$ , la coordenada es: ( 0,8)

Si  $X_2=0$  entonces  $X_1= 5$  , entonces la coordenada es: ( 5,0)

Ahora la F.O. se traslada al punto optimo:

$$8x_1 + 5x_2 = 25$$

Si  $x_1=0$  entonces:  $x_2=5$ , la coordenada es: (0,5)

Si  $x_2=0$  entonces:  $x_1= 3.125$ , la coordenada es: ( 3.125 , 0)

La gráfica final queda:

Graficando:

$x_2$

8

7

6

5 A =(0,5)

**4 REGION FACTIBLE**

3 ( I )

( II )

2

( III )

1

B=(6,0)

0 1 2 3 4 5 6 7  $x_1$

**F.O. Ubicación Inicial**

**F.O. Ubicación Final**

Como se puede observar la F.O. ha tenido que bajar en busca del punto óptimo.

Rpta.

$x_1= 0$  ,  $x_2= 5$  , el valor de la F.O. es 25

**Ejemplo 3:**

**Maximizar:  $3x_1 + 2x_2$**

**sujeto a:**

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16$$

$$4x_1 - 5x_2 \leq 20$$

$$6x_1 - 3x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

**Solución:**

$$(I) 2x_1 + 4x_2 = 16$$

Si:  $x_1=0$  entonces:  $x_2=4$ , la coordenada es:  $(0, 4)$

Si:  $x_2=0$  entonces:  $x_1=8$ , la coordenada es:  $(8, 0)$

$$(II) 4x_1 - 5x_2 = 20$$

Si:  $x_1=0$  entonces:  $x_2=-4$ , la coordenada es:  $(0, -4)$

Si:  $x_2=0$  entonces:  $x_1=5$ , la coordenada es:  $(5, 0)$

$$(III) 6x_1 - 3x_2 = 18$$

Si:  $x_1=0$  entonces  $x_2=-6$ , la coordenada es:  $(0, -6)$

Si:  $x_2=0$  entonces  $x_1=3$ , la coordenada es:  $(3, 0)$

Como todas las restricciones son  $\leq$ , entonces todas se acercan al origen.

Graficando:

$x_2$  (III)

4 A (I)

(II)

3

B

**2 REGION**

**1 FACTIBLE**

0 1 2 3 4 5 6 7 8  $x_1$

D C

-1

-2

-3

-4

-5

-6

Ahora vamos a hallar los puntos óptimos,

**PUNTOS OPTIMOS COORDENADAS F.O. MAX.  $3X_1 + 2X_2$**

$$A ( 0, 4 ) \quad 3(0) + 2(4) = 8$$

$$B * ( 4, 2 ) \quad 3(4) + 2(2) = 16$$

$$C ( 3, 0 ) \quad 3(3) + 2(0) = 9$$

$$D ( 0, 0 ) \quad 3(0) + 2(0) = 0$$

\* Hallando las coordenadas para B:

$$(I) \quad 2x_1 + 4x_2 = 16 \quad (-3)$$

$$\bullet \quad 6x_1 - 3x_2 = 18$$

$$-15x_2 = -30$$

$$x_2 = 2$$

$$\text{Reemplazando en (I): } 2x_1 + 4(2) = 16$$

$$2x_1 = 8$$

$$x_1 = 4$$

la coordenada es:  $( 4, 2 )$

Al comparar los resultados de los puntos en la F.O. el mayor valor: 16 , por lo tanto el punto óptimo es B.

Para culminar la gráfica, falta la F.O. entonces:

**Posición Inicial:**

$$3x_1 + 2x_2 = (3)(2)$$

Si  $x_1=0$  , entonces  $x_2=3$  , por lo tanto la coordenada es:  $( 0,3)$

Si  $x_2=0$ , entonces  $x_1=2$  , por lo tanto la coordenada es:  $( 2,0)$

### Posición Final:

$$3x_1 + 2x_2 = 16$$

Si  $x_1=0$ , entonces  $x_2=8$ , por lo tanto la coordenada es: ( 0,8)

Si  $x_2=0$ , entonces  $x_1=16/3=5.333$  , por lo tanto la coordenada es: (5.333,0)

La gráfica final queda:

8

//

X2 ( III )

4 A ( I )

( II )

3

B

2 REGION

1 FACTIBLE

0 1 2 3 4 5 6 7 8 X1

D C

-1 POSICION

FINAL

-2 POSICION

INICIAL

-3

-4

-5

-6 **Rpta.**  $X_1=4$  ,  $X_2=2$  . F.O. = 16

Como te has dado cuenta ya hemos usado otro cuadrante para la gráfica, esto sucede por que tenemos coeficientes negativos en las variables de las restricciones pero a pesar de eso la región factible se encuentra en el primer cuadrante por que las variables son mayores que cero:

$$(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0).$$

#### **EJEMPLO 4:**

**MINIMIZAR  $5X_1 - 6X_2$**

**SUJETO A:**

$$3X_1 - 5X_2 \leq 15$$

$$4X_1 + 3X_2 = 12$$

$$2X_1 + 6X_2 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

**Solución:**

- $3x_1 - 5x_2 = 15$

Si  $x_1=0$ , entonces  $x_2=-3$ , las coordenadas son:  $(0, -3)$

Si  $x_2=0$ , entonces  $x_1=5$ , las coordenadas son:  $(5, 0)$

- $4x_1 + 3x_2 = 12$

Si  $x_1=0$ , entonces  $x_2=4$ , las coordenadas son:  $(0, 4)$

Si  $x_2=0$ , entonces  $x_1=3$ , las coordenadas son:  $(3, 0)$

- $2x_1 + 6x_2 = 12$

Si  $x_1=0$ , entonces  $x_2=2$ , las coordenadas son:  $(0, 2)$

si  $x_2=0$ , entonces  $x_1=6$ , las coordenadas son:  $(6, 0)$

**Orientación:**

(I): se acerca al origen

(II): se queda solo la línea graficada.

(III): se aleja del origen

Graficando:

$X_2$

5

REGION



4 FACTIBLE

A

3 (I)

2

B

1

0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 x1

-1

-2 (III)

-3 (II)

-4

Ahora te das cuenta que la Región Factible es un segmento que va desde el punto A hacia el punto B, esto sucede por que se tiene una restricción con orientación de igualdad (=), entonces recuerda:

**Una restricción con orientación =, da una región factible que es un segmento o en extremo un punto.**

PUNTOS COORDENADAS MNIMIZAR  $5X_1 - 6X_2$

$$A (0, 4) \quad 5(0) - 6(4) = -24$$

$$B (2, 1.333) \quad 5(2) - 6(1.333) = 2$$

\* Punto B:

Como es la intersección de II y III:

Las coordenadas se hallan por ecuaciones simultaneas:

$$(II) \quad 4X_1 + 3X_2 = 12$$

$$(III) \quad 2X_1 + 6X_2 = 12 \quad (-2)$$

$$-9X_2 = -12$$

$$X_2 = 1.333$$

Reemplazando en (II) :

$$4X_1 + 3(1.333) = 12$$

$$x_1 = 2$$

Al comparar los resultados de las coordenadas remplazadas en la F.O. se tiene que en punto mínimo es A con valor  $-24$ .

Ahora falta graficar las F.O.

### Posición Inicial:

$$5x_1 - 6x_2 = (5)(-6)$$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2=5$ , las coordenadas son:  $(0, 5)$

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1 = -6$ , las coordenadas son:  $(-6,0)$

### Posición Final:

$$5x_1 - 6x_2 = -24$$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2=4$ , las coordenadas son:  $(0,4)$

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1 = -24/5 = -4.8$ , las coordenadas son:  $(-4.8,0)$

La gráfica queda: Ahora la F.O. se encuentra en el segundo cuadrante por que uno de sus coeficientes es negativo, pero eso no afecta en nada el procedimiento.

POSICION INICIAL

X2 POSICION FINAL

5

REGION

4 FACTIBLE

A

3 (I)

F.O. 2

B

1

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  $x_1$

-1

-2 (III)

-3 (II)

-4

### **EJEMPLO 5:**

**MINIMIZAR  $6X_1 - 5X_2$**

**SUJETO A:**

$$3x_1 + 4x_2 \leq 15$$

$$-2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución:

- $3x_1 + 4x_2 = 15$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2=15/4=3.75$ , las coordenadas son: (0,3.75)

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1=5$ , las coordenadas son: (5,0)

- $-2x_1 - 3x_2 = 6$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2 = -2$ , las coordenadas son: (0,-2)

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1=-3$ , las coordenadas son: (-3,0)

- $x_1=2$

la tercera restricción solo se convierte en una línea.

**Orientación:**

- se acerca al origen
- se acerca al origen
- se aleja del origen

Graficando:

$X_2$

5

4

(III)

3

A

2

1 REGION

FACTIBLE

0 C B

-3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 X1

-1 (I)

-2

(II)

**PUNTOS COORDENADAS MIN.  $6X_1 - 5X_2$**

$$A * (2, 2.25) \quad 6(2) - 5(2.25) = 0.75$$

$$B (5, 0) \quad 6(5) - 5(0) = 30$$

$$C (2, 0) \quad 6(2) - 5(0) = 12$$

\* Hallando las coordenadas para B mediante ecuaciones simultáneas:

El punto B es la intersección de I y III:

$$(I) \quad 3x_1 + 4x_2 = 15$$

$$(III) \quad x_1 = 2$$

$$\text{Reemplazando en I: } 3(2) + 4x_2 = 15$$

$$x_2 = 2.25$$

Las coordenadas de B son: (2, 2.25)

Al comparar los resultados de reemplazar las coordenadas en la F.O. se ve que el menor valor es

- que corresponde al punto A.

Ahora graficando la F.O.

**Posición inicial:**

$$6x_1 - 5x_2 = (6)(-5)$$

Si  $x_1=0$  despejando:  $x_2=6$  entonces las coordenadas son: (0,6)

si  $x_2=0$  despejando:  $x_1= -5$  entonces las coordenadas son: (-5,0)

**Posición final:**

$$6x_1 - 5x_2 = 0.75$$

Si  $x_1=0$  despejando:  $x_2= -0.15$  entonces las coordenadas son: (0,-0.15)

Si  $x_2=0$  despejando:  $x_1=0.125$  entonces las coordenadas son: (0.125,0)

La gráfica final queda: POSICION INICIAL

X2 6

5

4

(III)

3 POSICION FINAL

A

2

1 REGION

FACTIBLE

0 C

-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 X1

-1 (I)

-2

(II)

Rpta .  $X_1=2$  ,  $X_2= 2.25$  , El valor de la F.O. es 0.75

**EJERCICIOS:**

**GRAFICAR :**

1.- MAXIMIZAR :  $3X_1 + 4X_2$  2.- MAXIMIZAR :  $4X_1 - 5X_2$

**SUJETO A: SUJETO A:**

$$3X_1 + 4X_2 \leq 20 \quad 2X_1 - 5X_2 \geq 30$$

$$4X_1 - 6X_2 \geq 10 \quad 2X_1 + 4X_2 \leq 40$$

$$X_1 + X_2 \geq 4 \quad X_1 - X_2 \geq 20$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$\text{Rpta: } x_1=6.66, x_2=0, \text{ F.O. : } Z=20 \quad \text{Rpta. } X_1=20, x_2=0, \text{ F.O. } Z=80$$

$$3.-\text{MINIMIZAR : } 6X_1 + 7X_2 \quad 4.-\text{MINIMIZAR : } 5X_1 + 3X_2$$

$$\text{SUJETO A: SUJETO A:}$$

$$X_1 + 5X_2 \geq 12 \quad 3X_1 + 5X_2 \geq 4$$

$$2X_1 + 6X_2 \leq 24 \quad 4X_1 - 4X_2 \leq 12$$

$$X_1 + X_2 \geq 3 \quad X_1 \geq 3$$

$$3X_1 - 4X_2 \leq 10 \quad X_2 \leq 5$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$\text{Rpta. } X_1=0.75, x_2=2.25, \text{ F.O. } Z=20.25 \quad \text{Rpta. } X_1=3, X_2=0, \text{ F.O. } Z=15$$

$$5.-\text{MAXIMIZAR } 8X_1 + 9X_2 \quad 6.-\text{MAXIMIZAR } 5X_1 + 8X_2$$

$$\text{SUJETO A: SUJETO A:}$$

$$2X_1 + 6X_2 \geq 12 \quad -3X_1 + 4X_2 \leq 12$$

$$X_1 + 6X_2 \geq 20 \quad 2X_1 - 6X_2 \leq 20$$

$$X_1 + X_2 \leq 60 \quad X_1 \geq 10$$

$$X_1 \geq 10 \quad X_2 \geq 3$$

$$X_2 \leq 5 \quad 2X_1 + 5X_2 \leq 40$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$\text{Rpta. } X_1=55, X_2=5, \text{ F.O. } Z=485 \quad \text{Rpta. } X_1=12.5, X_2=3, \text{ F.O. } Z=86.5$$

$$7.-\text{MAXIMIZAR } 10X_1 - 6X_2 \quad 8.-\text{MINIMIZAR } 4X_1 - 3X_2$$

$$\text{SUJETO A: SUJETO A:}$$

$$-3X_1 + 6X_2 \leq 40 \quad -3X_1 - 2X_2 \leq 12$$

$$4X_2 \geq 12 \quad -5X_1 - 6X_2 \leq 15$$

$$3X_2 \leq 15 \quad 7X_1 + 10X_2 \leq 15$$

$$X_1 - X_2 \leq 30 \quad X_1 \geq 2$$

$$-X_1 - X_2 \leq 40 \quad X_2 \leq 5$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Rpta.  $X_1=35, X_2=5$  , F.O.  $Z=320$  Rpta.  $X_1=2, X_2=0.10$  , F.O.  $Z=7.70$

9.- MINIMIZAR  $-5X_1 - 6X_2$  10.- MINIMIZAR  $-10X_1 - X_2$

SUJETO A: SUJETO A:

$$X_1 \geq 4 \quad X_1 - X_2 \geq 3$$

$$X_2 \leq 10 \quad X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 - X_2 \geq 5 \quad X_1 \geq 2$$

$$2X_1 - 5X_2 \leq 10 \quad X_2 \leq 5$$

$$X_1 + X_2 \leq 15 \quad X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Rpta.  $X_1=10, X_2=5$ , F.O.  $Z= -80$  Rpta.  $X_1=10, X_2=0$  , F.O.  $Z=-100$

3.- GRAFICAS DE MODELOS CON LADOS DERECHOS NEGATIVOS:

## CAPITULO II

### GRAFICAS CON LADOS DERECHOS NEGATIVOS

Hasta ahora solo hemos resuelto problemas con lados derechos positivos, pero que hacemos si nos dan para graficar con lados derechos negativos, bueno para esto tenemos que tomar en cuenta lo siguiente:

a) **Para restricciones que contienen dos variables:**

por ejemplo:  $4x_1 - 5x_2 \leq -3$  vamos a multiplicar por  $-1$  la restricción quedando  $-4x_1 + 5x_2 \geq 3$  y aplicaremos la regla de los lados derechos (cuadro ) que en este caso como la restricción se ha pasado a  $\geq$  la orientación sería alejarse del origen.

Lo mismo para  $5x_1 + 5x_2 \geq -4$  , multiplicando por  $-1$  se tiene:  $-5x_1 - 5x_2 \leq 4$  en este caso la gráfica se acercaría al origen.

• **Para restricciones que tienen una sola variable:**

Para restricciones de la forma:  $x_i \geq -b$

Se lleva solo la lógica para su orientación, por ejemplo si se tuviera:

$X_2 \geq -6$ , se tiene que graficar a partir de  $x_2 = -6$  y como la orientación es  $\geq$  es lógico que tiene que abarcar a valores como  $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ , etc, es decir se dirige al origen.

Otro ejemplo :  $x_1 \geq -3$  , se tiene que graficar a partir de  $x_1 = -3$  y como la orientación es  $\geq$  es lógico que tiene que abarcar a valores como  $-2, -1, 0, 1, 2$  etc.

Para restricciones de la forma  $-X_i \geq -b$  y  $-X_i \leq -b$

Se multiplica por  $-1$  y a partir de ello se gráfica, ejemplo:  $-x_1 \geq -8$  multiplicando por  $-1$  se tiene  $x_1 \leq 8$  se gráfica acercándose al origen.

Otro ejemplo:  $-x_1 \leq -10$  multiplicando por  $-1$  se tiene  $x_1 \geq 10$  se gráfica alejándose del origen.

## **EJEMPLO 6**

**MAXIMIZAR  $9X_1 + 8X_2$**

**SUJETO A:**

$$X_1 \leq 5$$

$$X_2 \geq -2$$

$$X_1 - X_2 \geq -3$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Solución:

$$(I) \ x_1 = 5$$

- $X_2 = -2$
- $x_1 - x_2 \geq -3$ , multiplicando por  $-1$ :

$-x_1 + x_2 \leq 3^*$  , entonces la restricción queda así  $-x_1 + x_2 = 3$  , lista para despejar variables

Si  $x_1 = 0$  se tiene que  $x_2 = 3$ , teniendo las siguientes coordenadas:  $(0, 3)$

Si  $x_2 = 0$  se tiene que  $x_1 = -3$ , teniendo las siguientes coordenadas:  $(-3, 0)$

Orientación:

(I) : se acerca al origen

(II) : se acerca del origen C GRAFICA DE LA FUNCION OBJETIVO:

- : \*Como la restricción queda  $\geq 9X_1 + 8X_2 = (9)(8)$

se aleja del origen. Si  $x_1 = 0$  entonces  $x_2 = 9$ , las coordenadas son  $(0, 9)$

Si  $x_2 = 0$  entonces  $x_1 = 8$  , las coordenadas son:  $(8, 0)$



Graficando: **Posición inicial:** (0,9) , (8,0)

X2

4 F.O.

B

3 REGION (I)

2 FACTIBLE

(III)

1 D

-3 -2 -1 A 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 X1

-1

(II)

-2

Punto C: Intersección de I y III, utilizando ecuaciones simultaneas

$$x_1=5$$

$$-x_1+x_2=3$$

$$x_2=8$$

Entonces el punto C es: (5,8)

**PUNTOS COORDENADAS MAX .  $9X_1 + 8X_2$**

$$A ( 0,0) \ 9(0) + 8(0)=0$$

$$B ( 0, 3 ) \ 9(0) + 8(3)=24$$

$$C ( 5,8 ) \ 9(5) + 8(8)=109$$

$$D ( 5, 0) \ 9(5) + 8(0) =45$$

El punto óptimo es el punto C con valor de 109:

graficando la función Objetivo para que pase por el punto óptimo se tiene:

$$9x_1 + 8x_2 = 109$$

Si  $x_1=0$   $x_2=13.625$ , las coordenadas son: (0,13.625)

Si  $x_2=0$   $x_1=12.11$  , las coordenadas son: (12.11 , 0)

13

**Posición Inicial: (8,0) , (0,9)**

**12 Posición Final: (0,13.625),(12.11,0)**

11 Respuesta:  $x_1=5$ ,  $x_2=8$  ,El valor de la F.O. es 109

10

9

8

7

6

5

$x_2$

4 F.O. POSICION FINAL

B

3 REGION

FACTIBLE

2 (I) POSICION INICIAL

(III)

1 D

-3 -2 -1 A 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12  $x_1$

-1

(II)

-2

**Ejemplo 7.**

**Maximizar  $8x_1 + 6x_2$**

**sujeto a:**

$$x_1 - x_2 \leq -9$$

$$x_1 + 3x_2 \geq -10$$

$$-x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución:

- $x_1 - x_2 \leq -9$ , multiplicando por  $-1$  queda:  $-x_1 + x_2 \geq 9$ , esta restricción vamos a graficar,

$$-x_1 + x_2 = 9$$

$$\text{Si } x_1 = 0 \text{ } x_2 = 9$$

$$\text{Si } x_2 = 0 \text{ } x_1 = -9$$

- $x_1 + 3x_2 \geq -10$ , multiplicando por  $-1$  queda:  $-x_1 - 3x_2 \leq 10$ , esta restricción vamos a graficar,

$$-x_1 - 3x_2 = 10 \quad \text{X2}$$

$$\text{Si } x_1 = 0 \text{ } x_2 = -10/3$$

$$\text{Si: } x_2 = 0 \text{ } x_1 = -10 \text{ (I)}$$

$$10 \text{ A B}$$

- $-x_1 = 3 \text{ (IV)}$

$$\text{entonces: } x_1 = -3 \text{ 9 C}$$

$$\text{(IV) } x_2 = 10$$

$$\text{(III) } 8$$

Gráfica de la Función Objetivo:

$$\text{Graficando: } 7.8x_1 + 6x_2 = (8)(6)$$

$$\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_2 = 8, \text{ entonces}$$

$$6 \text{ las coordenadas son: } (0, 8)$$

$$\text{Si } x_2 = 0 \text{ entonces } x_1 = 6, \text{ entonces}$$

$$5 \text{ las coordenadas son : } (6, 0)$$

$$4$$

3

2

1

-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 X1

-1

-2

-3

-4 (II)

Hallando punto B:

$$(I) -x_1 + x_2 = 9$$

$$(IV) x_2 = 10 \quad (-1)$$

$$-x_1 = -1, \text{ entonces: } x_1 = 1$$

**PUNTOS COORDENADAS MAX.  $8X_1 + 6X_2$**

$$A (0, 10) \quad 8(0) + 6(10) = 60$$

$$B (1, 10) \quad 8(1) + 6(10) = 68$$

$$C (0, 9) \quad 8(0) + 6(9) = 54$$

Respuesta: El punto óptimo es B , con coordenadas:  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 10$

Trasladando la función Objetivo:

$$8x_1 + 6x_2 = 68$$

Si  $x_1 = 0$  entonces  $x_2 = 11.333$ , entonces las coordenadas son: (0,11.333)

Si  $x_2 = 0$  entonces  $x_1 = 8.5$ , entonces las coordenadas son: (8.5,0)

X2 11.333

(I)

10 A B

(IV)

9 C

(III) 8

:

7

6

5

4

3

POSICION POSICION

2 INICIAL FINAL

1

-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 X1

-1

-2

-3

-4 (II)

**EJEMPLO 8:**

**MINIMIZAR  $5X_1 - 3X_2$**

**SUJETO A:**

**$X_1 \geq -3$  X2 POSICION INICIAL**

**$X_2 \geq -4$  (III) POSICION INICIAL**

**$-X_1 \geq -6$**

**$-X_1 - X_2 \leq -4$**

**$X_1 - X_2 \geq -6$  D**

**$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$**

Solución: (V)

- $x_1 = -3$
- $x_2 = -4$

- $-x_1 \geq -6$ , multiplicando por  $-1$ , se tiene:  $C \ x_1 \leq 6$ , entonces  $x_1 = 6$ .
- $-x_1 - x_2 \leq -4$ , multiplicando por  $-1$ , 6

Se tiene  $x_1 + x_2 \geq 4$ , entonces:

Si  $x_1 = 0$   $x_2 = 4$  5

Si  $x_2 = 0$   $x_1 = 4$  (I)

- Multiplicando por  $-1$  4

$-x_1 + x_2 \leq 6$ , entonces: B

$-x_1 + x_2 = 6$  3

Si  $x_1 = 0$   $x_2 = 6$

Si  $x_2 = 0$   $x_1 = -6$  2 (IV)

F.O 1

A E

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6  $x_1$

-1

Gráfica de la función Objetivo -2

$$5X_1 - 3X_2 = (5)(-3) - 3$$

Sí  $x_1 = 0$  entonces  $x_2 = 5$ ,

las coordenadas son : (0,5) -4

Si  $x_2 = 0$  entonces  $x_1 = -3$  (II)

las coordenadas son : (-3,0)

Coordenadas del punto D: Ecuaciones simultaneas entre (III) y (V)

$$x_1 - x_2 = -6$$

$$x_1 = 6$$

$$\text{entonces } x_2 = 12$$

**PUNTOS COORDENADAS MIN  $5X_1 - 3X_2$**

$$A (4, 0) \ 5(4) - 3(0) = 20$$

$$B (0, 3) \ 5(0) - 3(3) = -9$$

$$C ( 0,6 ) \quad 5(0) - 3(6) = -18$$

$$D (6,12) \quad 5(6) - 3(12) = -6$$

$$E ( 6, 0) \quad 5(6) - 3(0) = 30$$

El punto C es el punto óptimo por tener el valor mas pequeño.

Entonces trasladando la función Objetivo al punto optimo se tiene:

$$5x_1 - 3x_2 = -18$$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2=6$ , la coordenada es: (0,6)

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1=-3.6$ , la coordenada es: (-3.6,0)

Rpta.  $x_1=0$ ,  $x_2=6$  el valor de la función Objetivo es -18.

### **EJEMPLO 9:**

**MINIMIZAR - 3X1 - 6X2**

**SUJETO A:**

$$X_1 \geq -4$$

$$-X_2 \leq -3$$

$$-X_1 - X_2 \leq -4$$

$$X_1 \geq 3$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0,$$

Solución:

- $x_1 = -4$ ,
- $-x_2 \leq -3$ , multiplicando por -1 se tiene  $x_2 \geq 3$  entonces  $x_2=3$

(III)  $-x_1 - x_2 \leq -4$ , multiplicando por -1 se tiene  $x_1 + x_2 \geq 4$  entonces  $x_1 + x_2 = 4$ :

si  $x_1=0$  entonces  $x_2=4$ , la coordenada es (0,4)

si  $x_2=0$  entonces  $x_1=4$ , la coordenada es (4,0)

(IV)  $x_1=3$

Orientación:

- Se acerca al origen.
- Se aleja del origen.
- Se aleja del origen.

- Se aleja del origen.

Gráfica de la posición inicial de la F.O.  $-3x_1 - 6x_2 = (-3)(-6)$

Sí  $x_1=0$  entonces  $x_2=-3$ , la coordenada es  $(0,-3)$

Sí  $x_2=0$  entonces  $x_1=-6$ , la coordenada es  $(-6,0)$

Graficando se tiene:

$x_2$

4 (IV) REGION FACTIBLE

A (II)

3

2 POSICION

(I) FINAL

1 (III)

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  $x_1$

-1

-2

POSICION

INICIAL -3 F.O.

-4

El único punto es el punto A, por lo tanto las coordenadas del punto óptimo es:

$x_1=3$  ,  $x_2=3$  y el valor de la Función Objetivo es:  $-3(3) - 6(3) = -27$

La posición final de la Función Objetivo es:

$-3x_1 - 6x_2 = -27$

si  $x_1=0$  entonces  $x_2=4.5$

si  $x_2=0$  entonces  $x_1=9$

**EJEMPLO 10:**

**MAXIMIZAR  $-4X_1 + 7X_2$**



### SUJETO A:

$$6X_1 + 7X_2 \leq 10$$

$$X_1 \geq -3$$

$$-X_2 \leq -0.5$$

$$5X_1 - 7X_2 \geq 18$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0,$$

Solución:

- $6x_1 + 7x_2 = 10$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2 = 1.428$  , la coordenada es (0, 1.428)

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1= 1.667$  , la coordenada es ( 1.667 , 0)

- $x_1 = -3$
- $-x_2 \leq -0.5$  multiplicando por  $-1$  se tiene  $x_2 \geq 0.5$  entonces  $x_2=0.5$
- $5x_1 - 7x_2 = 18$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2=2.5714$ , la coordenada es ( 0, 2.5714)

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1=3.6$  , la coordenada es (3.6 , 0 )

Gráfica de la Función Objetivo

Posición Inicial:

$$-4x_1 + 7x_2 = (-4)(7)$$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2= -4$ , la coordenada es (0, -4)

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1= 7$  , la coordenada es (7,0)

Orientación:

- Se acerca al origen.
- Se acerca al origen.  $X_2$  (II)
- Se aleja del origen.
- Se aleja del origen. (IV)

2

(I)

1 B (III)

0.5 C

A

$$-3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ x_1$$

$$-1$$

Punto C: Intersección de I y III:

$$6x_1 + 7x_2 = 10 \quad -2$$

$$x_2 = 0.5$$

$$-3$$

$$x_1 = 1.08333$$

Entonces la coordenada es: -4 POSICION INICIAL DE LA F.O.

$$(1.08333, 0.5)$$

**PUNTOS COORDENADAS MAX.  $-4x_1 + 7x_2$**

$$A (0, 0.5) \quad -4(0) + 7(0.5) = 3.5$$

$$B (0, 1) \quad -4(0) + 7(1) = 7$$

$$C (1.08333, 0.5) \quad -4(1.08333) + 7(0.5) = -0.833$$

El punto optimo es el punto B entonces el valor de la F.O. es 7

Ubicación final de la Función Objetivo:

$$-4x_1 + 7x_2 = 7$$

Si  $x_1 = 0$  despejando  $x_2 = 1$ , entonces las coordenadas son  $(0, 1)$

Si  $x_2 = 0$  despejando  $x_1 = -1.75$ , entonces las coordenadas son  $(-1.75, 0)$

La gráfica final queda:

$x_2$  (II) POSICION FINAL DE LA F.O.

•

. (IV)

2

(I)

1 B (III)

0.5 C

A

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 x1

-1

-2

-3

-4 POSICION INICIAL DE LA F.O.

-5

**Respuesta:**  $x_1=0$ ,  $x_2=1$  el valor de la función objetivos es 7.

Grafique los siguientes ejemplos:

**1.- MAXIMIZAR :  $9X_1 - 10X_2$  2.- MINIMIZAR  $4X_1 + 12X_2$**

**SUJETO A: SUJETO A:**

$$-3X_1 + 6X_2 \leq -10 \quad -4X_1 - 7X_2 \leq -40$$

$$-3X_1 - 7X_2 \geq -12 \quad X_1 \leq 3$$

$$X_2 \leq 13 \quad X_2 \leq 5$$

$$X_1 \geq 2 \quad -X_1 - X_2 \geq -20$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 1$$

$$\text{Rpta. } X_1=4, X_2=0, Z=36 \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\text{Rpta. } X_1=3, X_2=4, Z=60$$

**3.- MAXIMIZAR  $7X_1 + 6X_2$  4.- MINIMIZAR  $5X_1 + 9X_2$**

**SUJETO A: SUJETO A:**

$$-6X_1 - 6X_2 \geq -45 \quad -9X_1 - 6X_2 \leq -12$$

$$-4X_1 - 6X_2 \leq -3 \quad 5X_1 - 4X_2 \leq 3$$

$$-X_1 + X_2 \leq -5 \quad -X_1 \leq -4$$

$$X_2 \leq 3 \quad -X_2 \geq -10$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 - X_2 \leq 12$$

$$\text{Rpta. } X_1=7.5, X_2=0, Z=52.5 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Rpta.  $X_1=4$  ,  $X_2=4.25$  ,  $Z=58.25$

5.- MAXIMIZAR  $6X_1 + 8X_2$  6.- MINIMIZAR  $X_1 + X_2$

SUJETO A: SUJETO A:

$$-5X_1 - 7X_2 \leq -35 \quad X_1 + X_2 \geq 1$$

$$4X_1 - 6X_2 \leq 45 \quad -X_1 + X_2 \geq -12$$

$$X_1 + 5X_2 \leq 23 \quad -2X_1 + 3X_2 \geq -15$$

$$X_1 - X_2 \geq 3 \quad 3X_1 + 5X_2 \geq 12$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Rpta.  $X_1=13.961538$  ,  $X_2=1.807692$  Rpta.  $X_1=0$  ,  $X_2=2.4$  ,  $Z=2.4$

$Z=98.23077$

7.- MAXIMIZAR  $60X_1 + 70X_2$  8.- MINIMIZAR  $6X_1 - 8X_2$

SUJETO A: SUJETO A:

$$5X_1 + 7X_2 \leq 300 \quad 4X_1 - 8X_2 \leq 34$$

$$3X_1 - 6X_2 \geq 2 \quad -2X_1 + 5X_2 \leq -4$$

$$X_1 \leq 50 \quad -2X_1 - 5X_2 \geq -46$$

$$3X_1 - 5X_2 \geq 15 \quad X_1 \geq 2$$

$$X_2 \geq 15 \quad X_2 \leq 10$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Rpta.  $X_1=39$  ,  $X_2=15$  ,  $Z=3390$  Rpta.  $X_1=2$  ,  $X_2=0$  ,  $Z=12$

9.- MAXIMIZAR  $X_1 + X_2$  10.- MINIMIZAR  $X_1 - X_2$

SUJETO A: SUJETO A:

$$3X_1 + 7X_2 \geq 3 \quad -4X_1 + 5X_2 \leq -2$$

$$-4X_1 - 7X_2 \geq -15 \quad -4X_1 - 7X_2 \geq -19$$

$$-3X_1 - 7X_2 \leq -2 \quad X_1 \geq 3$$

$$4X_1 + 6X_2 \leq 15 \quad 2X_1 + 5X_2 \leq 20$$

$$-3X_1 + 6X_2 \geq -12 \quad X_2 \leq 3$$

$$x_2 \geq 2 - x_1 - 5x_2 \geq -20$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

**Rpta.  $x_1=0.25, x_2=2, Z=2.25$  Rpta.  $x_1=3, x_2=1, Z=2$**

### **CAPITULO III**

#### **GRAFICAS CON LADOS DERECHOS CON VALOR DE CERO**

##### **.- GRAFICAS CON LADOS DERECHOS CON VALOR DE CERO**

La variedad de gráficas muchas veces nos lleva a toparnos con restricciones que después de realizar el modelo de programación lineal donde los lados derechos deben considerarse como valores numéricos nos enfrentamos a modelos como por ejemplo:

$$x_1 - x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + 3x_2 = 0$$

Estas restricciones aparecen en la mayoría de los casos cuando se tienen problemas de mezcla, por ejemplo

si deseamos como mínimo que  $x_1$  sea el 60% de la mezcla total la restricción quedaría:

$$x_1$$

$$\geq 0.60$$

$$x_1 + x_2$$

Realizando las operaciones:  $x_1 \geq 0.60(x_1 + x_2)$

$$\text{entonces: } x_1 - 0.60x_1 - 0.60x_2 \geq 0$$

$$\text{la restricción queda: } 0.40x_1 - 0.60x_2 \geq 0$$

Este tipo de restricciones tiene otra manera de graficar y por lo tanto de orientación.

Para restricciones de la forma :  $ax_1 + bx_2 \geq 0$

Ejemplo:

$$4x_1 + 8x_2 \geq 0$$

Igualando:

$$4x_1 + 8x_2 = 0$$

$$4x_1 = -8x_2$$

despejando:

$$x_1 = -2x_2$$

Tabulando:

-2 x2 x1 Coordenadas

(x1,x2)

Si -2(0) 0 ( 0, 0)

Si -2(1) -2 (-2,1)

Si -2(2) -4 (-4,2)

x2

La gráfica queda: 2

1

-4 -3 -2 -1 0 x1

Orientación:

$$4x_1 + 8x_2 \geq 0$$

Se toma un punto exterior a la línea trazada ( es decir que no pertenece a ella) por ejemplo: (0,2) ,  
reemplazando en la restricción:  $4(0) + 8(2) \geq 0$

entonces:  $16 \geq 0$  si, la recta es orientada al punto (0,2)

La gráfica final queda:

REGION

FACTIBLE x2

: 2

1

-4 -3 -2 -1 0 x1

Para restricciones de la forma  $-3x_1 + 9x_2 \geq 0$

Igualando:  $-3x_1 + 9x_2 = 0$

$$-3x_1 = -9x_2$$

despejando:  $x_1 = 3x_2$

Tabulando:

3x2 x1 Coordenadas

$(x_1, x_2)$

Si  $3(0) \geq 0$   $(0,0)$

Si  $3(1) \geq 3$   $(3,1)$

Si  $3(2) \geq 6$   $(6,2)$

$x_2$

La gráfica queda:

2

1

0 1 2 3 4 5 6 7  $x_1$

Orientación: Tomando el punto  $(1,0)$  como punto de orientación:

$$-3x_1 + 9x_2 \geq 0$$

Reemplazando:  $-3(1) + 9(0) \geq 0$

$-3 \geq 0$ , no entonces la recta se orienta hacia el lado opuesto de este punto.

Gráfica final:

$x_2$

REGION FACTIBLE

2

1

0 1 2 3 4 5 6 7  $x_1$

Para restricciones de la forma  $6x_1 - 4x_2 \leq 0$

Igualando:  $6x_1 - 4x_2 = 0$

despejando:  $x_2$

$6x_1 = 4x_2$  Gráfica Inicial:

$$x_1 = \left(\frac{4}{6}\right)x_2$$

11

Tabulando: 10

9

(4/6) x2 x1 Coordenadas 8

(x1,x2) 7

6

Si (4/6)0 0 ( 0, 0) 5

Si (4/6)6 4 (4, 6) 4

Si (4/6)12 8 (8,12) 3

2

1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 x1

Utilizando un punto de orientación por ejemplo (0,5), reemplazando este punto en la restricción

$$6x_1 - 4x_2 \leq 0$$

$$6(0) - 4(5) \leq 0$$

$-20 \leq 0$  si , como cumple la restricción se orienta hacia este punto.

Gráfica Final:

x2

12

11

: 10 REGION

9 FACTIBLE

8

7

6

5

4

3



2

1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 x1

Entonces ahora que ya tenemos la noción de como graficar las restricciones cuyos lados derechos tienen valor de cero, vamos a resolver los siguientes ejemplos:

### Ejemplo 11

**Max  $8x_1 + 4x_2$**

**sujeto a:**

$$x_1 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución:

$$(I) x_1 = 4$$

- $-x_1 + x_2 = 0$

Despejando:  $x_2 = x_1$

Tabulando:

x1 x2 Coordenadas

(x1,x2)

0 0 (0,0)

1 1 (1,1)

2 2 (2,2)

Utilizando al punto (0,2) como punto de orientación se reemplaza en la restricción:

$$-1(0) + 1(2) \geq 0$$

entonces  $2 \geq 0$  si cumple, entonces la restricción debe orientarse a este punto.

- $2x_1 + 5x_2 = 10$

Si  $x_1=0$  despejando  $x_2=2$ , entonces las coordenadas son (0,2)

Si  $x_2=0$  despejando  $x_1=5$  , entonces las coordenadas son (5,0)

Orientación:

- Se acerca al origen.
- Se acerca al punto (0,2).
- Se acerca al origen.

Ubicación Inicial de la F.O.

$$8x_1 + 4x_2 = (8)(4)$$

Si  $x_1=0$  entonces  $x_2=8$ , las coordenadas son (0,8)

Si  $x_2=0$  entonces  $x_1= 4$ , las coordenadas son (4,0)

Gráfica Inicial:

$x_2$

8

7

6

5

4

3 (II) (I)

2

B

1 C

A

0 1 2 3 4 5  $x_1$

(III)

POSICION

INICIAL DE LA F.O

Hallando el punto C que es la intersección de II y III:

- $-x_1+x_2=0$  (2)
- $2x_1+5x_2=10$

$$7x_2 = 10$$

despejando:  $x_2 = 10/7$  , reemplazando este valor en (II)

$$-x_1 + 10/7 = 0$$

despejando:  $x_1 = 10/7$

Entonces:

### **PUNTOS COORDENADAS MAX. $8x_1 + 4x_2$**

$$A (0, 0) \quad 8(0) + 4(0) = 0$$

$$B (0, 2) \quad 8(0) + 4(2) = 8$$

$$C (10/7, 10/7) \quad 8(10/7) + 4(10/7) = 17.1428$$

Punto óptimo: es el punto C , trasladando la función objetivo para que pase por ese punto:

$$8x_1 + 4x_2 = 17.1428$$

Si  $x_1 = 0$  despejando  $x_2 = 4.2857$ , entonces la coordenada es  $(0, 4.2857)$

Si  $x_2 = 0$  despejando  $x_1 = 2.14285$ , entonces la coordenada es  $(2.14285, 0)$

La Gráfica final queda:

Gráfica Final:

$x_2$

8

7

6

5

4

3 (II) (I)

2

B

1 C

A

0 1 2 3 4 5 x1

(III)

POSICION

INICIAL DE LA F.O

POSICION

FINAL DE LA F.O.

Respuesta:  $x_1 = 10/7$  ,  $x_2 = 10/7$  , el valor de la F.O. es : 17.1428

### **EJEMPLO 12:**

**Minimizar  $6x_1 - 5x_2$**

**sueto a:**

$$-4x_1 - 5x_2 \leq -20$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq 0$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución:

- $-4x_1 - 5x_2 \leq -20$  , multiplicando por  $-1$  se tiene  $4x_1 + 5x_2 \geq 20$ , entonces:

$$4x_1 + 5x_2 = 20$$

Si  $x_1=0$  despejando  $x_2=4$  , entonces la coordenada es: (0,4)

Si  $x_2=0$  despejando  $x_1=5$ , entonces la coordenada es: (5,0)

- $2x_1 - 3x_2 = 0$

despejando :  $2x_1 = 3x_2$

$$\text{entonces: } x_1 = 1.5x_2$$

Tabulando:

1.5 x2 x1 Coordenada

Si 1.5( 0) 0 (0,0)

Si 1.5( 1) 1.5 (1.5,1)

Si  $1.5(2) \geq 3(3,2)$

(III)  $x_1 = 6$

Orientación:

Utilizando el punto (0,5) como punto de orientación se tiene:

$$2x_1 - 3x_2 \geq 0$$

$$2(0) - 3(5) \geq 0$$

$-15 \geq 0$  no, entonces la restricción de orientarse al lado opuesto de (0,5)

Orientación:

- se aleja del origen.
- Se aleja del punto (0,5)
- Se acerca al origen.

Ubicación inicial de la F.O:

$$6x_1 - 5x_2 = (6)(-5)$$

Si  $x_1 = 0$  despejando  $x_2 = 6$ , entonces la coordenada es: (0,6)

Si  $x_2 = 0$  despejando  $x_1 = -5$ , entonces la coordenada es: (-5,0)

Gráfica Inicial:  $x_2$

6

5

(I) (III)

4

B

POSICION INICIAL 3 (II)

DE LA F.O.

2 REGION

A FACTIBLE

1

D C

$$-5 \ -4 \ -3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ x_1$$

Hallando punto A:

$$\text{Intersección de I y II: } 4x_1 + 5x_2 = 20$$

$$2x_1 - 3x_2 = 0 \quad (-2)$$

$$11x_2 = 20$$

$$x_2 = 1.8181, \text{ reemplazando en (I) } 4x_1 + 5(1.8181) = 20$$

se tiene  $x_1 = 2.7272$  , entonces la coordenada es:  $(2.7272, 1.8181)$

Hallando punto B:

$$\text{Intersección de II y III: } 2x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_1 = 6$$

$$2(6) - 3x_2 = 0$$

despejando:  $x_2 = 4$  , entonces la coordenada es:  $(6, 4)$

Punto C:  $(6,0)$

Punto D:  $(5,0)$

$$\text{PUNTOS COORDENADAS MIN } 6X_1 - 5X_2$$

$$A (1.8181, 2.7272) \quad 6(2.7272) - 5(1.8181) = 7.2727$$

$$B (6, 4) \quad 6(6) - 5(4) = 16$$

$$C (6,0) \quad 6(6) - 5(0) = 36$$

$$D (5,0) \quad 6(5) - 5(0) = 30$$

Punto optimo: A

Posición Final de la F.O.

$$6x_1 - 5x_2 = 7.2727$$

Si  $x_1 = 0$  despejando  $x_2 = -1.45454$  , entonces la coordenada es:  $(0, -1.45454)$

Si  $x_2 = 0$  despejando  $x_1 = 1.2121$  , entonces ;a coordenada es:  $(1.2121, 0)$

Gráfica Final:

$$x_2$$

6

5 POSICION FINAL

(I) (III) DE LA F.O.

4

B

POSICION INICIAL 3 (II)

DE LA F.O.

2 REGION

A FACTIBLE

1

D C

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 x1

-1

Respuesta:  $x_1 = 1.8181$  ,  $x_2 = 2.7272$  el valor de la F.O. es: 7.2727

### **Ejemplo 13:**

**Maximizar  $7x_1 - 8x_2$**

**sujeto a:**

$$x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución:

$$\bullet x_1 - 2x_2 = 0$$

despejando:  $x_1 = 2x_2$

Tabulando:

2 x2 x1 Coordenadas

$$\text{Si } 2(0) \ 0 \ (0,0)$$

$$\text{Si } 2(1) \ 2 \ (2,1)$$

$$\text{Si } 2(2) \ 4 \ (4,2)$$

Si tomamos a (0,5) como punto de referencia se tiene:

$$1(0) - 2(5) \geq 0$$

entonces:  $-10 \geq 0$  , no cumple , entonces la restricción no se orienta hacia el punto (0,5).

$$(II) \ x_1 - 3x_2 = 0$$

$$\text{despejando: } x_1 = 3x_2$$

Tabulando:

$3x_2$   $x_1$  Coordenadas

$$\text{Si } 3(0) \ 0 \ (0,0)$$

$$\text{Si } 3(1) \ 3 \ (3,1)$$

$$\text{Si } 3(2) \ 6 \ (6,2)$$

Tomando el punto (0,2) como punto de referencia se tiene:

$$\bullet -3(2) \leq 0$$

entonces:  $-6 \leq 0$ , si cumple , entonces la restricción se acerca del punto (0,2).

(III)

$$2x_1 + 4x_2 = 10$$

Si  $x_1=0$  despejando  $x_2=2.5$  ,entonces la coordenada es: (0,2.5)

Si  $x_2=0$  despejando  $x_1=5$  ,entonces la coordenada es: (5,0)

Orientación:

- Se aleja del punto (0,5)
- Se acerca al punto ( 0,2)

(III) Se acerca al origen.

Ubicación Inicial de la Función Objetivo:

$$7x_1 - 8x_2 = (7)(-8)$$

Si  $x_1=0$  despejando  $x_2=7$  , entonces la coordenada es: (0,7)



Si  $x_2=0$  despejando  $x_1=-8$ , entonces la coordenada es:  $(-8,0)$

Gráfica Inicial:

$X_2$

7

POSICION 6

INICIAL DE LA

F.O. 5

4 (I)

(III)

3

2 (II)

B

1 C

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6  $X_1$

A

Puntos Extremos:

A:  $(0,0)$

B: Intersección de I y III hallando las coordenadas de este punto por ecuaciones simultaneas:

$$x_1 - 2x_2 = 0 \quad (-2)$$

$$2x_1 + 4x_2 = 10$$

$$8x_2 = 10$$

despejando:  $x_2 = 1.25$

Reemplazando en (I):  $x_1 - 2(1.25) = 0$

$x_1 = 2.50$ , entonces la coordenada es  $(2.50, 1.25)$

C: Intersección de II y III, hallando las coordenadas de este punto por ecuaciones simultaneas:

$$x_1 - 3x_2 = 0 \quad (-2)$$

$$2x_1 + 4x_2 = 10$$

$$10x_2 = 10$$

entonces:  $x_2 = 1$ , reemplazando en II :

$$x_1 - 3(1) = 0$$

entonces:  $x_1 = 3$ , por lo tanto la coordenada es (3,1)

PUNTOS COORDENADAS MAXIMIZAR  $7x_1 - 8x_2$

$$A (0,0) \quad 7(0) - 8(0) = 0$$

$$B (2.50, 1.25) \quad 7(2.50) - 8(1.25) = 7.5$$

$$C (3,1) \quad 7(3) - 8(1) = 13$$

El punto óptimo es C, por lo que trasladando la F.O. hacia ese punto se tiene:

$$7x_1 - 8x_2 = 13$$

Si  $x_1 = 0$ , despejando:  $x_2 = -1.625$ , entonces la coordenada es : (0, -1.625)

Si  $x_2 = 0$ , despejando :  $x_1 = 1.857$ , entonces la coordenada es: (1.857, 0)

La gráfica Final es:

$x_2$

7

POSICION 6

INICIAL DE LA

F.O. 5 POSICION FINAL DE LA F.O.

4 (I)

(III)

3

2 (II)

B

1 C

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6  $x_1$

A

-1

**Rpta.**  $X_1=3$  ,  $X_2=1$ , Valor de F.O.  $Z=13$

#### **Ejemplo 14:**

**Maximizar  $3x_1 + 2x_2$**

**sujeto a:**

$$-2x_1 + x_2 \geq 0$$

$$-3x_1 + 6x_2 \geq -10$$

$$x_1 \geq -5$$

$$-4x_1 + 7x_2 \leq 28$$

$$x_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Solución:

- $-2x_1 + x_2 = 0$

Despejando:  $x_2 = 2x_1$

Tabulando:

$2x_1$   $x_2$  Coordenadas

Si  $2(0)$  0 (0,0)

Si  $2(1)$  2 (1,2)

Si  $2(2)$  4 (2,4)

Utilizando el punto (0,5) como punto de referencia y reemplazando en la restricción:

$$-2(0) + 5 \geq 0$$

entonces:  $5 \geq 0$  si cumple, por lo tanto la restricción se orienta hacia el punto (0,5)

- $-3x_1 + 6x_2 \geq -10$  , multiplicando por  $-1$  se tiene:  $3x_1 - 6x_2 \leq 10$  , entonces:

$$3x_1 - 6x_2 = 10$$

Si  $x_1=0$  despejando  $x_2 = -1.667$  , entonces las coordenadas son: (0, -1.667)

Si  $x_2=0$  despejando  $x_1 = 3.333$  , entonces las coordenadas son: ( 3.333 , 0)

- $x_1 \geq -5$ , multiplicando por  $-1$  se tiene  $-x_1 \leq 5$ , entonces:

5,4,3,2,1,0. están comprendidos en esta restricción.

- $-4x_1 + 7x_2 = 28$ ,

Si  $x_1 = 0$  despejando  $x_2 = 4$ , entonces las coordenadas son: (0,4)

Si  $x_2 = 0$  despejando  $x_1 = -7$ , entonces las coordenadas son: (-7,0)

Orientación:

- se orienta hacia (0,5)
- Se acerca al origen.
- Se acerca a los puntos 5,4,3,2,1,0
- Se acerca al origen.

Posición Inicial de la Función Objetivo:

$$3x_1 + 2x_2 = (3)(2)$$

Si  $x_1 = 0$  despejando  $x_2 = 3$ , las coordenadas son: (0,3)

Si  $x_2 = 0$  despejando  $x_1 = 2$ , las coordenadas son: (2,0)

Gráfica Inicial: (III)

X2

**A**

POSICION INICIAL

DE LA F.O. 5

(IV)

4 (I)

**B REGION**

**3 FACTIBLE**

2

1 (II)

**C**

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 X1

-1

-2

Puntos Extremos:

A es la intersección de (I) y (IV), despejando por ecuaciones simultaneas:

$$\bullet -2X_1 + X_2 = 0 \quad (-7)$$

$$(IV) -4X_1 + 7X_2 = 28$$

$$10x_1 = 28$$

despejando:  $x_1 = 2.8$ , reemplazando en (I):

$$-2(2.8) + x_2 = 0$$

entonces:  $x_2 = 5.6$ , la coordenada es: ( 2.8 , 5.6)

B : (0,4)

C : (0,0)

PUNTOS COORDENADAS MAXIMIZAR  $3X_1 + 2X_2$

$$A (2.8, 5.6) \quad 3(2.8) + 2(5.6) = 19.6$$

$$B (0, 4) \quad 3(0) + 2(4) = 8$$

$$C (0, 0) \quad 3(0) + 2(0) = 0$$

El punto óptimo es A , entonces trasladando la Función Objetivo a este punto se tiene:

$$3x_1 + 2x_2 = 19.6$$

Si  $x_1 = 0$  despejando  $x_2 = 9.8$ , entonces las coordenadas son: ( 0, 9.8)

Si  $x_2 = 0$  despejando  $x_1 = 6.533$ , entonces las coordenadas son: (6.533, 0)

$X_2$

10

La gráfica final es: 9

8

7 (III)

6 **A**

POSICION INICIAL

DE LA F.O. 5

(IV)

4 ( I )

**B REGION**

**3 FACTIBLE**

2

POSICION FINAL

DE LA F.O.

1 (II)

C

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 X1

-1

-2

Rpta.  $X_1=2.8$  ,  $X_2=5.6$  , el valor de la F.O. es  $Z=19.6$

**Ejemplo 15.-**

**Minimizar  $6x_1 - 5x_2$**

**sujeto a:**

$$x_1 \leq 4$$

$$5x_1 - 4x_2 = 0$$

$$x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución:

- $x_1=4$  , valores como 4,3,2,1,0 cumplen la restricción.
- $5x_1 - 4x_2 = 0$

despejando:  $5x_1=4x_2$

entonces:  $x_1 = 4x_2/5$  , luego :  $x_1 = 0.8x_2$

0.8x2 x1 Coordenadas

Si 0.8(0) 0 (0,0)

Si 0.8(1) 0.8 (0.8,1)

Si 0.8(5) 4 (4,5)

Como la restricción tiene orientación de igualdad entonces en la gráfica solo se considera la línea trazada.

- $x_2=5$  , valores como 5,4,3,2,1,0 cumplen la restricción.
- $2x_1 + 3x_2=6$

Si  $x_1=0$  despejando  $x_2=2$  , entonces las coordenadas son: (0,2)

Si  $x_2=0$  despejando  $x_1=3$ , entonces las coordenadas son: (3,0)

#### **Orientación:**

- Valores como 4,3,2,1,0 cumplen la restricción.
- La línea trazada.
- Valores como 5,4,3,2,1,0 cumplen la restricción.
- Se aleja del origen.

#### **Posición Inicial de la Función Objetivo:**

$$6x_1 - 5x_2 = (6)(-5)$$

Si  $x_1=0$  despejando  $x_2=6$ , entonces las coordenadas son: (0,6)

Si  $x_2=0$  despejando  $x_1= -5$ , entonces las coordenadas son: (-5,0)

#### **Gráfica Inicial:**

6

POSICION INICIAL DE LA B

F.O. 5

(III)

4

(II)

3

(IV) (I)

2

A

1

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

Por tener la (II) como dirección una igualdad (=) , entonces la región factible es un segmento.

Punto A : Intersección de (II) y (IV)

Hallando las coordenadas por ecuaciones simultaneas:

$$5x_1 - 4x_2 = 0 \quad (3)$$

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \quad (4)$$

$$23x_1 = 24$$

$$x_1 = 1.043$$

Reemplazando en (II):

$$5(1.043) - 4x_2 = 0$$

$$\bullet - 4x_2 = 0$$

$$5.215 = 4x_2$$

$$\text{entonces: } x_2 = 1.30375$$

las coordenadas son: (1.043 , 1.30375)

Punto B: (4,5)

**PUNTOS CORDENADAS MINIMIZAR  $0.6x_1 - 5x_2$**

$$A (1.043 , 1.30375) \quad 0.6(1.043) - 5(1.30375) = -0.26075$$

$$B (4,5) \quad 0.6(4) - 5(5) = -1$$

Entonces el punto optimo es: B con valor -1, trasladando la función Objetivo para que pase por el punto optimo se tiene:

$$0.6x_1 - 5x_2 = -1$$

si  $x_1=0$  despejando  $x_2=-0.20$  , entonces las coordenadas son: ( 0,-0.20)

Si  $x_2=0$  despejando  $x_1=-0.1666$  , entonces las coordenadas son : (-0.1666,0)

**Gráfica Final:**

POSICION FINAL



6 DE LA F.O.

POSICION INICIAL DE LA B

F.O. 5

(III)

4

(II)

3

(IV) (I)

2

A

1

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

**Rpta.**  $X_1=4$  ,  $X_2=5$  , el valor de la F.O. es  $Z= -1$

**EJERCICIOS:**

**1.- MAXIMIZAR  $X_1 + 6X_2$  2.- MINIMIZAR  $4X_1 + 5X_2$**

**SUJETO A: SUJETO A:**

**$3X_1 - 4X_2 \leq 0$   $2X_1 + 6X_2 \geq 3$**

**$3X_1 + X_2 \geq 1$   $3X_1 - 4X_2 \leq 0$**

**$-X_2 \geq -12$   $4X_1 + 6X_2 \geq 0$**

**$X_1 \geq 1$   $X_2 \leq 15$**

**$X_1 \leq 20$**

**$X_1 \geq 0$  ,  $X_2 \geq 0$   $X_1 \geq 0$  ,  $X_2 \geq 0$**

**Rpta.**  $X_1=16$  ,  $X_2=12$  , F.O.  $Z=88$  **Rpta.**  $X_1=0$  ,  $X_2=0.50$  , F.O.  $Z=2.50$

**3.- MAXIMIZAR  $3X_1 + 6X_2$  4.- MAXIMIZAR  $6X_1 + 8X_2$**

**SUJETO A: SUJETO A:**

**$X_2 \leq 12$   $5X_1 - 6X_2 \leq 0$**

$$X_1 \leq 5 - X_1 - 6X_2 \leq -2$$

$$X_1 - 4X_2 = 0 \quad X_2 \leq 15$$

$$X_1 \leq 20$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$\text{Rpta. } X_1=5, X_2=1.25, \text{ F.O. } Z=22.5 \quad \text{Rpta. } X_1=18, X_2=15, \text{ F.O. } Z=228$$

$$5.- \text{ MINIMIZAR } 6X_1 + 9X_2 \quad 6.- \text{ MINIMIZAR } 5X_1 + 6X_2$$

$$\text{SUJETO A: SUJETO A:}$$

$$5X_1 + 6X_2 \leq 120 \quad 3X_1 + 6X_2 \geq 12$$

$$4X_1 - 6X_2 \geq 0 \quad 4X_1 - 6X_2 \leq 0$$

$$-X_1 \geq -10 \quad X_2 \geq 12$$

$$X_2 \geq 1 \quad X_1 + 4X_2 \geq 1$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$\text{Rpta. } X_1=1.50, X_2=1, \text{ F.O. } Z=18 \quad \text{Rpta. } X_1=0, X_2=12, \text{ F.O. } Z=72$$

$$7.- \text{ MAXIMIZAR } 10X_1 + 12X_2 \quad 8.- \text{ MINIMIZAR } 7X_1 - 7X_2$$

$$\text{SUJETO A: SUJETO A:}$$

$$6X_1 + 7X_2 \geq 10 \quad 4X_1 - 5X_2 \geq 0$$

$$5X_1 - 5X_2 \leq 0 \quad X_1 - 3X_2 \leq 0$$

$$X_1 \geq 1 \quad X_1 \geq 2$$

$$X_2 \leq 12 \quad X_2 \leq 10$$

$$2X_1 + 4X_2 \geq 0$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$\text{Rpta. } X_1=12, X_2=12, \text{ F.O. } Z=264 \quad \text{Rpta. } X_1=2, X_2=1.6, \text{ F.O. } Z=2.8$$

$$9.- \text{ MAXIMIZAR } 5X_1 + 6X_2 \quad 10.- \text{ MINIMIZAR } X_1 - X_2$$

$$\text{SUJETO A: SUJETO A:}$$

$$5X_1 - 6X_2 \geq 0 \quad -2X_1 - 5X_2 \leq -2$$

$$-X_1 \geq -19 \quad 3X_1 - 4X_2 \geq -12$$

$$-2X_1 - 7X_2 \geq -10 \quad 3X_1 - 4X_2 \leq 0$$

$$X_2 \geq 1 \quad X_2 \leq 10$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Rpta.  $X_1=5.5$  ,  $X_2=1$  , F.O.  $Z=33.5$  Rpta.  $X_1=0$  ,  $X_2=10$  , F.O.  $Z= -10$

32

## GRAFICAS

32

í