

Cálculo de volúmenes

Al introducir la integración, vimos que el área es solamente una de las muchas aplicaciones de la integral definida. Otra aplicación importante la tenemos en su uso para calcular el volumen de un sólido tridimensional.

Si una región de un plano se gira alrededor de un eje E de ese mismo plano, se obtiene una región tridimensional llamada **sólido de revolución** generado por la región plana alrededor de lo que se conoce como **eje de revolución**. Este tipo de sólidos suele aparecer frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción. Son ejemplos de sólidos de revolución: ejes, embudos, pilares, botellas y émbolos.

Existen distintas fórmulas para el volumen de revolución, según se tome un eje de giro paralelo al eje OX o al eje OY . Incluso a veces, es posible hallar el volumen de cuerpos que no son de revolución.

1. Volúmenes de revolución: El Método de los discos

Si giramos una región del plano alrededor de un eje obtenemos un sólido de revolución. El más simple de ellos es el cilindro circular recto o **disco**, que se forma al girar un rectángulo alrededor de un eje adyacente a uno de los lados del rectángulo. El volumen de este disco de radio R y de anchura Δx es:

Volumen del disco =

Para ver cómo usar el volumen del disco para calcular el volumen de un sólido de revolución general, consideremos una función continua $f(x)$ definida en el intervalo $[a,b]$, cuya gráfica determina con las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, el recinto R . Si giramos este recinto alrededor del eje OX , obtenemos un sólido de revolución.

Se trata de hallar el volumen de este cuerpo engendrado por R . Para ello hay que seguir un proceso similar al realizado en la definición de integral definida.

Elegimos una partición regular de $[a, b]$:

Estas divisiones determinan en el sólido n discos cuya suma se aproxima al volumen del mismo. Teniendo en cuenta que el volumen de un disco es $\pi R^2 \Delta x$, la suma de Riemann asociada a la partición, y que da un volumen aproximado del sólido es:

siendo:

- Δx , la altura (anchura) de los cilindros parciales
- R , el radio de los cilindros parciales

Si el número de cilindros parciales aumenta, su suma se aproxima cada vez más al volumen del sólido; es decir:

Por tanto, recordando la definición de integral definida de Riemann se obtiene que:

Además, si se toma el eje de revolución verticalmente, se obtiene una fórmula similar:

2. Volúmenes de revolución: El Método de las arandelas

El método de los discos puede extenderse fácilmente para incluir sólidos de revolución con un agujero, reemplazando el disco representativo por una **arandela** representativa. La arandela se obtiene girando un rectángulo alrededor de un eje. Si R y r son los radios externos e internos de la arandela, y y es la anchura de la arandela, entonces el volumen viene dado por:

Volumen de la arandela =

Entonces, generalizando de forma análoga como se hizo en el método de los discos, si tenemos dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ definidas en un intervalo cerrado $[a,b]$ con $0 < g(x) < f(x)$, y las rectas $x = a$, y $x = b$, el volumen engendrado se calcula restando los sólidos de revolución engendrados por los recintos de ambas funciones, es decir:

Si las funciones se cortan, habrá que calcular los volúmenes de los sólidos engendrados en cada uno de los subintervalos donde se puede aplicar el método anterior.

3. Método de secciones conocidas

En este apartado veremos cómo se calcula el volumen de algunos cuerpos geométricos cuando conocemos el área de las bases de los cilindros parciales en que hemos dividido el sólido. Con el método de discos, podemos hallar el volumen de un sólido que tenga una sección circular cuya área sea $A = R^2$. Podemos generalizar este método a sólidos de cualquier forma siempre y cuando sepamos la fórmula del área de una sección arbitraria, como cuadrados, rectángulos, triángulos, semicírculos y trapecios.

Consideremos un sólido que tiene la propiedad de que la sección transversal a una recta dada tiene área conocida. Esto equivale a decir intuitivamente que en cada corte que hacemos, conocemos el área de la sección correspondiente.

En particular, supongamos que la recta es el eje OX y que el área de la sección transversal está dada por la función $A(x)$, definida y continua en $[a,b]$. La sección $A(x)$ está producida por el plano a perpendicular a OX .

Siguiendo un proceso similar al realizado en la definición de la integral de Riemann:

Elegimos una partición regular de $[a,b]$:

Estas divisiones determinan en el sólido n secciones o rodajas cuya suma se aproxima al volumen del mismo. Teniendo en cuenta que el volumen de un cilindro es R^2 , la suma de Riemann asociada a la partición, y que da un volumen aproximado del sólido es:

siendo:

- Siendo c_i un punto intermedio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, la altura de los cilindros parciales
- $R_i^2 = A(c_i)$ el área de la base de los cilindros parciales

Si el número de cilindros parciales aumenta, su suma se aproxima cada vez más al volumen del sólido; es decir:

Por tanto, recordando la definición de integral definida de Riemann se obtiene que:

Para hallar el volumen de un sólido por el método de las secciones, se procede como se indica a continuación:

1. Esbozar la figura, incluyendo un eje perpendicular a las secciones de área conocida (es decir, un eje OX)

2. Escoger una sección perpendicular al eje OX .
3. Expresar el área $A(x)$ de la base de la sección en términos de su posición x sobre el eje OX .
4. Integrar entre los límites apropiados.

4. Volúmenes de revolución: Método de capas

En esta sección estudiamos un método alternativo para el cálculo de un volumen de un sólido de revolución, un método que emplea capas cilíndricas.

Para introducir el **método de capas**, consideramos un rectángulo representativo, donde:

- Δx = anchura del rectángulo (espesor).
- h = altura del rectángulo.
- p = distancia del centro del rectángulo al eje del giro (radio medio).

Cuando este rectángulo gira en torno al eje de revolución, engendra una capa cilíndrica (o tubo) de anchura Δx . Para calcular el volumen de esta capa consideramos dos cilindros. El radio del mayor corresponde al radio externo de la capa, y el radio del menor al radio interno de la capa. Puesto que p es el radio medio de la capa, sabemos que el radio externo es $p + (\Delta x/2)$, y el radio interno es $p - (\Delta x/2)$. Por tanto, el volumen de

la capa, viene dado por la diferencia:

$$\text{Volumen de la capa} = \text{volumen del cilindro} - \text{volumen del agujero} =$$

$$= 2\pi p h \Delta x = 2\pi (\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})$$

Usamos esta fórmula para calcular el volumen de un sólido de revolución como sigue. Suponemos que la región plana gira sobre una recta y engendra así dicho sólido. Si colocamos un rectángulo de anchura Δx y paralelamente al eje de revolución, entonces al hacer girar la región plana en torno al eje de revolución, el rectángulo genera una capa de volumen:

$$V = 2\pi [p(y)h(y)] \Delta x$$

Si aproximamos el volumen del sólido por n de tales capas de anchura Δx , altura $h(y_i)$, y radio medio $p(y_i)$, tenemos:

$$\text{volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^n 2\pi p(y_i) h(y_i) \Delta x$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que:

$$\text{Volumen del sólido} = \int_a^b 2\pi p(y) h(y) dy$$

Por tanto, podemos enunciar el método de capas de la siguiente forma:

Para calcular el volumen de un sólido de revolución con el método de capas, se usa una de las dos siguientes opciones:

Eje horizontal de revolución:

Eje vertical de revolución:

Para hallar el volumen de un sólido por el método de capas, se procede como se indica a continuación.

1. Esbozar la región plana que va a ser girada, hallando los puntos de intersección de las curvas que la limitan.
2. Sobre el dibujo hallar un rectángulo paralelo al eje de revolución.
3. Teniendo como base el boceto, escribir el volumen de la capa.
4. Integrar entre los límites apropiados.

Observación: Los método de discos y de capas se distinguen porque en el de discos el rectángulo representativo es siempre perpendicular al eje de giro, mientras que en el de capas es paralelo.

Con frecuencia uno de los dos métodos es preferible al otro.

Cálculo de longitudes:

longitud de revolución =

longitud de revolución entre funciones =