

Escritura y propiedades de los números

“Dios creó los números naturales. Los demás números son cosa del hombre.”

Leopold Kronecker (1823-1891).

Durante ciertos periodos de la historia, los números naturales se consideraron un conocimiento innato, o un regalo de los dioses. Pero según aparecían nuevos problemas, hubo que “construir” otras familias de números para resolverlos: números decimales para mejorar las operaciones técnicas, números enteros para los intercambios comerciales, números racionales e irracionales para medir tamaños, etc.

A continuación estudiamos los diferentes grupos o conjuntos de números.

I. Grupos o conjuntos de números

Distinguimos entre varios grupos de números:

Designamos con la letra N el conjunto de los números enteros positivos o **números naturales**.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$$

$N =$

Designamos con la letra Z el conjunto de los **números enteros**.

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$$

$Z =$

Designamos con la letra D el conjunto de los **números decimales**. Estos números pueden tener:

—un número finito o limitado de cifras después de la coma: son los números decimales exactos; o

—un número infinito de cifras, que se repiten de forma periódica: son los números decimales periódicos. A su vez, estos se clasifican en periódicos puros, si las cifras comienzan a repetirse a partir de la coma, o periódicos mixtos, si entre la coma y las cifras que se repiten (llamadas periodo) hay una o más cifras (llamadas anteperiodo).

$$\frac{7}{25} = 0,28$$

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots$$

Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es un número decimal exacto, sin embargo $\frac{1}{3}$ es un número decimal periódico puro, cuyo periodo es la cifra 3.

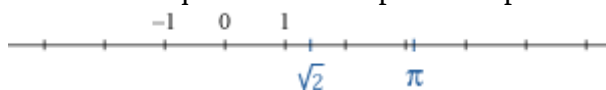
Designamos con la letra Q el conjunto de los **números racionales**, que incluye los números enteros y los números decimales, sean exactos o periódicos. Son, por tanto,

números que se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b}$ donde $a \in Z$ y $b \in Z$ (son cocientes de números enteros).

$$-12 = \frac{-12}{1} \quad \frac{1}{3} = 0,333\dots$$

Por ejemplo, -12 y $\frac{1}{3}$ son números racionales, pero $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Designamos por R el conjunto de los **números reales**. Este conjunto comprende todos los números que usamos. Se pueden representar sobre una recta llamada **recta real**:



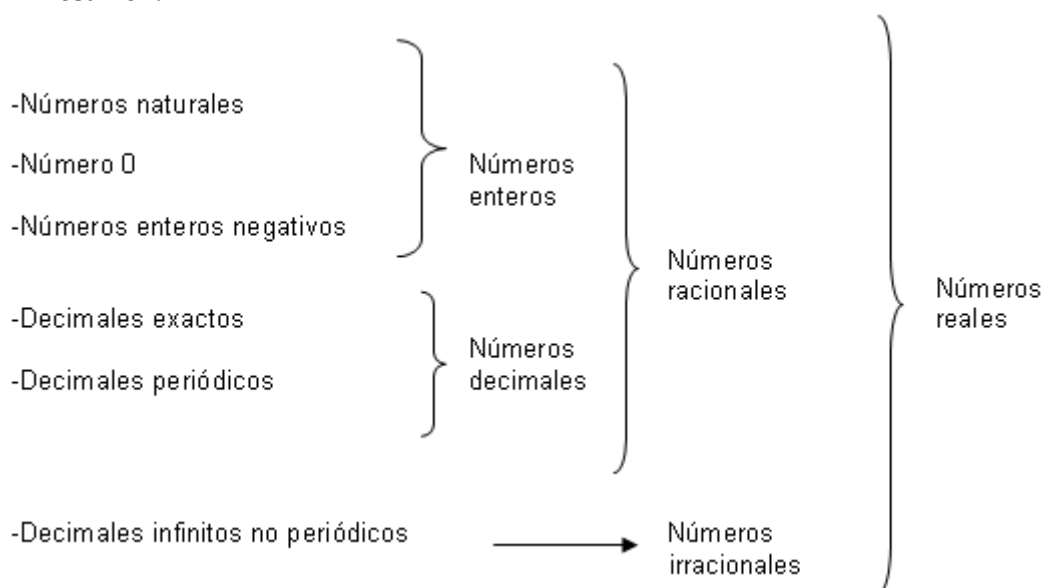
Cada número real queda representado por un punto y cada punto representa un número real.

Este conjunto incluye los **números irracionales**, que son aquellos números reales que no son racionales.

Según lo que hemos visto hasta ahora, un número natural es también un número entero; un número entero es también un número racional, etc. Esta relación entre los conjuntos de números la podemos expresar así:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

En resumen:



II. ¿A qué grupo o grupos de números pertenece un número dado?

Para reconocer de qué tipo es un número:

—Hemos de simplificar su escritura tanto como sea posible.

—En el caso de una fracción irreducible $\frac{a}{b}$ tendremos que hallar la división. Si es finita

(es decir, si el resto es cero) entonces $\frac{a}{b}$ es un número decimal exacto; si es infinita, puede haber dos posibilidades, que sea un decimal periódico, o que no sea periódico, en cuyo caso sería un número irracional.

—Si no podemos escribir el número como cociente entre enteros, es un número irracional.

III. Escribir un número decimal

En asignaturas de ciencias, a menudo utilizamos potencias de 10 para escribir un número decimal, lo cual nos da una idea del tamaño del número.

Ejemplo:

Sea el número decimal 28.642,357.

Lo podemos escribir como un número entero y una potencia de 10: $28.642.357 \times 10^{-3}$.

Utilizando la **notación científica**, este número se escribiría usando un número decimal comprendido entre 1 y 10 (excluyendo al 10) y una potencia de 10: $2,8642357 \times 10^4$.

Redondeando el número decimal de la notación científica al número entero más

próximo, obtenemos una aproximación del número: $2,8642357 \times 10^4 \approx 3 \times 10^4$.

IV. Obtener un valor aproximado

Si queremos escribir un número real que no es un número decimal exacto, en forma de número decimal, tenemos que usar un valor aproximado.

$$\frac{1}{3} \approx 0,333$$

Por ejemplo, $\frac{1}{3}$. Es una aproximación, no es exactamente igual, porque los “3” se repiten indefinidamente.

Se puede obtener un valor aproximado redondeando por exceso o por defecto. Decimos

que hemos redondeado un número hasta el valor 10^{-p} , siendo p un número entero,

cuando la diferencia entre el número y su valor aproximado es menor que 10^{-p} .

Para determinar el valor de un número real positivo aproximándolo a n cifras decimales:

—Si redondeamos por defecto, truncamos el número reduciéndolo a n cifras decimales (lo que significa eliminar las cifras decimales que quedan a partir de la n -ésima, contando desde la coma).

—Si redondeamos por exceso, tomamos el valor aproximado que se obtiene al redondear por defecto y añadimos 1 a la última cifra decimal (lo que significa añadir 10^{-p} a la aproximación por defecto).

Para aproximar un número real negativo a n cifras decimales:

—Si redondeamos por exceso, truncamos el número dejándolo con n cifras decimales.

—Si redondeamos por defecto, tomamos el valor aproximado que se obtiene al redondear por exceso y añadimos 1 a la última cifra decimal.

Para redondear un número real a n cifras decimales, acortamos el número, dejándolo con n cifras decimales, y entonces:

—el número acortado es el valor redondeado si la cifra decimal $n + 1$ es 0, 1, 2, 3 o 4;

—cuando la cifra decimal $n + 1$ del número real sea 5, 6, 7, 8 o 9, el valor redondeado se obtiene sumando 1 a la última cifra decimal del número acortado.

V. Criterios de divisibilidad y números primos

Decimos que un número a es divisible por otro número b cuando existe un número q , tal que $a = bq$.

Podemos entonces decir que b es un divisor o factor de a y que a es un múltiplo de b .

Para hallar los divisores de un número, hemos de conocer los siguientes **criterios de divisibilidad**:

—un número es divisible por 2 si su última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8;

—un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3;

—un número es divisible por 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es divisible por cuatro;

—un número es divisible por 5 si su última cifra es 0 o 5;

—un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9;

—un número es divisible por 10 si su última cifra es 0;

—un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar par y la suma de las que ocupan lugar impar es 0 o múltiplo de 11.

Un **número primo** es un número natural que solo tiene dos divisores: 1 y él mismo.

Es importante conocer cuáles son los números primos más pequeños (los hallamos usando la criba de Eratóstenes). Estos números son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101...

Para averiguar si un número es primo:

—en primer lugar, comprobamos que no satisfaga ninguno de los criterios de divisibilidad anteriores;

—a continuación, dividimos el número entre 7, 11, 13, 17,... comprobando que el resto de la división no sea cero (que no sea una división exacta). Cuando el cociente llega a ser más pequeño que el divisor, no es necesario continuar.

VI. Descomposición de un número en sus factores primos

252 no es un número primo, ya que $252 = 4 \cdot 9 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$. Así pues, el número 252 es un producto de números primos. De forma general, podemos decir que cualquier entero que sea mayor que o igual a 2 es primo o es producto de números primos.

Cuando descomponemos un número en producto de sus factores primos, decimos que lo hemos **factorizado**.

Para descomponer un número en producto de sus factores primos, por ejemplo 72, podemos:

—usar las tablas de multiplicación: $72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$;

—o dividir sucesivamente entre 2, 3, 5, 7, etc. En nuestro ejemplo, obtenemos la tabla siguiente:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

De aquí, obtenemos que $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

Utilizamos la descomposición en factores primos para simplificar fracciones y radicales. También la usamos para hallar el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo de un grupo de números.

Recuerda

$N \subset Z \subset Q \subset R$.

Expresar un número decimal en notación científica supone escribirlo como el producto de un número decimal comprendido entre 1 y 10 (excluyendo al 10) por una potencia de 10.

Un número primo es un número natural que solo es divisible por sí mismo y por la unidad.