

INTRO. ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS

La descripción matemática del movimiento constituye el objeto de una parte de la física denominada cinemática. Tal descripción se apoya en la definición de una serie de magnitudes que son características de cada movimiento o de cada tipo de movimientos. Los movimientos más sencillos son los rectilíneos y dentro de éstos los uniformes. Los movimientos circulares son los más simples de los de trayectoria curva. Unos y otros han sido estudiados desde la antigüedad ayudando al hombre a forjarse una imagen o representación del mundo físico.

«Vamos a establecer una ciencia nueva sobre un tema muy antiguo. Tal vez no haya en la naturaleza nada más antiguo que el movimiento y acerca de él son numerosos y extensos los volúmenes escritos por los filósofos. Sin embargo, entre sus propiedades encuentro muchas que aun siendo dignas de ser conocidas, todavía no han sido observadas ni demostradas hasta ahora. Se ha fijado la atención en algunas que son más directas e inmediatamente observables, como por ejemplo, que el movimiento natural de caída de los cuerpos se acelera continuamente; pero, sin embargo, no se ha hallado, hasta ahora, en qué proporción tiene lugar esta aceleración... Se ha observado que los cuerpos lanzados, es decir, los proyectiles, describen una línea curva de cierto tipo, pero nadie ha puesto en evidencia que dicha curva es una parábola. Yo demostraré que esto es así, y también otras cosas dignas de ser conocidas; y lo que es más importante, dejaré abiertos la puerta y el acceso a una vasta e importantísima ciencia cuyos fundamentos serán estas mismas investigaciones. Otras mentes más agudas que la mía penetrarán después en ella hasta alcanzar mayores profundidades.»

GALILEO GALILEI (1564–1642)

La observación y el estudio de los movimientos ha atraído la atención del hombre desde tiempos remotos. Así, es precisamente en la antigua Grecia en donde tiene su origen la sentencia «Ignorar el movimiento es ignorar la naturaleza», que refleja la importancia capital que se le otorgaba al tema. Siguiendo esta tradición, científicos y filósofos medievales observaron los movimientos de los cuerpos y especularon sobre sus características. Los propios artilleros manejaron de una forma práctica el tiro de proyectiles de modo que supieron inclinar convenientemente el cañón para conseguir el máximo alcance de la bala. Sin embargo, el estudio propiamente científico del movimiento se inicia con Galileo Galilei. A él se debe una buena parte de los conceptos que aparecen recogidos en este capítulo.

EL MOVIMIENTO Y SU DESCRIPCIÓN

Se dice que un cuerpo se mueve cuando cambia su posición respecto de la de otros supuestos fijos, o que se toman como referencia. El movimiento es, por tanto, cambio de posición con el tiempo.

El carácter relativo del movimiento

De acuerdo con la anterior definición, para estudiar un *movimiento* es preciso fijar previamente la *posición del observador* que contempla dicho movimiento. En física hablar de un observador equivale a situarlo fijo con respecto al objeto o conjunto de objetos que definen *el sistema de referencia*. Es posible que un mismo cuerpo esté en reposo para un observador –o visto desde un sistema de referencia determinado– y en movimiento para otro.

Así, un pasajero sentado en el interior de un avión que despegue estará en reposo respecto del propio avión y en movimiento respecto de la pista de aterrizaje. Una bola que rueda por el suelo de un vagón de un tren en marcha, describirá movimientos de características diferentes según sea observado desde el andén o desde uno de los asientos de su interior.

El estado de reposo o de movimiento de un cuerpo no es, por tanto, *absoluto* o independiente de la situación del observador, sino *relativo*, es decir, depende del sistema de referencia desde el que se observe.

El concepto de cinemática

Es posible estudiar el movimiento de dos maneras:

- a) describiéndolo, a partir de ciertas magnitudes físicas, a saber: posición, velocidad y aceleración (cinemática);
- b) analizando las causas que originan dicho movimiento (dinámica).

En el primer caso se estudia *cómo* se mueve un cuerpo, mientras que en el segundo se considera el *porqué* se mueve.

La cinemática es la parte de la física que estudia cómo se mueven los cuerpos sin pretender explicar las causas que originan dichos movimientos.

El concepto de trayectoria

Para simplificar el estudio del movimiento, representaremos a los cuerpos móviles por puntos geométricos, olvidándonos, por el momento, de su forma y tamaño.

Se llama trayectoria a la línea que describe el punto que representa al cuerpo en movimiento, conforme va ocupando posiciones sucesivas a lo largo del tiempo. La estela que deja en el cielo un avión a reacción o los raíles de una línea de ferrocarril son representaciones aproximadas de esa línea imaginaria que se denomina trayectoria

Según sea la forma de su trayectoria los movimientos se clasifican en rectilíneos y curvilíneos. Un coche que recorra una calle recta describe un movimiento rectilíneo, mientras que cuando tome una curva o dé una vuelta a una plaza circular, describirá un movimiento curvilíneo.

LA POSICIÓN Y LOS CAMBIOS DE ...

La definición de la posición de un cuerpo móvil se efectúa con la ayuda de las matemáticas. Aun cuando pudiera parecer que la distancia a un punto fijo constituye una buena medida de la posición de un cuerpo, esto no es siempre cierto. Basta imaginar, por ejemplo, el movimiento de una noria. Todos sus carricoches equidistan del punto central; no hay por tanto variación de la distancia al centro y, sin embargo, hay cambio de posición, es decir, existe movimiento.

En los movimientos rectilíneos

La definición de la posición y de sus cambios en los movimientos rectilíneos puede hacerse asignando a cada punto un número real, que representa la distancia a otro punto fijo O tomado como origen. Si el punto O se sitúa en un extremo de la trayectoria, todos los números o coordenadas x de posición serán positivos. Tal es el caso del kilómetro cero situado en la Puerta del Sol de Madrid, de donde parten todas las carreteras de España. Los postes kilométricos reflejan, por ello, únicamente números positivos.

Es posible, no obstante, fijar el origen O de coordenadas en un punto central de la recta trayectoria; en tales casos las posiciones a la izquierda de O se representarán mediante números negativos y las situadas a la derecha mediante números positivos. En los movimientos vibratorios o de vaivén el origen O se suele situar en el punto central, lo que da lugar a la aparición tanto de coordenadas positivas como negativas.

Los cambios de posición o *desplazamientos* pueden calcularse como diferencias entre las coordenadas correspondientes. Utilizando el símbolo D de incremento o diferencia, el desplazamiento que experimenta el móvil en un intervalo de tiempo $Dt = t - t_0$ determinado vendrá dado por la expresión $Dx = x - x_0$, donde x representa la coordenada correspondiente al instante final t y x_0 es la coordenada del punto móvil en el instante inicial t_0 . Cuando todas las coordenadas son positivas el desplazamiento Dx representa simplemente la distancia entre los puntos inicial y final.

En los movimientos curvilíneos

Los movimientos curvilíneos se dan en el plano o en el espacio, son, por tanto, movimientos bi o incluso tridimensionales. Ello hace que para expresar la posición sea necesario especificar algo más que un sólo número. Así, para definir la posición de un avión en pleno vuelo se requieren tres números o coordenadas que indiquen la latitud, la longitud geográfica y la altitud respectivamente. Los dos primeros establecen la posición del punto sobre el globo terrestre y el segundo informa sobre la altura a que se encuentra sobre la vertical trazada sobre el punto determinado por las dos primeras coordenadas. En el caso más sencillo de que la trayectoria sea una curva contenida en un plano, serán suficientes dos coordenadas para definir la posición.

Del mismo modo que en los movimientos rectilíneos o unidimensionales el origen O representa el punto fijo, que se toma como referencia, en los movimientos planos o bidimensionales el sistema de referencia queda representado por un conjunto de dos ejes perpendiculares X e Y y la posición del punto móvil P respecto de dicho sistema vendrá dada por sus correspondientes coordenadas x e y , es decir, $P(x,y)$. En estos movimientos más complejos el desplazamiento se puede medir por el segmento que une los puntos inicial P_1 y final P_2 y su cálculo se efectúa a partir de los valores de sus coordenadas.

No obstante lo anterior, si se conoce de antemano la trayectoria de un movimiento, aun cuando éste sea curvilíneo, podrá expresarse la posición del punto móvil mediante un número, como si fuera realmente rectilíneo, siempre que la trayectoria esté coordenada. Así, cuando se indica por radioteléfono que un coche está averiado en el punto kilométrico 86,300 de la carretera nacional Madrid-Burgos, a pesar del carácter curvilíneo de ésta, la posición queda definida sin ambigüedad. En general, pues, el espacio s –o distancia recorrida por el móvil sobre una trayectoria conocida cualquiera y medido a partir del origen–, determinará la posición del móvil y permitirá, por tanto, el estudio y descripción de los movimientos, incluso de los curvilíneos, como si fueran rectilíneos.

FORMAS DE DEFINIR LA POSICIÓN Y SUS CAMBIOS

Se puede definir la posición de un cuerpo móvil de tres maneras:

Escalarmente. Si la trayectoria es conocida y está coordenada de modo que el origen O se toma en un punto extremo de la misma el espacio recorrido por el punto móvil P indicará cuál es su posición. Conforme transcurre el tiempo, s crece y por tanto su variación Ds para cualquier intervalo de tiempo será siempre positiva. Esta definición de la posición y de sus cambios es puramente escalar, puesto que no informa sobre el sentido del movimiento.

Pseudo escalarmente. Es posible coordinar la trayectoria conocida, fijado el origen O en un punto intermedio. En tal caso la coordenada s puede ser negativa, cuando el punto P está a la izquierda de O , y positiva cuando está a su derecha.

Si el punto móvil P se dirige de izquierda a derecha el valor de la coordenada s aumenta en cualquier caso y por tanto Ds es positivo. Si el punto P se dirige de derecha a izquierda el sentido del movimiento corresponde al de los valores decrecientes de s , tanto si el móvil está en la parte negativa de la trayectoria como si está en la parte positiva. Ello significa que s es entonces negativo. Por consiguiente el signo de Ds indica, en estos casos, el sentido del movimiento que será de la parte negativa hacia la parte positiva de la trayectoria si Ds es

positivo y opuesto cuando D_s sea negativo.

Vectorialmente. Las coordenadas x e y de un punto P que se mueve en un plano permiten fijar la posición sin necesidad de conocer la trayectoria. Esta forma de definir la posición y sus cambios en un movimiento es la más general y puede expresarse también mediante un segmento orientado o vector, que tenga como origen el origen O del sistema de ejes XY y como extremo el punto móvil P . Dicho vector se denomina vector de posición y se representa en la forma $\mathbf{r}$. La línea descrita por el extremo o flecha del vector de posición durante el movimiento es precisamente la trayectoria.

Los cambios o variaciones de la posición se representan en la forma $D\mathbf{r}$ y describen el desplazamiento del móvil en el intervalo de tiempo Dt que transcurre entre las posiciones extremas $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ correspondientes. Este vector $D\mathbf{r}$ que se denomina vector desplazamiento constituye, por tanto, el vector diferencia de los vectores de posición inicial y final, es decir, $D\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

LA VELOCIDAD

La descripción de un movimiento supone el conocer algo más que su trayectoria. Una característica que añade una información importante sobre el movimiento es la rapidez. En general, cuando algo cambia con el tiempo se emplea el término de rapidez para describir su ritmo de variación temporal. En cinemática la rapidez con la que se produce un movimiento se denomina *velocidad* y se define como el espacio que recorre el móvil sobre la trayectoria en la unidad de tiempo.

Velocidad constante

Decir que un cuerpo se mueve con velocidad constante es lo mismo que decir que la rapidez de su movimiento no varía, es decir, que va recorriendo la trayectoria y ganando espacio siempre al mismo ritmo. Los movimientos de los trenes o los de los coches en una autopista se aproximan bastante en algunos tramos a movimientos de velocidad constante. En dos intervalos de tiempo cualesquiera de igual duración el cuerpo cubrirá la misma distancia. El móvil recorre, por tanto, espacios iguales en tiempos iguales, lo que significa que cuando la velocidad es constante el espacio s que recorre el cuerpo móvil sobre la trayectoria y el tiempo t que emplea en recorrerlo son magnitudes directamente proporcionales.

La anterior relación de proporcionalidad se expresa matemáticamente en la forma:

$$s = v \cdot t \quad (2.1)$$

siendo v constante.

Dividiendo por t los dos miembros de esta ecuación resulta la expresión de v :

$$v = \frac{s}{t} \quad (2.2)$$

La unidad de medida de la velocidad es el cociente entre la unidad de medida de espacio o distancia y la unidad de tiempo. En el Sistema Internacional (SI) es el *metro/segundo* (m/s) o ms^{-1} . Sin embargo, resulta muy frecuente en la vida diaria la utilización de una unidad práctica de velocidad, el *kilómetro/hora* (km/h), que no corresponde al SI. La relación entre ambas es la que sigue:

$$1 \text{ km/h} = \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$$

o inversamente

$$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$$

Velocidad media

La prensa diaria publica, de vez en cuando, la velocidad media de circulación en automóvil característica de las grandes ciudades. En Madrid, por ejemplo, se cifra en 20 km/h. Ello no significa que los coches se desplacen por las calles siempre a esa velocidad. Tomando como referencia un trayecto de 10 km, el coche puede alcanzar los 60 o incluso los 70 km/h, pero en el trayecto completo ha de frenar y parar a causa de las retenciones, de modo que para cubrir los 10 km del recorrido establecido emplea media hora. La velocidad del coche ha cambiado con el tiempo, pero, en promedio, y a efectos de rapidez el movimiento equivale a otro que se hubiera efectuado a una velocidad constante de 20 km/h.

El cociente entre el espacio Δs recorrido por un móvil en un intervalo de tiempo y el valor Δt de dicho intervalo se denomina *velocidad media* v_m , es decir:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Si se representa el tiempo o instante inicial medido por un cronómetro como t_0 y el final mediante t , las distancias al origen, correspondientes a ambos instantes, se podrán escribir como s_0 y s respectivamente, de modo que la expresión anterior equivale a esta otra:

$$v_m = \frac{s - s_0}{t - t_0} \quad (2.4)$$

Si el instante inicial t_0 se toma como origen de tiempos y el punto en el que se halla el móvil en ese instante se considera como el punto O u origen de espacios sobre la trayectoria, entonces $t_0 = 0$, $s_0 = 0$ y la ecuación anterior se convierte en:

$$v_m = \frac{s}{t} \quad (2.5)$$

La comparación entre las ecuaciones (2.2) de la velocidad constante y (2.5) de la velocidad media indica que el valor de ésta puede considerarse como el de una velocidad constante equivalente.

Velocidad instantánea

En general, la velocidad con la que se mueve un coche, un avión o una motocicleta, por ejemplo, varía de un instante a otro. Ello queda reflejado en el movimiento de la aguja de sus respectivos velocímetros. El valor que toma la velocidad en un instante dado recibe el nombre de *velocidad instantánea*.

Aun cuando la noción de instante, al igual que la noción de punto, constituye una abstracción, es posible aproximarse bastante a ella considerándola como un intervalo de tiempo muy pequeño. Así, la lectura del velocímetro se produce en centésimas de segundos y ese tiempo puede ser tomado en el movimiento de un coche como un instante, ya que durante él la velocidad prácticamente no cambia de magnitud.

La letra griega Δ

empleada habitualmente para representar incrementos o diferencias equivale a la D mayúscula, así que variaciones muy pequeñas se podrán expresar, utilizando un símbolo análogo, mediante la d minúscula. Un intervalo de tiempo muy pequeño, equiparable a un instante, se representará entonces como dt y la correspondiente variación del espacio medido sobre la trayectoria vendrá dado por ds . De modo que la velocidad instantánea v se podrá escribir en la forma:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Aun cuando esta expresión tiene un significado matemático preciso que permite su manejo en cálculos y operaciones complicadas, su significado físico corresponde al cociente de dos incrementos o variaciones muy pequeñas y, además, relacionadas entre sí.

LA ACELERACIÓN

En los movimientos ordinarios la velocidad no se mantiene constante, sino que varía con el tiempo. En tales casos es posible definir una nueva magnitud que describa la rapidez con la que se producen tales variaciones de la velocidad. Dicha magnitud se denomina *aceleración*. Se define como lo que varía la velocidad en la unidad de tiempo y representa, por tanto, el ritmo de variación de la velocidad con el tiempo.

Una de las características que definen la potencia de un automóvil es su capacidad para ganar velocidad. Por tal motivo, los fabricantes suelen informar de ello al comprador, indicando qué tiempo (en segundos) tarda el modelo en cuestión en alcanzar los 100 km/h partiendo del reposo. Ese tiempo, que no es propiamente una aceleración, está directamente relacionado con ella, puesto que cuanto mayor sea la rapidez con la que el coche gana velocidad, menor será el tiempo que emplea en pasar de 0 a 100 km/h. Un modelo que emplee 5,4 s en conseguir los 100 km/h habrá desarrollado una aceleración que puede calcularse del siguiente modo:

$$\frac{100 \text{ km/h}}{5,4 \text{ s}} = \frac{100 \cdot 1/3,6 \text{ m/s}}{5,4 \text{ s}} = 5,1 \text{ m/s}^2$$

Lo que significa que ha aumentado su velocidad en 5,1 m/s en cada segundo.

Aceleración constante

Un cuerpo que se mueva con aceleración constante irá ganando velocidad con el tiempo de un modo uniforme, es decir, al mismo ritmo. Eso significa que lo que aumenta su velocidad en un intervalo dado de tiempo es igual a lo que aumenta en otro intervalo posterior, siempre y cuando las amplitudes o duraciones de ambos intervalos sean iguales. En otros términos, el móvil gana velocidad en cantidades iguales si los tiempos son iguales y la velocidad resulta, en tales casos, directamente proporcional al tiempo.

Del mismo modo que para definir la velocidad es necesario poner la atención en la relación entre espacio y tiempo, para definir la aceleración es preciso pensar sólo en términos de velocidad y tiempo. La relación de proporcionalidad análoga a la (2.1) se expresa ahora para las magnitudes v y t en la forma:

$$v = a \cdot t \quad (2.6)$$

siempre y cuando a sea constante y el móvil parta del reposo.

Dividiendo por t ambos miembros de la ecuación (2.6) resulta la expresión de la aceleración constante:

$$a = \frac{v}{t}$$

(2.7)

La unidad de medida de la aceleración en el SI es el cociente entre las unidades correspondientes a las magnitudes velocidad y tiempo, es decir, m/s/s que se expresa en la forma m/s² o m · s⁻².

Aceleración media

La aceleración media representa lo que por término medio varía la velocidad en cada unidad de tiempo. Aun cuando la velocidad de un móvil cambie de un modo irregular, o no uniforme, es posible considerar otro movimiento equivalente al anterior, en lo que a la ganancia de velocidad respecta, que aumente su velocidad lo mismo y en el mismo tiempo, pero sólo que a un ritmo constante. La aceleración de ese movimiento equivalente, pero de aceleración constante es, precisamente, *la aceleración media*.

Por analogía con la ecuación (2.3) la expresión de la aceleración media a_m resulta ser:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

(2.8)

En cualquier ecuación física la expresión $\frac{\Delta}{\Delta t}$ representa

una rapidez, la rapidez con la que durante el intervalo Δt varía lo que se pone a continuación de este símbolo. En la

expresión (2.4) v_m representaba la rapidez $\left(\frac{\Delta}{\Delta t}\right)$ con la

que variaba el espacio s . En la ecuación (2.8) a_m representa, por tanto, la rapidez con la que varía la velocidad.

Si se expresa ahora la velocidad en el instante final t como v y la correspondiente al instante inicial t_0 como v_0 , la ecuación (2.8) puede escribirse en la forma:

$$a_m = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

(2.9)

En la cual el numerador representa lo que ha ganado el móvil en velocidad y el denominador representa el tiempo que ha necesitado para ello.

Aceleración instantánea

Es la aceleración referida a un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño como para poder considerar despreciable la variación de la velocidad del móvil durante él. Aun cuando los automóviles no disponen de acelerómetro o medidor de aceleración, su fabricación sería relativamente sencilla y permitiría la lectura instantánea de la magnitud aceleración. Que en un momento dado la columna luminosa de un acelerómetro marcara 7 m/s² significaría que, de mantenerse constante el ritmo de progresión del movimiento leído para ese instante, el automóvil ganaría velocidad a razón de 7 metros por segundo en cada segundo.

Recurriendo a la representación de variaciones o incrementos muy pequeños mediante la letra d es posible escribir la expresión de la *aceleración instantánea* en la forma:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

(2.10)

Deceleraciones

Aun cuando las variaciones de velocidad consideradas hasta ahora han sido únicamente aumentos, un móvil puede también disminuir su velocidad con el tiempo. En tales casos, los valores de la velocidad posteriores en el tiempo son menores que los anteriores, por lo que su variación es negativa y, por tanto, su aceleración, según las ecuaciones (2.9) o (2. 10), también lo es. Esta aceleración negativa es característica de los movimientos de frenado y recibe el nombre de *deceleración*.

La deceleración es un tipo particular de aceleración, por lo que ha de considerarse como tal. Sólo el signo menos indica que está asociada a un movimiento cuya velocidad disminuye con el tiempo.

LAS GRÁFICAS CINEMÁTICAS

La representación gráfica de un movimiento y de sus características permite extraer una información valiosa sobre dicho movimiento.

La trayectoria es una primera descripción gráfica del movimiento; en ella no se recoge (explícitamente) la variable tiempo, sino que se representa únicamente las posiciones del punto móvil, o lo que es lo mismo, la relación entre sus coordenadas a lo largo del movimiento. Es, por tanto, una gráfica espacial.

Las gráficas en las que se refleja la variación de diferentes magnitudes con respecto al tiempo son *gráficas temporales* y por sí mismas proporcionan una buena descripción de las características del movimiento considerado. En todas ellas el tiempo t se representa en el eje horizontal o de abscisas y la magnitud cinemática elegida –como el espacio s , la velocidad v o la aceleración a – se representa en el eje vertical o de ordenadas. La variación con respecto al tiempo de cada una de estas magnitudes da lugar a la correspondiente gráfica o *diagrama cinemático*.

Gráficas espacio–tiempo ($s-t$)

La *gráfica $s-t$* es la gráfica cinemática fundamental, pues representa la relación entre las dos variables básicas en todo movimiento. El espacio s , medido sobre la trayectoria, podría identificarse con el resultado de la lectura del cuentakilómetros de una moto que describiera la trayectoria considerada y el tiempo t sería el resultado de la correspondiente lectura de un cronómetro.

La interpretación de una gráfica $s-t$ se efectúa a través del significado de su pendiente. La pendiente m de una gráfica constituye una medida de su inclinación y viene dada por el cociente entre una variación de la magnitud representada en ordenadas y la variación que le corresponde de la magnitud representada en abscisas. Es, por tanto, el ritmo de variación de una variable con respecto a la otra. En el caso de la gráfica $s-t$, la expresión de la pendiente será entonces del tipo

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ que es precisamente la velocidad.}$$

Así, una gráfica $s-t$ que sea una recta paralela al eje horizontal o de tiempos indica que no existe movimiento; el móvil se encuentra parado a una distancia s_0 del origen o línea de salida y no existe variación de s con

respecto de t . Una recta oblicua que pasa por el origen indica que s varía con t y, además, que lo hace a un ritmo constante, pues la pendiente es siempre la misma. Se trata en este caso de un movimiento de velocidad constante en el cual el espacio recorrido es directamente proporcional al tiempo empleado en recorrerlo. Si la recta corta al eje s a una distancia s_0 está coordenada representa la distancia que separa al móvil del origen O , medida sobre la trayectoria, en el instante inicial. Una gráfica $s-t$ curvilínea, o de pendiente variable, representará un movimiento de velocidad variable en el tiempo.

Aun cuando en la gráfica $s-t$ se represente el espacio, no es una gráfica espacial, es decir, no se trata de algo que pueda verse durante el movimiento, sino de una representación matemática que permite visualizar la forma en la que las variables s y t están relacionadas.

Gráficas velocidad-tiempo ($v-t$)

Al igual que en las gráficas $s-t$ la interpretación de una gráfica $v-t$ presupone el conocimiento del significado de su pendiente. La pendiente de la gráfica $v-t$, como medida del ritmo de variación de la velocidad con respecto al

tiempo $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, coincide con la aceleración.

Así una gráfica $v-t$ rectilínea y paralela al eje de tiempos representa un movimiento de velocidad constante. Es decir, que la pendiente de la recta correspondiente sea nula indica que la aceleración es cero. Si se tratara de un cuerpo en reposo (velocidad nula), entonces la gráfica $v-t$ se confundiría con el propio eje horizontal. Si la gráfica es una recta ascendente, y por tanto de pendiente constante y positiva, se tratará de un movimiento de aceleración constante y positiva. Si por el contrario la recta es descendente, es decir, de pendiente negativa, el movimiento será decelerado o retardado. Una gráfica $v-t$ curvilínea o de pendiente variable representará un movimiento de aceleración variable.

El hecho de que la pendiente de la gráfica $s-t$ represente la velocidad v , indica que las gráficas $s-t$ y $v-t$ deben estar relacionadas. La gráfica $v-t$ es, en efecto, la representación de cómo varía la pendiente de la gráfica $s-t$ con el tiempo; de ahí que la $s-t$ sea fundamental, pues a partir de ella, calculando sus pendientes en diferentes instantes sucesivos y representándolas gráficamente frente a t , se puede obtener indirectamente la $v-t$.

Que una gráfica $s-t$ o $v-t$ sea rectilínea no significa que el movimiento que describe sea también rectilíneo. La descripción que aportan estos diagramas cinemáticos no hacen referencia alguna a los cambios de dirección u orientación en el espacio del punto móvil. De ahí que a partir de ellos no se puede sacar ninguna información sobre la forma de la trayectoria, la cual precisamente recoge esos cambios de orientación.

VECTORES PARA LA CINEMÁTICA

Cuando se pretende estudiar un movimiento de la forma más completa posible, es necesario considerar las magnitudes cinemáticas tales como el desplazamiento, la velocidad o la aceleración de modo que recojan los aspectos direccionales del movimiento, es decir, los cambios de orientación del punto móvil en el espacio y sus consecuencias. Para ello se recurre a los vectores, esos elementos matemáticos que permiten describir los aspectos relativos a la dirección y al sentido.

El vector velocidad

El vector velocidad representa la rapidez con la que cambia la posición del cuerpo en el movimiento cuando se considera ésta como un vector. Al igual que en el caso de la velocidad escalar, se podrá definir un vector velocidad media v_m en la forma:

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{t - t_0}$$

o cociente entre el desplazamiento $D\mathbf{r}$ considerado como un vector y el intervalo de tiempo Dt correspondiente. Dicho cociente representa lo que varía el vector posición en la unidad de tiempo. Puesto que Dt es un número, $\mathbf{v}_m$ tendrá la misma dirección y sentido que el vector diferencia $D\mathbf{r}$ entre las posiciones final $\mathbf{r}$ e inicial $\mathbf{r}_0$.

Cuando se consideran intervalos de tiempo cada vez más pequeños se advierte que el vector desplazamiento correspondiente tiene una dirección que se acerca cada vez más a la trayectoria, de modo que para intervalos de tiempo suficientemente breves como para ser aceptados como instantes, la dirección de $D\mathbf{r}$ y, por tanto, del vector velocidad será tangente a la trayectoria. El vector velocidad instantánea, expresado mediante la ecuación:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

es, por tanto, tangente a la trayectoria.

Además la longitud del vector desplazamiento $|d\mathbf{r}|$ al ser éste tan próximo a la trayectoria

coincide prácticamente con la correspondiente porción de ella, es decir, con ds . Eso significa que el módulo del vector velocidad instantánea coincide con la velocidad instantánea escalarmente considerada, pues:

$$|\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = v$$

En resumen, el vector velocidad instantánea por ser tangente a la trayectoria recoge la dirección u orientación del movimiento en cada instante y por coincidir en módulo con la velocidad escalar contiene, además, información sobre la rapidez del movimiento. Esto demuestra que la descripción en términos de vectores es más complicada que la escalar, pero también más completa.

El vector aceleración

El vector aceleración representa la rapidez con la que el vector velocidad de un cuerpo móvil cambia con el tiempo. Si el intervalo de tiempo considerado es amplio se define el vector aceleración media $\mathbf{a}_m$ en la forma:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t - t_0}$$

o cociente entre la variación que experimenta el vector velocidad durante un intervalo de tiempo Dt y la amplitud de dicho intervalo. De acuerdo con su definición, el vector aceleración media representa lo que por término medio varía el vector velocidad en cada unidad de tiempo.

Si el intervalo de tiempo Dt se puede considerar reducido a un instante, el vector aceleración media se convierte en el vector aceleración instantánea $\mathbf{a}$ y se expresa en la forma:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

donde d representa, de nuevo, una variación muy pequeña.

A diferencia del vector velocidad $\mathbf{v}$, el vector aceleración $\mathbf{a}$ es, salvo en los movimientos rectilíneos, no tangente a la trayectoria. Ello es debido a que, de acuerdo con su definición, tiene la misma dirección que $D\mathbf{v}$ o $d\mathbf{v}$, es decir, que la diferencia de dos vectores velocidad. Dado que tales vectores sucesivos son tangentes a la trayectoria, su diferencia no puede ser también tangente a la trayectoria, a menos que ambos vectores velocidad tengan igual dirección, lo que sucede únicamente en los movimientos rectilíneos.

ESTUDIO DE LOS MOV. RECTILÍNEOS

Los movimientos rectilíneos constituyen un tipo particular de movimientos cuyo estudio presenta un especial interés. En primer lugar, son los movimientos más sencillos, de modo que su comprensión permite una generalización posterior a situaciones más complejas. Estos movimientos más complicados pueden ser estudiados como la composición de movimientos rectilíneos elementales. Tal es el caso, por ejemplo, de los movimientos de proyectiles. La trayectoria parabólica de una piedra que es lanzada desde un acantilado, apuntando en dirección horizontal, resulta de la composición de un movimiento rectilíneo horizontal debido al impulso recibido en el momento de lanzamiento y un movimiento rectilíneo vertical por el efecto aislado de la fuerza peso. En segundo lugar, una buena parte de las conclusiones que se obtienen al estudiar los movimientos rectilíneos pueden extenderse a los movimientos curvilíneos si se prescinde de lo relativo a los cambios de dirección. Finalmente, estos movimientos, aunque son simples, se ajustan dentro de una buena aproximación a bastantes movimientos que se dan en la naturaleza.

Movimiento rectilíneo y uniforme

El movimiento rectilíneo y uniforme fue definido, por primera vez, por Galileo en los siguientes términos: «Por movimiento igual o uniforme entiendo aquél en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, tómense como se tomen, resultan iguales entre sí», o dicho de otro modo, es un movimiento de velocidad v constante.

Debido a que en este tipo de movimientos la velocidad no varía con el tiempo, la velocidad instantánea tendrá el mismo valor en cada instante y será igual, por tanto, a la velocidad media v_m , es decir:

$$v = v_m = \frac{s - s_0}{t - t_0} \quad (2.11)$$

Si se considera el instante inicial $t_0 = 0$ y la posición s_0 del móvil en ese instante como origen, $s_0 = 0$, se puede escribir la anterior ecuación en la forma:

$$v = \frac{s}{t} \quad (2.12)$$

que es la expresión fundamental de este tipo de movimientos de velocidad constante. Despejando sucesivamente s y t se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$s = v \cdot t \quad (2.13)$$

$$t = \frac{s}{v} \quad (2.12)$$

Si para $t_0 = 0$ el móvil dista del origen un espacio s_0 no nulo, de acuerdo con la

ecuación (2.11) se tiene entonces:

$$s = s_0 + v \cdot t \quad (2.15)$$

El hecho de que la gráfica $s-t$ sea una recta oblicua indica que existe una proporcionalidad directa entre ambas variables en este tipo de movimientos.

La gráfica $v-t$ es una línea horizontal, pero además el área comprendida entre ella y el eje de los tiempos tiene un significado especial. Sea un movimiento uniforme de $v = 10 \text{ m/s}$. El área situada bajo la gráfica para los 30 primeros segundos corresponde a la de un rectángulo cuyo valor numérico vendrá dado por:

$$\text{Base} \times \text{altura} = 30 \text{ s} \times 10 \text{ m/s} = 300 \text{ m}$$

Aun cuando en este caso el área no esté expresada en m^2 , su valor coincide numéricamente con el espacio total recorrido por el móvil durante esos 30 s:

$$s = v \cdot t = 30 \cdot 10 = 300 \text{ m}$$

A partir del diagrama $v-t$ es posible calcular el espacio recorrido utilizando procedimientos gráficos, es decir, midiendo el área contenida bajo la gráfica. Esta propiedad no es exclusiva de este tipo de movimientos y su aplicación puede ser generalizada a otros, cualquiera que sea la forma de su gráfica $v-t$.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

El *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* es un tipo de movimiento frecuente en la naturaleza. Una bola que rueda por un plano inclinado o una piedra que cae en el vacío desde lo alto de un edificio son cuerpos que se mueven ganando velocidad con el tiempo de un modo aproximadamente uniforme, es decir, con una aceleración constante.

Galileo, que orientó parte de su obra científica al estudio de esta clase de movimientos, al preguntarse por la proporción en la que aumentaba con el tiempo la velocidad de un cuerpo al caer libremente, sugirió, a modo de hipótesis, lo siguiente: «¿Por qué no he de suponer que tales incrementos (de velocidad) se efectúan según el modo más simple y más obvio para todos?... Ningún aditamento, ningún incremento hallaremos más simple que aquél que se sobreañade siempre del mismo modo.» Este es el significado del movimiento uniformemente acelerado, el cual «en tiempos iguales, tómense como se tomen, adquiere iguales incrementos de velocidad».

La relación entre v , a y t :

En el *movimiento uniforme* lo que crece a ritmo constante es el espacio s y ese ritmo de aumento es la velocidad v . En el *uniformemente acelerado* lo que crece a ritmo constante es la velocidad y ese ritmo de aumento es la aceleración a . Sobre la base de esta analogía entre las magnitudes es posible establecer una analogía entre las fórmulas. Así, sustituyendo en la ecuación (2.15) s por v y v por a resulta:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad (2.16)$$

que relaciona la velocidad final v , la aceleración a y el tiempo t en un movimiento uniformemente acelerado supuesta conocida la velocidad inicial v_0 .

La anterior expresión de v en función de t es de la forma $y = mx + b$ que corresponde a la ecuación de una recta de pendiente m y ordenada en el origen b . La variable y se corresponde con v , la x con la t , la constante m con la aceleración a y la b con la velocidad inicial v_0 . Así pues, la gráfica $v-t$ de este tipo de movimientos es una línea

recta porque su pendiente, la aceleración, es constante y únicamente pasará por el origen cuando parta del reposo ($v_0 = 0$).

La relación entre s , a y t :

El espacio s recorrido por un móvil con *movimiento uniformemente acelerado* puede determinarse recurriendo a su interpretación como el área contenida bajo la gráfica $v-t$. Si la velocidad inicial v_0 es distinta de cero, dicha superficie tiene la forma de un rectángulo más un triángulo rectángulo añadido, es decir:

Área total = Área rectángulo + área triángulo

Área rectángulo = Base $\times$ altura = $(t - 0) \cdot (v_0 - 0)$

$$\text{Área rectángulo} = \frac{\text{Base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(t - 0) \cdot (v - v_0)}{2}$$

luego:

$$\text{Área total} = v_0 \cdot t + \frac{(v - v_0)}{2} t$$

pero según la ecuación (2.16) $v - v_0 = a \cdot t$, luego sustituyendo dicho valor en la ecuación anterior resulta:

$$\text{Área total} = v_0 \cdot t + \frac{at}{2} \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Ésta será, entonces, la expresión del espacio s recorrido por el móvil en t segundos

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2.11)$$

Si el móvil parte del reposo $v_0 = 0$ y la anterior ecuación cinemática toma la forma:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.19)$$

La expresión matemática que relaciona s con t es, en tal caso, de la forma $y = mx^2$, cuya gráfica corresponde a una parábola. Por tanto, la gráfica $s-t$ es una línea parabólica cuyo vértice coincidirá con el origen de coordenadas siempre que el móvil parta del reposo y tenga, por tanto, una velocidad inicial v_0 nula.

La relación entre s , v y a :

A partir de las ecuaciones (2.16) y (2.18), características del *movimiento uniformemente acelerado*, es posible obtener otra ecuación cinemática útil que relaciona espacio, velocidad y aceleración. El procedimiento consiste en un ejercicio algebraico de eliminación de la variable tiempo de las ecuaciones anteriores.

Despejando t de la primera:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \text{luego} \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

y sustituyendo su valor en la segunda:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2$$

Quitando ahora paréntesis y desarrollando el cuadrado de una diferencia se tiene:

$$s = \frac{v_0 \cdot v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2} a \cdot \frac{(v^2 - 2v \cdot v_0 + v_0^2)}{a^2}$$

Sacando factor común $\frac{1}{a}$ y agrupando términos

semejantes:

$$s = \frac{1}{a} \left(\underbrace{v_0 \cdot v - \frac{1}{2} \cdot 2v \cdot v_0}_{0} - \underbrace{v_0^2 + \frac{1}{2} v_0^2 + \frac{1}{2} v^2}_{-\frac{1}{2} v_0^2} \right)$$

resulta finalmente:

$$s = \frac{1}{2a} (v^2 - v_0^2)$$

o expresado en otros términos:

$$v^2 - v_0^2 = 2 as$$

(2.20)

Si el móvil parte del reposo $v_0 = 0$ y la ecuación anterior se reduce a la siguiente:

$$v^2 = 2 as$$

es decir:

$$v = \sqrt{2 as}$$

(2.21)

que permite calcular la velocidad final v a partir del espacio s recorrido por el móvil y de la aceleración constante a .

La relación entre s , v y t :

Un procedimiento de eliminación semejante al anterior puede seguirse para encontrar una nueva ecuación cinemática en la que el valor de la aceleración no aparece de forma explícita. Se trata, por tanto, de eliminar a de las ecuaciones

$$v = v_0 + at \quad \text{y} \quad v^2 = v_0^2 + 2 as$$

Despejando a de la primera:

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

sustituyendo su valor en la segunda,

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{(v - v_0)}{t} s$$

y reordenando, resulta:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \frac{(v - v_0)}{t} s$$

Pero dado que una diferencia de cuadrados es siempre igual a la suma por la diferencia, se tiene:

$$(v + v_0) \cdot (v - v_0) = 2 (v - v_0) \cdot \frac{s}{t}$$

Es decir:

$$v = \frac{2s}{t} - v_0$$

(2.22)

Esta ecuación de la velocidad obtenida para los movimientos uniformemente acelerados pone claramente de manifiesto que la fórmula $v = \frac{s}{t}$ no puede aplicarse en

cualquier situación o problema, siendo válida únicamente para movimientos uniformes.

Movimiento rectilíneo uniformemente retardado

En los *movimientos uniformemente decelerados* o retardados la velocidad disminuye con el tiempo a ritmo constante. Están, pues, dotados de una aceleración que aunque negativa es constante. De ahí que todas las fórmulas cinemáticas deducidas para los movimientos uniformemente acelerados sirvan para describir los movimientos uniformemente retardados sin más que considerar a con su signo, que es, en este caso, negativo.

Si se considera la deceleración en valor absoluto, el signo menos debe preceder al valor de a en las anteriores ecuaciones, que se convierten entonces en las siguientes:

$$v = v_0 - at$$

(2.24)

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2$$

(2.25)

$$v^2 - v_0^2 = -2 a s$$

(2.26)

Según la primera ecuación, la velocidad final resulta menor que la inicial, pues a ésta se le resta at . La segunda indica que el espacio que recorre el móvil al frenar es menor que $v_0 t$, que es el espacio que recorrería si mantuviera su velocidad inicial v_0 durante todo el tiempo t . La tercera muestra de nuevo, a través de otras variables, que la velocidad final es menor que la inicial, pues la diferencia de sus cuadrados es negativa.

En los movimientos uniformemente acelerados tanto la gráfica $s-t$ como la $v-t$ son crecientes, es decir, de pendiente positiva. En los movimientos uniformemente decelerados las formas de las gráficas resultantes son las mismas, es decir, la gráfica $s-t$ sigue siendo una línea parabólica y la $v-t$ una recta, pero su posición en el diagrama cambia. En el caso de la gráfica $s-t$ el vértice de la parábola cambia de lugar y la rama parabólica invierte su orientación respecto de la que correspondería a un movimiento acelerado. Ello indica que el espacio va creciendo con el tiempo, pero a un ritmo cada vez menor; su pendiente, aunque es positiva, va disminuyendo progresivamente. Este hecho se traduce en la gráfica $v-t$ y da lugar a que ésta sea decreciente o de pendiente negativa.

Movimiento de caída libre

El movimiento de los cuerpos por la acción de su propio peso es un ejemplo de movimiento que se da en la naturaleza y que puede ser descrito como rectilíneo uniformemente acelerado. En este caso el espacio s se mide sobre la vertical y corresponde, por tanto, a una altura que se representa por la letra h . En ausencia de un medio resistente como el aire, es decir en el vacío, el movimiento de caída es de aceleración constante, siendo dicha aceleración la misma para todos los cuerpos, independientemente de cuales sean su forma y su peso. La presencia de aire frena ese movimiento de caída y la aceleración pasa a depender entonces de la forma del cuerpo. No obstante, para cuerpos aproximadamente esféricos, la influencia del medio sobre el movimiento puede despreciarse y tratarse, en una primera aproximación, como si fuera de *caída libre*.

La aceleración en los movimientos de caída libre, conocida como aceleración de la gravedad, se representa por la letra g y toma un valor aproximado de $9,8 \text{ m/s}^2$. Si el movimiento considerado es de descenso o de caída, el valor de g resulta positivo como corresponde a una auténtica aceleración. Si por el contrario es de ascenso en vertical el valor de g se considera negativo, pues se trata, en tal caso, de un movimiento deccelerado.

Las fórmulas características de estos tipos de movimientos, al igual que sus gráficas cinemáticas, coinciden con las deducidas para los movimientos uniformemente acelerados y uniformemente retardados. Se escriben en la forma:

$$v = v_0 \pm gt$$

$$h = v_0 t \pm \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 - v_0^2 = \pm 2gh$$

$$v = \frac{2h}{t} - v_0$$

En ellas se considera g con signo $+$ cuando el movimiento es de descenso y con signo $-$ cuando es de ascenso.

En el aire, la aproximación consistente en suponer despreciable la influencia retardadora del rozamiento sobre el movimiento sólo es válida para velocidades no muy grandes, del orden de las que puede alcanzar un cuerpo cayendo desde una altura de unas pocas decenas de metros.

La ley de que los cuerpos caen en el vacío con una aceleración que es la misma para todos ellos e independiente de sus pesos respectivos fue establecida por Galileo Galilei y comprobada mediante un experimento espectacular. Desde lo alto de la torre inclinada de la ciudad italiana de Pisa, y en presencia de profesores y alumnos de su Universidad, Galileo soltó a la vez dos balas de cañón, una de ellas diez veces más pesada que la otra. Con este experimento Galileo planteaba una pregunta directamente a la naturaleza y ella se encargó de responder que, dentro del error experimental, ambos cuerpos, a pesar de las diferencias entre sus pesos, caen a la vez, es decir, recorren el mismo espacio en el mismo tiempo.

El resultado del experimento de la torre de Pisa, que fue ampliamente contestado en la época de Galileo, resulta

de fácil interpretación a partir de la ecuación $v = \sqrt{2gh}$,

pues iguales alturas darán lugar a idénticas velocidades finales si se acepta que la aceleración g de caída es la misma para todos los cuerpos. Inversamente, la demostración experimental de Galileo de que a igualdad de alturas h cuerpos de diferentes pesos alcanzan la misma velocidad v , equivale a demostrar que la aceleración de caída es independiente del peso de los cuerpos.

APLICACIÓN DEL ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS DE CAÍDA

Los movimientos de los cuerpos sometidos a las fuerzas del peso constituyen un ejemplo de movimientos de aceleración constante e igual a $9,8 \text{ m/s}^2$ cuando se desprecia la acción del rozamiento. Si el movimiento es de descenso dicho valor se tomará como positivo, pues el cuerpo gana velocidad con el tiempo. Si el cuerpo asciende como consecuencia de un impulso o velocidad inicial, su velocidad disminuye con el tiempo y la aceleración de la gravedad se considerará negativa. La determinación de magnitudes cinemáticas tales como velocidad, altura o tiempo se podrán determinar, en tales casos, con la ayuda de las fórmulas correspondientes.

Así, si se lanza verticalmente hacia arriba una bola de acero con una velocidad inicial de 10 m/s cabe preguntarse a qué altura llegará. Se dispone del valor de $v_0 = 10 \text{ m/s}$, del valor de la aceleración $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ y también del valor de la velocidad final, puesto que la bola, al perder progresivamente velocidad, terminará por pararse, iniciando a continuación un movimiento de descenso. Se trata entonces de identificar una fórmula del movimiento uniformemente decelerado que relacione las magnitudes v (dato), g (dato) y h (incógnita). Dicha expresión es:

$$v^2 - v_0^2 = -2gh$$

Despejando h y sustituyendo se tiene:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{-2g} = \frac{0 - 10^2}{-2 \cdot 9,8} = 5,1 \text{ m}$$

El tiempo que ha empleado el cuerpo en alcanzar esta altura máxima puede, asimismo, determinarse a partir de los datos iniciales. Se trata en este caso de identificar una fórmula que relacione v , g y t , siendo v y g conocidas; dicha expresión es

$$v - v_0 = -gt$$

Despejando t y sustituyendo resulta:

$$t = \frac{v - v_0}{-g} = \frac{0 - 10,0}{-9,8} = 1,0 \text{ s}$$

Otra cuestión de interés en este tipo de movimientos es averiguar con qué velocidad volverá a caer. En el punto más alto de su trayectoria el cuerpo carece de velocidad, de modo que iniciará el movimiento de descenso partiendo del reposo, $v_0 = 0$. El espacio que recorre al subir es el mismo que el que recorre al bajar, de modo que, haciendo uso nuevamente de la expresión $v^2 - v_0^2 = 2gh$,

pero considerando ahora g con valor positivo resulta:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh = 0 + 2 \cdot 9,8 \cdot 5,1$$

$$v^2 = 2 \cdot 9,8 \cdot 5,1 = 10 \text{ m/s}$$

En ausencia de rozamientos, los movimientos de ascenso y descenso son perfectamente simétricos, de modo que el cuerpo emplea el mismo tiempo en subir que en bajar, y vuelve al punto de lanzamiento con idéntica velocidad con la que partió de él.

Es, asimismo, interesante saber calcular la altura que alcanzaría en la mitad del tiempo de ascenso. Como paso previo se han de identificar con claridad las nuevas incógnitas, así como los datos disponibles. Se conoce el tiempo $t = 1,0/2$, la aceleración $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ y la velocidad inicial $v_0 = 10,0 \text{ m/s}$ y se desea averiguar la altura h ; la ecuación que relaciona tales magnitudes es:

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene:

$$h = 10,0 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} 9,8 \cdot 0,5^2 = 3,8 \text{ m}$$

De acuerdo con este resultado en la primera mitad del tiempo total, el cuerpo recorre más de la mitad del espacio total, lo que indica que el movimiento no es uniforme.

ESTUDIO DE LOS MOV. CIRCULARES

La descripción de los movimientos rectilíneos uniformes y uniformemente acelerados puede extenderse a movimientos de trayectoria no rectilíneo, si no se tienen en cuenta aquellos aspectos del movimiento relacionados con el cambio de orientación que sufre el móvil al desplazarse a lo largo de una trayectoria curvilínea.

Por tanto, un movimiento circular uniforme o uniformemente acelerado, se puede estudiar recurriendo a las relaciones entre s , v , t y a , deducidas a propósito de los movimientos rectilíneos. Sin embargo, la posibilidad de describir el desplazamiento del punto móvil mediante el ángulo θ barrido por uno de los radios, abre un nuevo camino para su estudio, exclusivo de los movimientos circulares, empleando magnitudes angulares y no magnitudes lineales, es decir, utilizando magnitudes referidas a ángulos y no a la línea trayectoria.

Magnitudes lineales y magnitudes angulares

La magnitud fundamental es el ángulo barrido por el radio que une el punto móvil con el centro de la trayectoria circular, ángulo que se expresa en radianes (rad). Un *radián* es la unidad SI de medida de ángulo plano y se define como el ángulo central (con vértice en el centro de una circunferencia) cuyo arco correspondiente tiene una longitud igual al radio. Dado que la longitud de la circunferencia es igual a 2π veces el valor del radio, el ángulo central completo medirá 2π rad.

A partir de la definición de radián se puede establecer una relación entre la longitud del arco, que en términos cinemáticos coincide con el espacio s , y el ángulo j . Así, expresar el ángulo j en radianes equivale a decir cuántas veces el radio R está contenido en la porción de arco s correspondiente, lo que en términos matemáticos se expresa en la forma:

$$s = \varphi \text{ (rad)} \cdot R \quad (2.27)$$

Utilizando la notación de incrementos se tiene:

$$\Delta s = \Delta \varphi \text{ (rad)} \cdot R$$

Si para describir un movimiento circular se elige la opción angular, es decir, en términos de variación del ángulo j con el tiempo, se hace necesario introducir otras magnitudes angulares que desempeñen el mismo papel que la velocidad y la aceleración en la descripción lineal. Así se define la velocidad angular media ω_m como el cociente entre el ángulo barrido y el tiempo empleado

$$\omega_m = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \quad (2.28)$$

y representa la rapidez con la que por término medio varía el ángulo j a lo largo del intervalo de tiempo Δt .

El valor instantáneo, o referido a un instante, ω se expresa análogamente como:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

De acuerdo con su definición, la unidad SI de medida de ω será el rad/s.

Dado que la velocidad angular ω puede variar con el tiempo, es necesario introducir una magnitud que dé idea de la rapidez con la que dicha variación tiene lugar; esto es, lo que se entiende por aceleración angular. Al tratarse de una rapidez se habrá de distinguir entre el valor medio α_m

$$\alpha_m = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \quad (2.29)$$

y el valor instantáneo

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Las unidades SI para esta nueva magnitud son, de acuerdo con su definición, rad/s/s, es decir, rad/s² o rad · s⁻².

Dado que todo movimiento circular puede describirse, bien en función de magnitudes lineales, bien en función de magnitudes angulares, ambas descripciones equivalentes están relacionadas entre sí. La relación fundamental viene dada por la ecuación (2.27) que puede escribirse de nuevo en la forma

$$\varphi(\text{rad}) \xrightarrow{\times R} s = \varphi \cdot R$$

donde se indica que multiplicando el valor del ángulo en radianes por el radio se tiene el valor del arco o espacio s medido sobre la trayectoria. Así, conociendo el espacio que recorre una bicicleta y la longitud del radio de sus ruedas, es posible averiguar el ángulo descrito, o lo que, es lo mismo, el número de vueltas que ha dado. En general se verifica:

$$N \text{ (vueltas)} = \varphi \text{ (rad)} / 2\pi$$

de modo que:

$$N \text{ (vueltas)} = \frac{s/R}{2\pi} = \frac{s}{2\pi R}$$

(2.30)

La relación descrita por la ecuación (2.27) se puede extender a las otras magnitudes angulares como la velocidad ω y la aceleración α . De modo que, en general, la relación de paso *entre magnitudes lineales y magnitudes angulares* en un movimiento circular puede escribirse como:

$$\text{magnitud angular} \xrightarrow{\times R} \text{magnitud lineal}$$

Para las velocidades la relación es, por tanto:

$$v = \omega \cdot R$$

(2.31)

En efecto:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta(\varphi \cdot R)}{\Delta t}$$

(2.32)

donde:

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi \cdot R) &= \varphi \cdot R - \varphi_0 \cdot R = \\ &= R \cdot (\varphi - \varphi_0) = R \cdot \Delta\varphi \end{aligned}$$

pues R es constante. Sustituyendo en la ecuación (2.32) de partida, se tiene:

$$v = R \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \omega$$

Para la magnitud aceleración la relación es análoga:

$$a = \alpha \cdot R$$

(2.33)

pues tomando $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ y $v = \omega \cdot R$ resulta:

$$\Delta v = \Delta(\omega R) = (\omega \cdot R - \omega_0 \cdot R) =$$

$$= (\omega - \omega_0) \cdot R = \Delta\omega \cdot R$$

y, por tanto:

$$a = \frac{\Delta\omega \cdot R}{\Delta t}$$

es decir:

$$a = \alpha \cdot R$$

Movimiento circular uniforme

La analogía existente entre las magnitudes lineales y las angulares en un movimiento circular asegura la existencia de una analogía en la forma de las ecuaciones correspondientes. En un *movimiento circular uniforme*, la ecuación fundamental del movimiento referida a magnitudes lineales:

$$s = v \cdot t$$

se puede expresar en función de magnitudes angulares. Sustituyendo en ella los valores de s y v dados en las ecuaciones (2.27) y (2.31) resulta:

$$\varphi \cdot R = \omega \cdot R \cdot t$$

es decir:

$$\varphi = \omega \cdot t$$

(2.34)

que es la ecuación fundamental del movimiento circular uniforme descrito en función de magnitudes angulares.

Movimiento circular uniformemente acelerado

Siguiendo un procedimiento análogo se obtienen las ecuaciones cinemáticas que describen este tipo de movimiento. Así, partiendo de la ecuación:

$$v = v_0 + at$$

y tomando en cuenta las ecuaciones (2.31) y (2.33), resulta

$$\omega R = \omega_0 R + \alpha R t$$

y dividiendo por R se obtiene la ecuación análoga a la de partida, pero expresada en función de magnitudes angulares:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

(2.35)

La ecuación

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

se beneficia del mismo tratamiento; considerando ahora la relación entre espacio s y ángulo φ resulta:

$$\varphi R = \omega_0 R t + \frac{1}{2} \alpha R t^2$$

es decir:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha R t^2 \quad (2.36)$$

Lo mismo sucede para la ecuación

$$v^2 - v_0^2 = 2 a s$$

que se convierte, aplicando idéntico procedimiento, en la forma:

$$\omega^2 R^2 - \omega_0^2 R^2 = 2 \alpha R \cdot \varphi R$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \alpha \varphi \quad (2.37)$$

Finalmente la ecuación

$$v = \frac{2s}{t} - v_0$$

se convierte en:

$$\omega R = \frac{2\varphi R}{t} - \omega_0 R$$

es decir:

$$\omega = \frac{2\varphi}{t} - \omega_0 \quad (2.38)$$

Las anteriores ecuaciones características del *movimiento circular uniformemente acelerado* pueden aplicarse también al movimiento uniformemente retardado sin más que considerar la aceleración como la deceleración, esto es, con signo negativo.

APLICACIÓN DEL ESTUDIO DE LOS MOVIMIENTOS CIRCULARES

La descripción de un movimiento circular puede hacerse bien en función de magnitudes lineales ignorando la forma de la trayectoria, bien en función de magnitudes angulares. Ambas descripciones están relacionadas entre sí mediante el valor del radio de la circunferencia trayectoria.

Un coche que circula a 72 km/h frena en un instante dado y consigue detenerse tras recorrer una distancia de 40 m. Sus ruedas poseen un radio de 25 cm y se pretende estudiar el movimiento circular de éstas en términos lineales y en términos angulares, calculando su aceleración de frenado y el tiempo que tarda en pararse.

El cálculo de la deceleración del coche se puede efectuar a partir de la fórmula que relaciona las variables a (incógnita) con v_0 (dato) y s (dato). Dicha expresión es

$$v^2 - v_0^2 = 2 a s$$

por tanto:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

Dado que el coche termina parándose, la velocidad final v será cero. Antes de sustituir los datos en las fórmulas es preciso expresarles en unidades del Sistema Internacional:

$$v_0 = 72 \text{ km/h} = \frac{72 \cdot 1000}{3600} = 20 \text{ m/s}$$

$$R = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$$

$$s = 40 \text{ m}$$

por tanto,

$$a = \frac{(0 - 20^2)}{2 \cdot 40} = -5,0 \text{ m/s}^2$$

Si las ruedas no se bloquean, ésta será también la aceleración lineal del movimiento circular descrito por un punto de su superficie, ya que el movimiento de traslación o de avance del coche es el desarrollo del movimiento de rotación de las ruedas. El valor de la aceleración angular correspondiente se podrá calcular dividiendo el anterior valor por el del radio:

$$a = \alpha \cdot R$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-5,0}{0,25} = -20 \text{ rad/s}^2$$

El cálculo de a puede efectuarse de un modo alternativo convirtiendo inicialmente los datos en sus correspondientes cantidades angulares y utilizando después las fórmulas del movimiento circular. En tal caso:

$$\omega = 0 \quad ; \quad \omega_0 = v_0/R = \frac{20}{0,25} = 80 \text{ rad/s}$$

$$\varphi = s/R = \frac{40}{0,25} = 160 \text{ rad}$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\varphi$$

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi} = \frac{0 - 80}{2 \cdot 160} = \frac{-6400}{320} = -20 \text{ rad/s}^2$$

La determinación del tiempo que tarda en pararse puede calcularse a partir de la expresión

$$\omega - \omega_0 = \alpha t$$

en donde α se ha de tomar con su signo, que es, en este caso, negativo:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 80}{-20} = 4 \text{ s}$$

El cálculo del ángulo descrito por uno de sus radios se podrá efectuar a partir de la fórmula

$$s = \varphi \cdot R$$

es decir:

$$\varphi = \frac{s}{R} = \frac{40}{0,25} = 160 \text{ rad.}$$

LA ACELERACIÓN EN LOS MOVIMIENTOS CURVILÍNEOS

En los movimientos curvilíneos la dirección cambia con el tiempo. Eso significa que la velocidad considerada como vector $\mathbf{v}$ podrá variar cuando varíe sólo su dirección, su módulo o, en el caso más general, cuando varíen ambos.

La aceleración asociada a los cambios en dirección

Desde un punto de vista Sectorial, un movimiento circular uniforme es un movimiento acelerado, aun cuando el móvil recorra la trayectoria a ritmo constante. La dirección del vector velocidad, que es tangente a la trayectoria, va cambiando a lo largo del movimiento, y esta variación de $\mathbf{v}$ que afecta sólo a su dirección da lugar a una aceleración.

Cuando en un movimiento circular uniforme se determina gráficamente el vector diferencia $D\mathbf{v}$, se advierte que está dirigido hacia el centro de la trayectoria. De acuerdo con la definición del vector aceleración $\mathbf{a}$, la dirección de esta magnitud coincide con la dirección de la variación del vector velocidad $D\mathbf{v}$. Así que en el movimiento circular uniforme el vector aceleración está dirigido en cada instante hacia el centro de la trayectoria según la dirección del radio. Por este motivo, se le

denomina aceleración centrípeta a_c , que significa dirigida hacia el centro y da idea de la rapidez con la que cambia la dirección del movimiento.

Puede demostrarse que la aceleración centrípeta a_c es tanto mayor cuanto más rápido es el movimiento y cuanto más cerrada es la curva trayectoria, siendo su expresión:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

donde v es la rapidez o velocidad escalar y R el radio de la trayectoria circular.

Esta componente del vector aceleración, relacionada con los cambios en dirección del vector velocidad, está presente en todos los movimientos curvilíneos, sean o no circulares.

La aceleración asociada a los cambios en módulo

Además de variar en dirección, el vector $\mathbf{v}$ puede variar también en módulo en los movimientos curvilíneos. La aceleración asociada a tal variación recibe el nombre de aceleración tangencial a_t , porque es tangente a la trayectoria. Es el único tipo de aceleración presente en los movimientos rectilíneos y coincide en módulo con la aceleración que se considera en el estudio puramente escalar del movimiento circular.

La aceleración total

La aceleración total en un movimiento curvilíneo es, entonces, un vector que puede considerarse como la suma de dos componentes. Una, la aceleración centrípeta a_c , que es perpendicular a la trayectoria, y da idea de la rapidez con la que el móvil cambia de orientación; la otra, la aceleración tangencial a_t es tangente a la trayectoria y representa la rapidez con la que varía en módulo el vector velocidad. Si la primera componente no es nula eso significa que el movimiento es curvilíneo; si la segunda tampoco lo es quiere decir que no es uniforme.