

Probabilidad, Estadística y Procesos Estocásticos

Seminarios usando MATLAB

Seminario de Laboratorio 1:

Variables Aleatorias

Actividad 1:

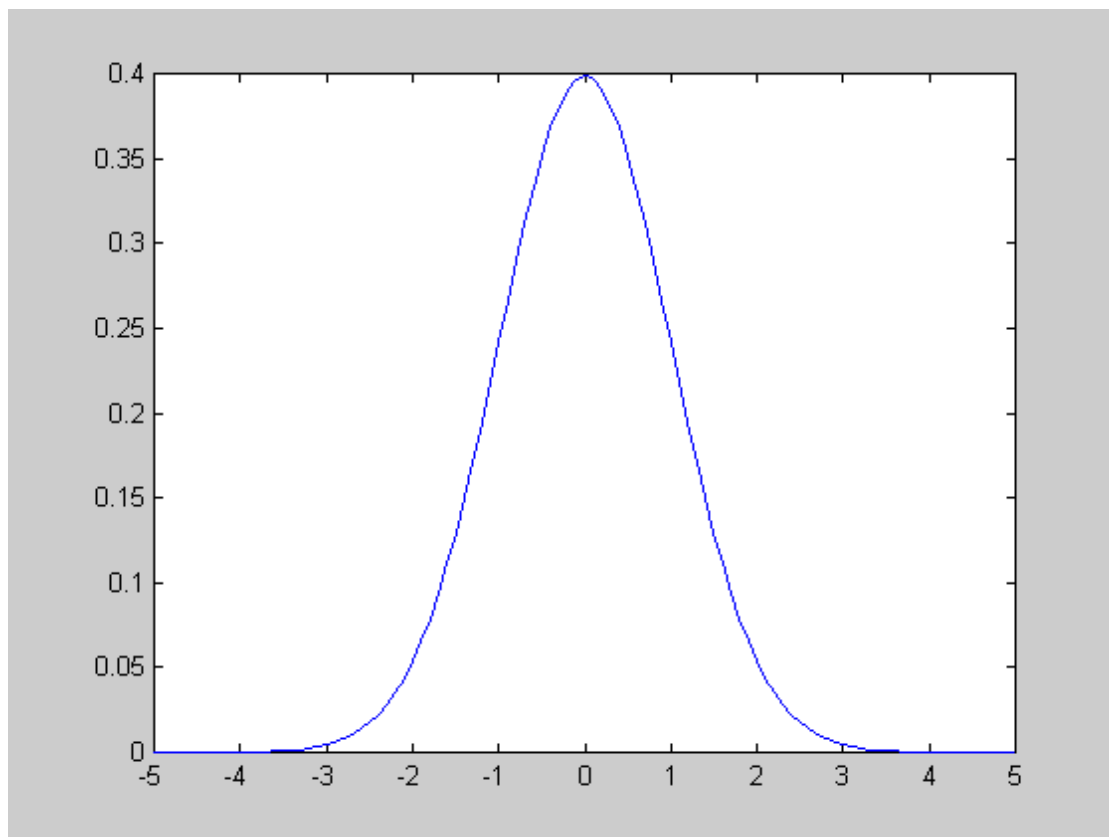
- Grafique la función densidad de probabilidad para una v.a. Gaussiana con media 0 y dispersión 1.
- Grafique la función densidad de probabilidad conjunta para dos v.a. X e Y, siendo X una v.a. Gaussiana con media 0 y dispersión 1 e Y otra v.a. independiente de X con media 5 y dispersión 1/2.

a)

```
» x=[-5:0.1:5];
```

```
» gx=1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2);
```

```
» plot(x,gx)
```



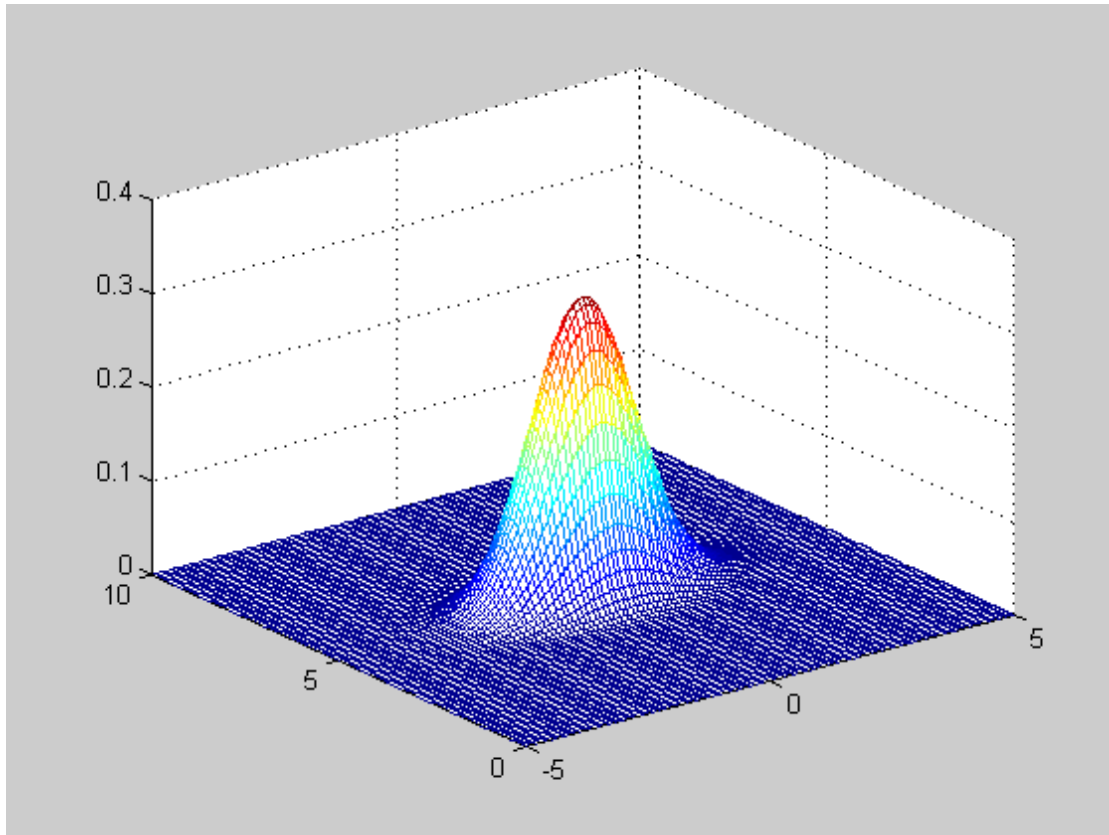
b)

```
» y=[0:0.1:10];
```

```
» gy=1/(sqrt(2*pi)*(1/2))*exp(-(y-5).^2/(2*(1/2)^2));
```

```
» G=gy' * gx;
```

```
» mesh(x,y,G)
```



Actividad 2:

- Sea w una v.a. uniformemente distribuida entre 0 y 1. Calcule su media y su varianza teóricamente.
- Genere un vector con 10000 muestras de dicha variable, utilizando la función **rand**, y gráfíquelos.
- Calcule la media y la varianza para la v.a. generada, realizando su propio programa. (Deberá generar un lazo por medio del comando **for**)
- Calcule la media y la varianza ahora, utilizando las funciones Matlab **mean** y **std**.
- Compare los resultados obtenidos en a), c) y d).
- Repita incisos c) a e) generando un vector de solamente 1000 muestras. Compare los resultados y escriba sus conclusiones.
- Calcule, haciendo uso del concepto de frecuencia relativa, la $P(W>0.5)$ y la $P(W<0.3)$, para el caso b) en que considera 10000 muestras.

a)

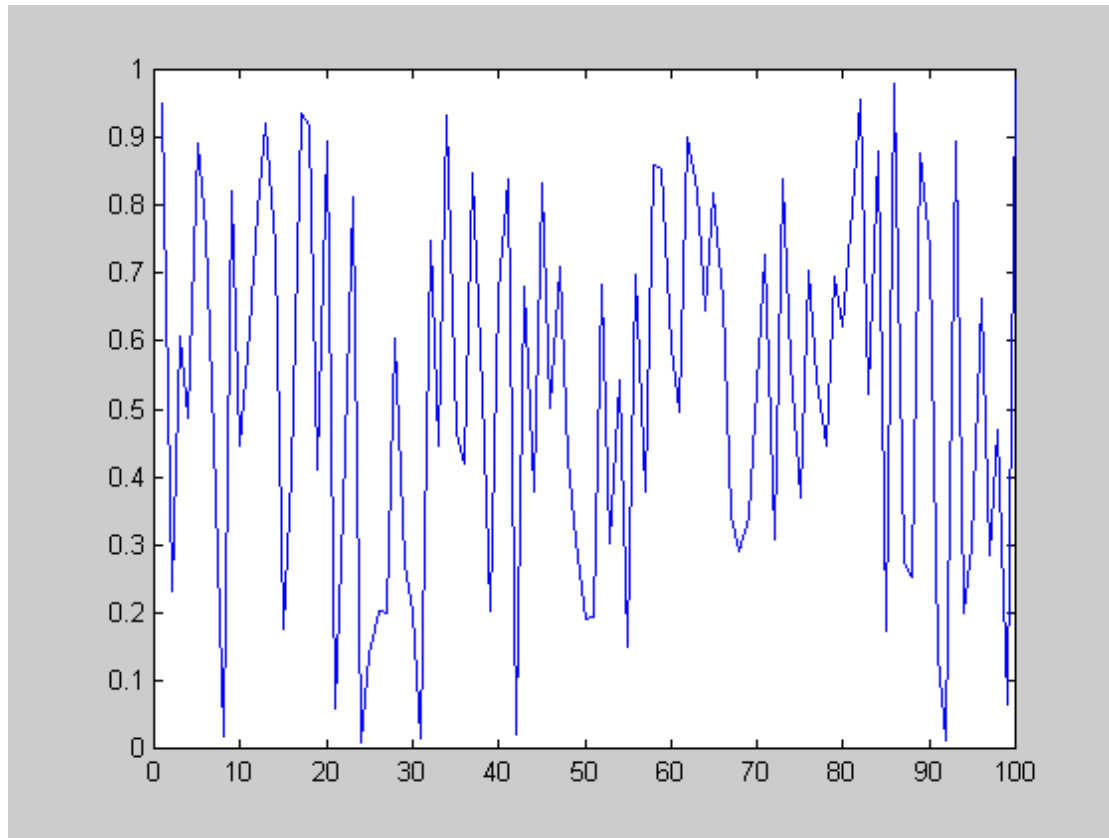
$$E[W] = 0.5$$

$$\text{VAR}[W] = 0.0833$$

b)

```
» w=rand(10000,1);
```

```
» plot(w(1:100))
```



c)

E[w]:

1º Forma:

```
» mediaw=0;
```

```
» suma=0;
```

```
» for i=1:10000
```

```
    suma=suma+w(i);
```

```
end
```

```
» mediaw=suma/10000
```

```
mediaw =
```

```
0.5052
```

2º Forma:

```
» media=sum(w)/length(w)
```

media =

0.5052

$\text{VAR}[W] = E[W^2] - E[W]^2$:

Calculamos $E[W^2]$:

1º Forma:

» suma=0;

»for i=1:10000

suma=suma+(w(i))^2;

end;

» var=suma/10000;

» varianza=var-0.5052^2

varianza =

0.0841

2º Forma:

» sum(w.^2)/length(w)-mean(w)^2

ans =

0.0841

d)

» mean(w)

ans =

0.5052

» std(w)^2

ans =

0.0841

e)

Los resultados obtenidos por las tres formas son iguales, aunque solo son una aproximación del valor teórico.

f)

Lo mismo para 1000 muestras:

```
» w=rand(1000,1);
```

```
» mean(w)
```

```
ans =
```

```
0.5172
```

```
» std(w)^2
```

```
ans =
```

```
0.0814
```

Se ve que cuanto mas grande es el vector que se usa mas parecidos son los resultados al resultado teórico.

g)

```
» w=rand(10000,1);
```

P(W>0.5)

```
» sup=0;
```

```
» for i=1:10000
```

```
if w(i)>0.5
```

```
sup=sup+1;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
» P=sup/10000
```

```
P =
```

```
0.5107
```

P(W<0.3)

```
» inf=0;
```

```
» for i=1:10000
```

```
if w(i)<0.3
```

```
inf=inf+1;

end;

end;

» P=inf/10000

P =

0.2946
```

Actividad 3:

Considere nuevamente las variables aleatorias con distribución normal X e Y del ejercicio 1.

- Utilizando la función **randn**, genere un vector de 10000 muestras independientes para X y uno para Y
- Grafique los primeros 100 valores de cada uno.
- Encuentre el histograma de frecuencias de ambas variables utilizando la función **hist**. Realice los diagramas de barras correspondientes.
- Estime la función densidad de probabilidad para las dos variables a partir de los histogramas obtenidos en c). Grafique en un mismo gráfico la fdp real y la estimada para cada caso.
- Repita incisos b) a d) generando un vector de solamente 1000 muestras. Compare los resultados y escriba sus conclusiones.

a)

```
» x=randn(10000,1);

» aux=randn(10000,1);

» y=1/2*aux+5;
```

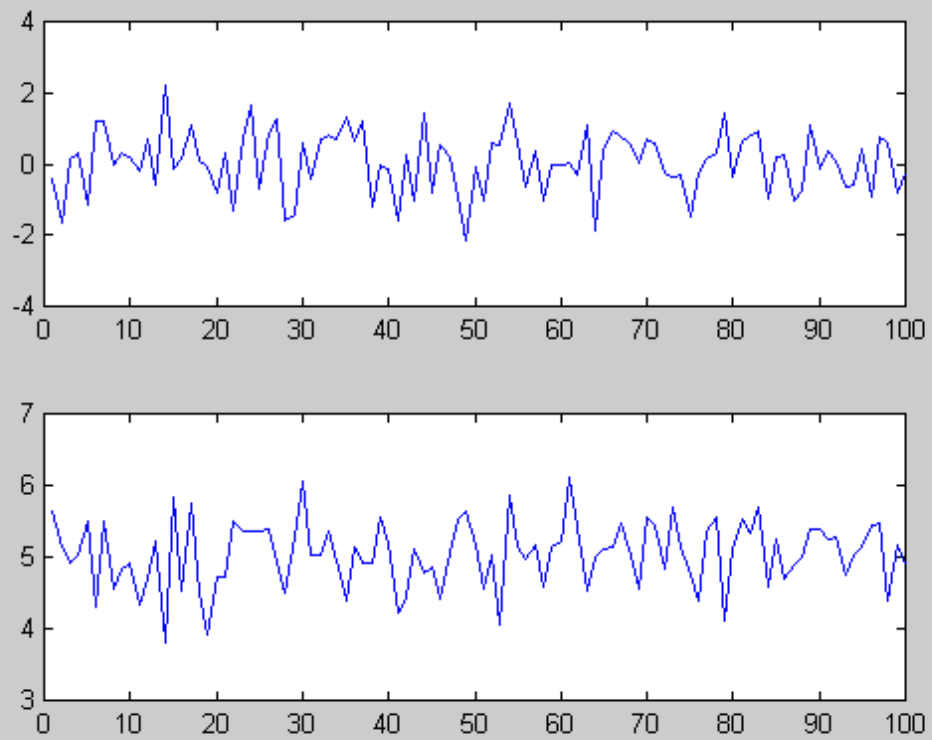
b)

```
» subplot(2,1,1)

» plot(x(1:100))

» subplot(2,1,2)

» plot(y(1:100))
```

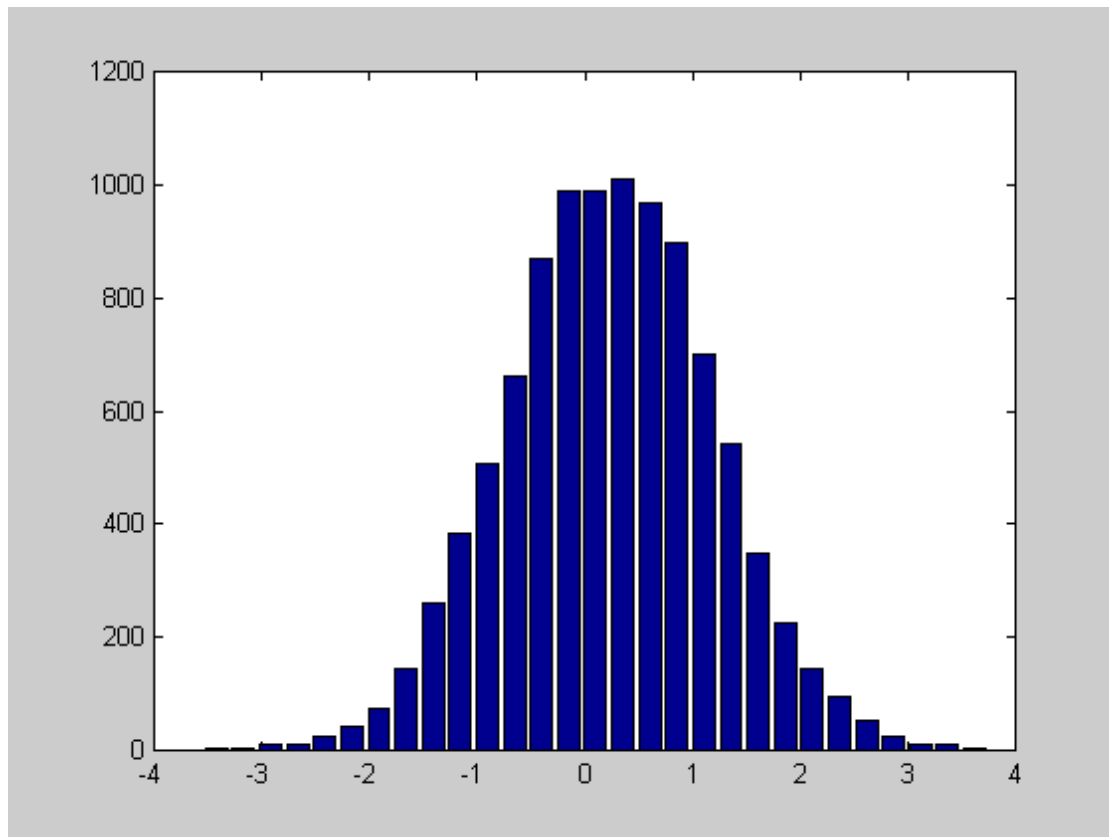


c)

```
» intervalos=30;
```

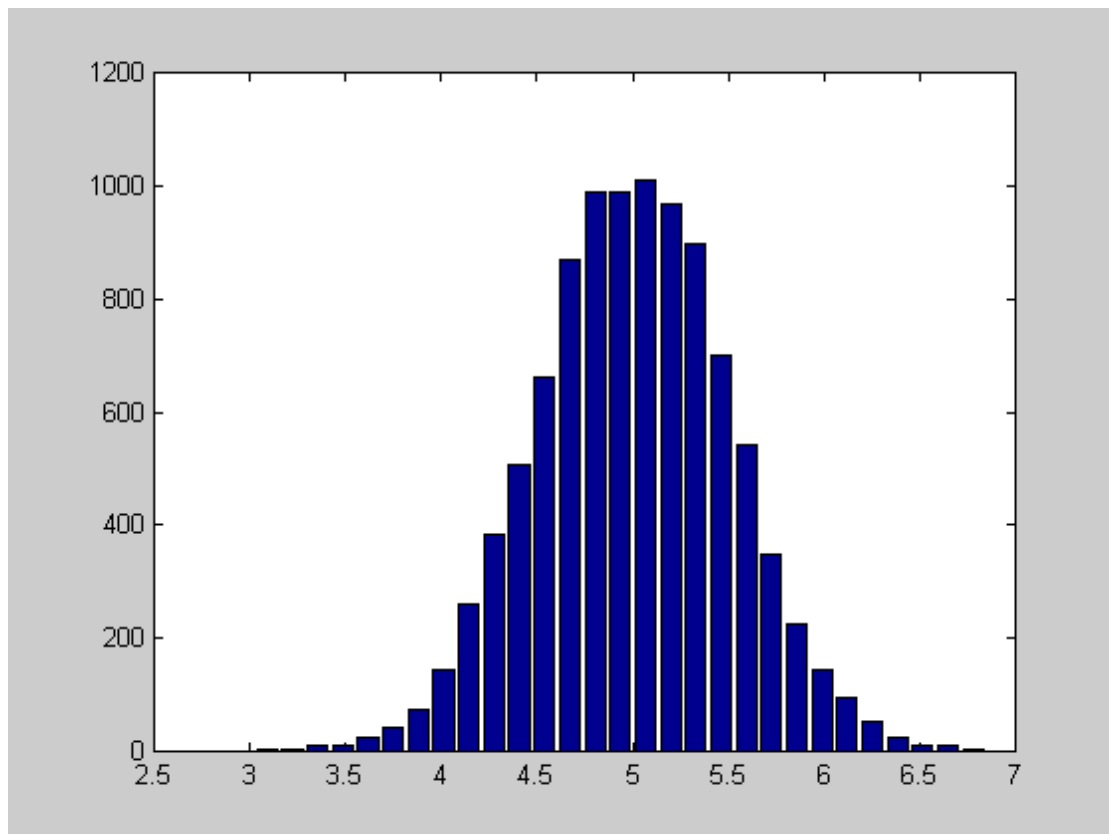
```
» [Nj abscisax]=hist(x,intervalos);
```

```
» bar(abscisax,Nj)
```



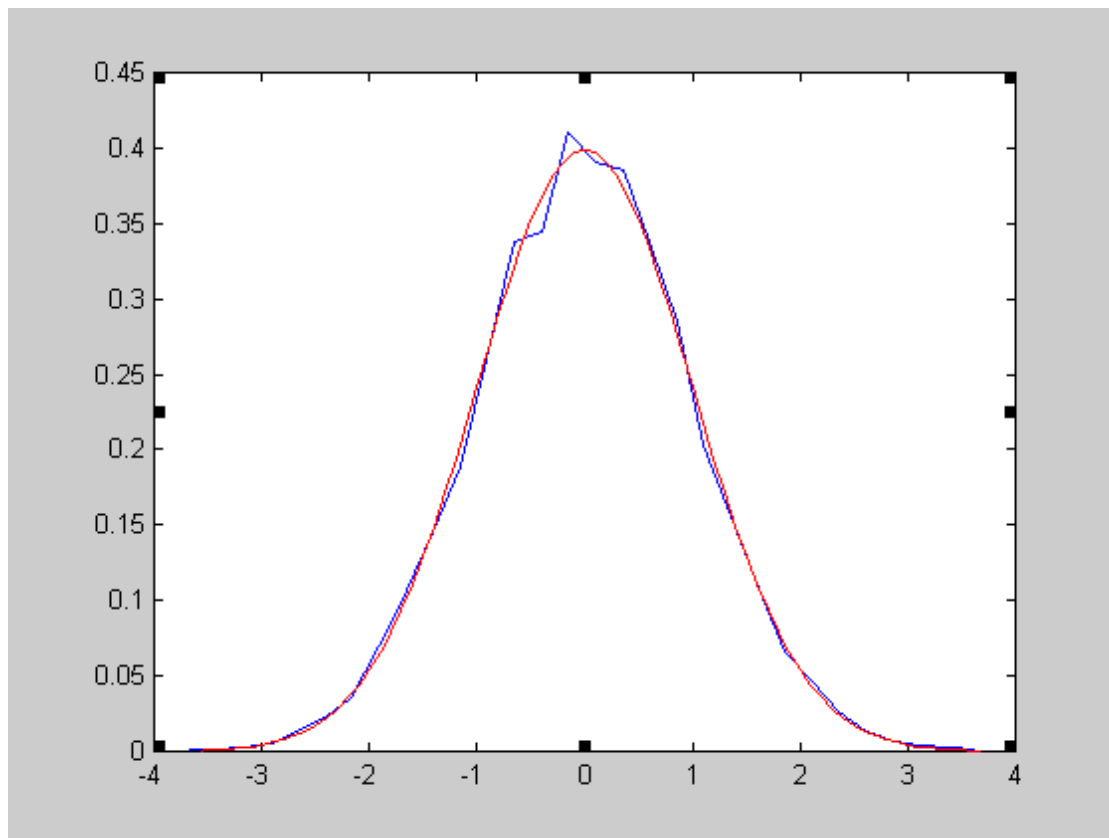
```
» [Nj abscisay]=hist(y,intervalos);
```

```
» bar(abscisay,Nj);
```



d)

```
» rangox=max(x)-min(x);  
» deltax=rangox/intervalos;  
» [Njx abscisax]=hist(x,intervalos);  
» Ntx=sum(Njx);  
» areax=Ntx*deltax;  
» fx=Njx/areax;  
» gx=-4:0.1:4;  
» gaussx=1/sqrt(2*pi)*exp(-gx.^2/2);  
» plot(abscisax,fx,gx,gaussx)
```

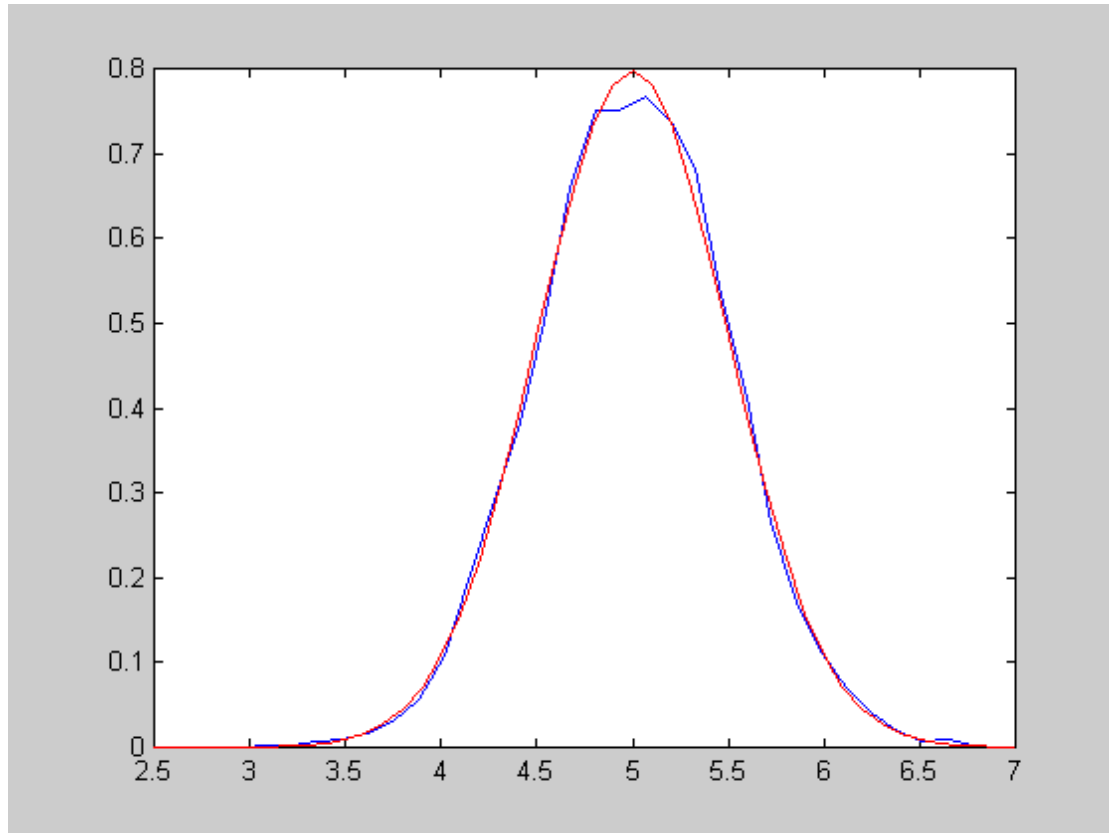


```
» rangoy=max(y)-min(y);  
» deltay=rangoy/intervalos;  
» [Njy abscisay]=hist(y,intervalos);  
» Nty=sum(Njy);
```

```

» areay=Nty*deltay;
» fy=Njy/areay;
» gy=-2.5:0.1:7;
» gaussian=1/(sqrt(2*pi)*(1/2))*exp(-(gy-5).^2/(2*(1/2)^2));
» plot(absxisay,fy,gy,gaussian)

```

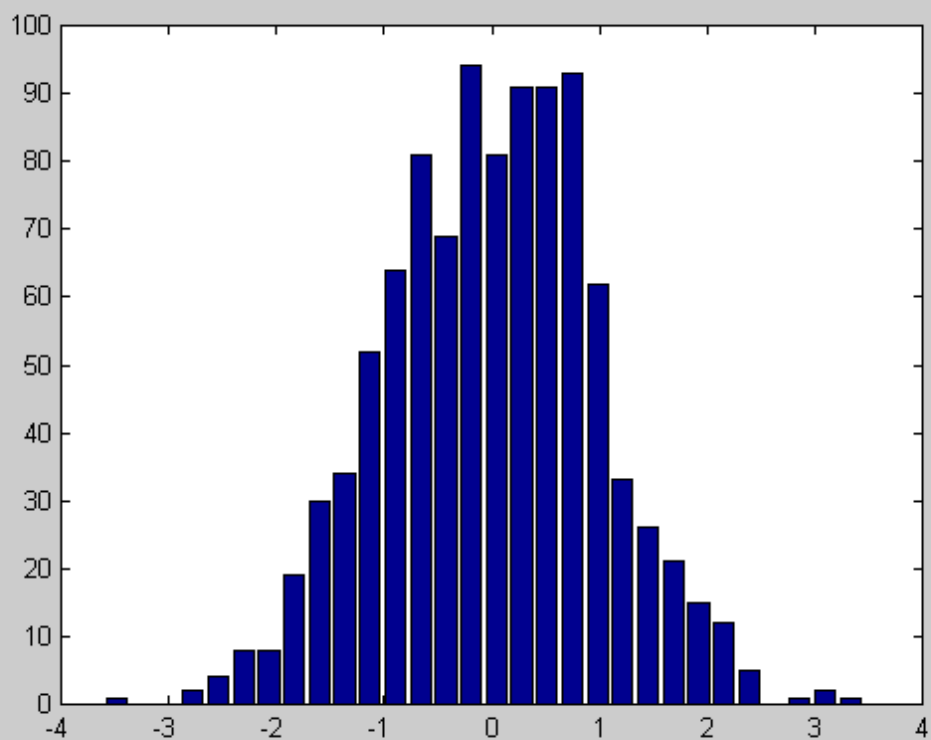


e)

```

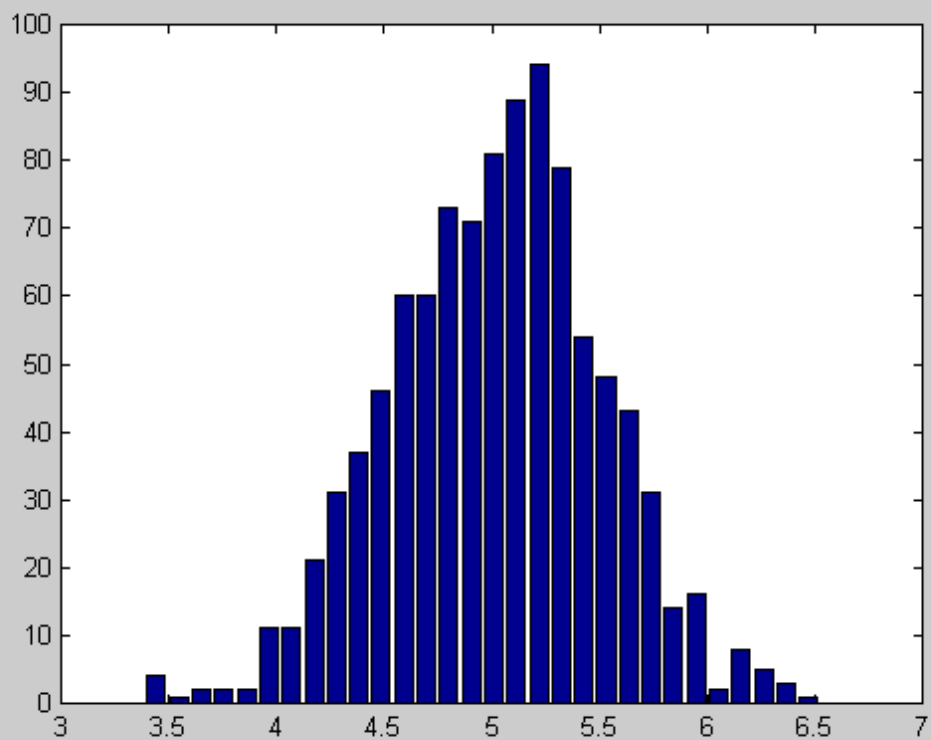
» x=randn(1000,1);
» aux=randn(1000,1);
» y=1/2*aux+5;
» intervalos=30;
» [Njx abscisax]=hist(x,intervalos);
» bar(abscisax,Njx)

```



» [Njy abscisay]=hist(y,intervalos);

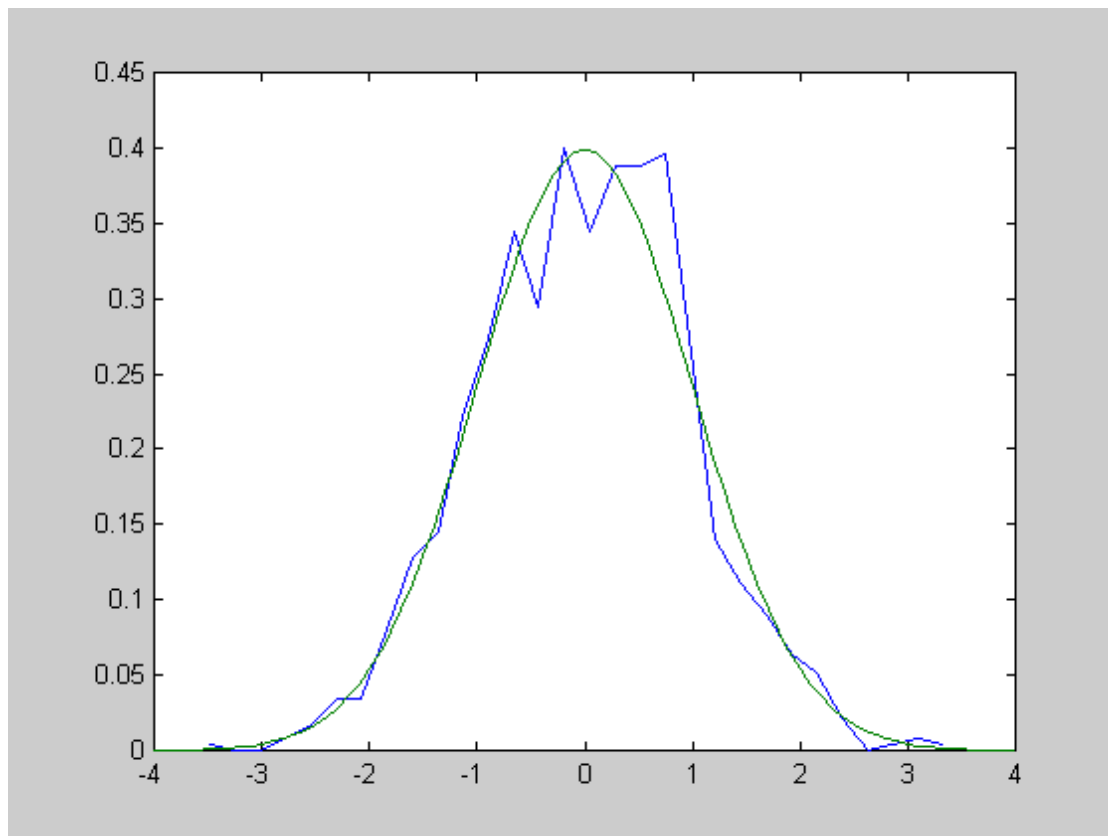
» bar(abscisay,Njy)



```

» rangox=max(x)-min(x);
» deltax=rangox/intervalos;
» Ntx=sum(Njx);
» areax=Ntx*deltax;
» fx=Njx/areax;
» gx=-4:0.1:4;
» gaussx=1/sqrt(2*pi)*exp(-gx.^2/2);
» plot(abscisax,fx,gx,gaussx)

```



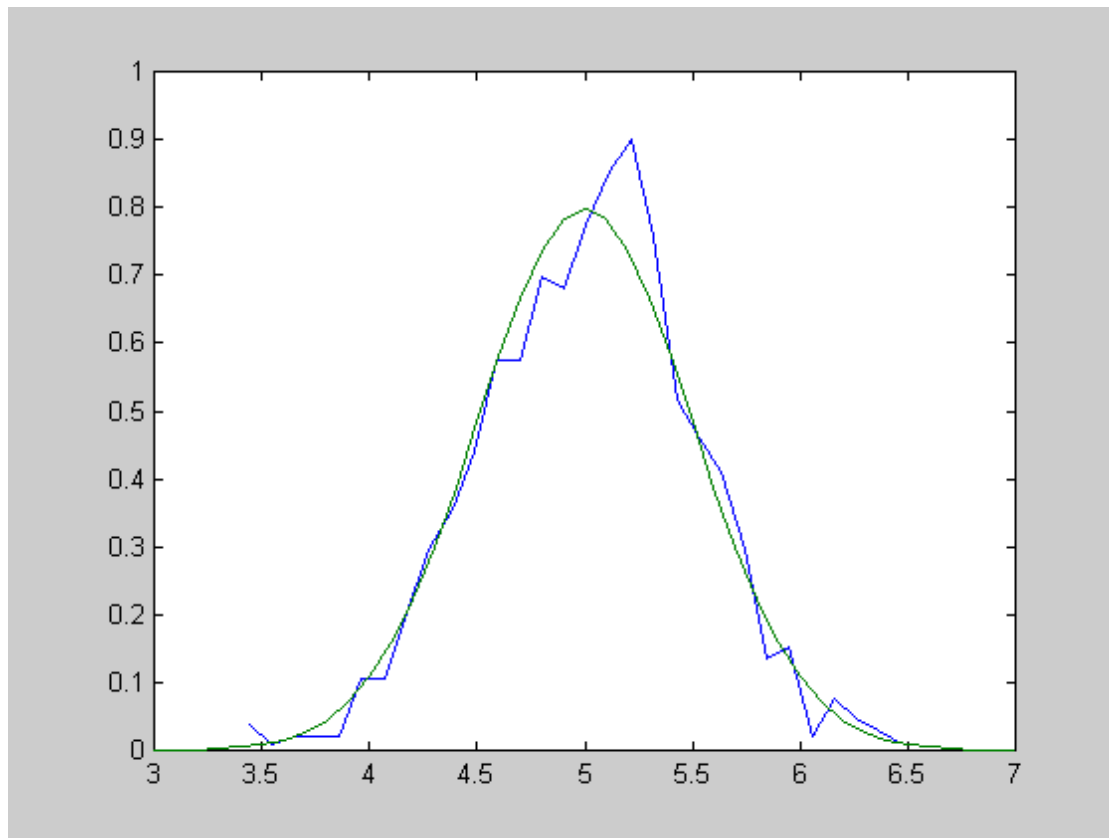
```

» rangoy=max(y)-min(y);
» deltay=rangoy/intervalos;
» Nty=sum(Njy);
» areay=Nty*deltay;
» fy=Njy/areay;
» gy=3:0.1:7;

```

```
» gaussy=1/(sqrt(2*pi)*(1/2))*exp(-(gy-5).^2/(2*(1/2)^2));
```

```
» plot(abscisay,fy,gy,gaussy)
```



Igual que en el ejercicio anterior, las aproximaciones mejoran cuando se aumenta el tamaño de los vectores.

Actividad 4:

Verificación experimental del Teorema del Limite Central

- Considere 12 V.A. independientes, y cada una de ellas uniformemente distribuidas entre 0 y 1. Sea la nueva V.A. Z, la suma de dichas variables. Sea $Y=Z/12$. Encuentre en forma teórica la media y la varianza de Y.
- Genere 12 variables aleatorias uniformemente distribuidas entre 0 y 1.
- Genere una nueva variable Y definida como el promedio de las variables generadas en b).
- Grafique, utilizando la función subplot, los primeros 100 valores de una de las variables uniformes, y de la variable Y.
- Estime la fdp, la media y la varianza de Y, utilizando la función hist.
- Compare los valores obtenidos en e) con los calculados en a).
- Grafique superpuestas la distribución teórica con la estimada.

a)

Si $Z = \sum X_n$ entonces:

- $E[Z] = \sum E[X_n]$
- $Var[Z] = \sum Var[X_n] + \sum \sum Cov[X_n, X_m]$

Por ser independientes e idénticas: $Cov[X_n, X_m] = E[X_n * X_m] - E[X_n] * E[X_m] = 0$

Luego:

- $\text{Var}[Z] = \sigma^2 \text{Var}[X_n] = n \cdot \text{Var}[X_n]$

Si esta distribuida uniformemente entre 0 y 1: $E[X_n] = \frac{1}{2}$

- $E[Y] = 12$

La varianza de cada X_n : $\text{Var}[X_n] = E[X_n^2] - E[X_n]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 0.083$

- $\text{Var}[Y] = 0.0069$

b)

» `z=rand(12,10000);`

c)

» `Y=sum(z)/size(z,1);`

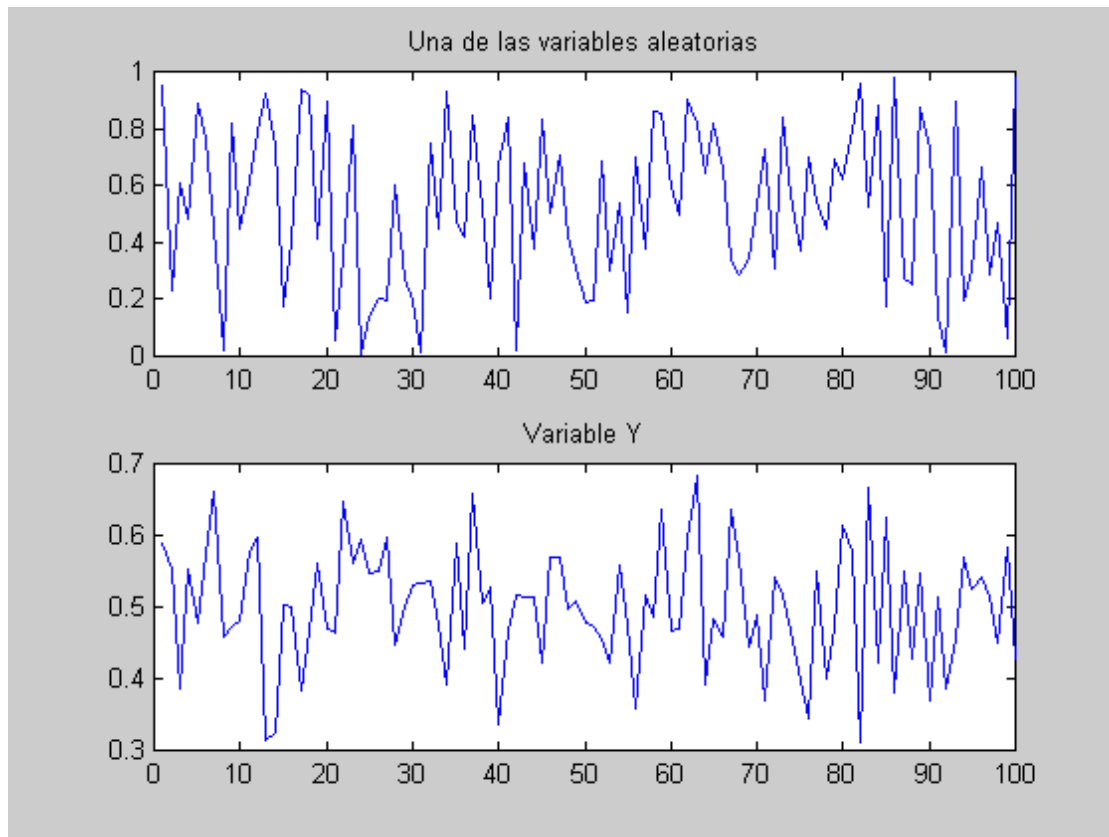
d)

» `subplot(2,1,1)`

» `plot(z(1:100))`

» `subplot(2,1,2)`

» `plot(Y(1:100))`

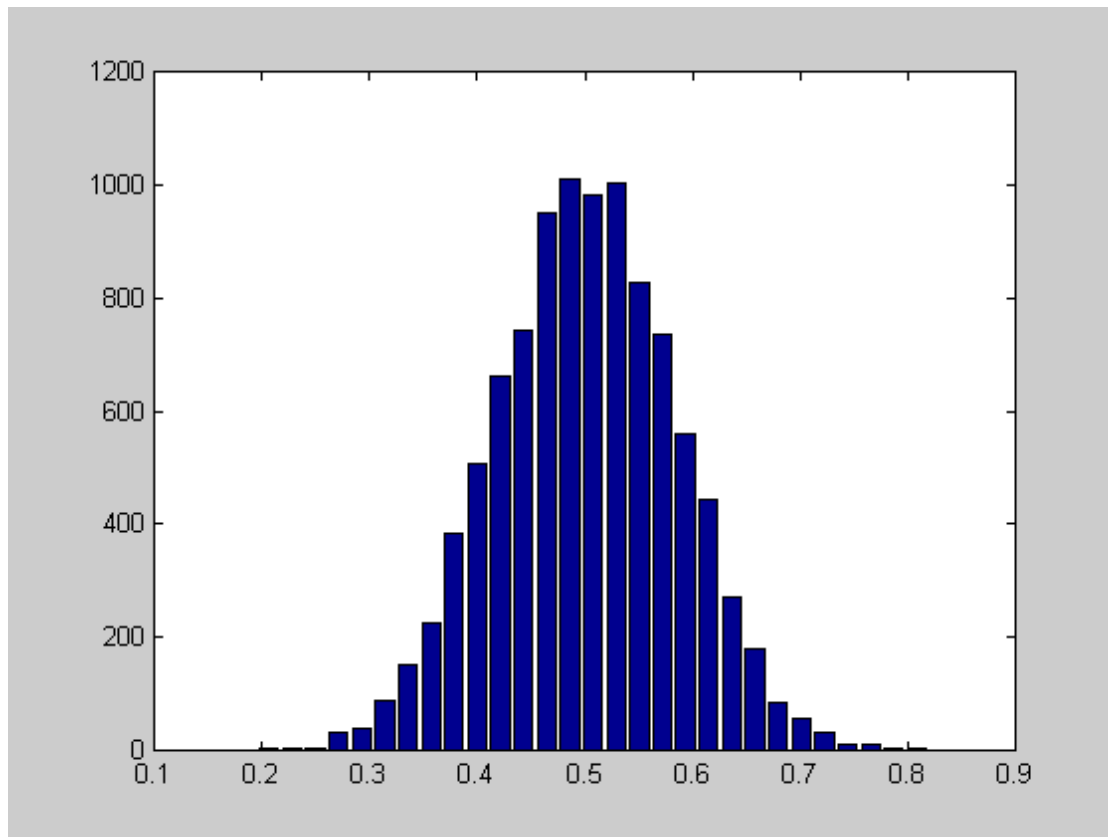


e)

```
» inter=30;
```

```
» [Mj absc]=hist(Y,inter);
```

```
» bar(absc,Mj)
```



```
» rango=max(Y)-min(Y);
```

```
» delta=rango/inter;
```

```
» Nt=sum(Mj);
```

```
» area=Nt*delta;
```

```
» f=Mj/area;
```

```
» mean(Y)
```

```
ans =
```

```
0.5011
```

```
» std(Y)^2
```

```
ans =
```

```
0.0070
```

f)

Los resultados obtenidos son bastante aproximados a los obtenidos en forma teórica.

g)

```
» gy=0.1:0.01:0.9;
```

```
» gaussy=1/(sqrt(2*pi)*0.083)*exp(-(gy-0.5).^2/(2*0.083^2));
```

```
» plot(absc,f,gy,gaussy)
```

