

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD T

El resultado ofrecido en el teorema anterior nos proporciona la base del desarrollo de procedimientos para hacer inferencias con respecto a la media de una población normal con una varianza . En este caso el teorema 7.1 nos dice que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma}$$

tiene una distribución normal estándar. Cuando se desconoce σ se le puede estimar mediante $S = \sqrt{S^2}$ y la expresión

$$\sqrt{n} \frac{\bar{Y} - \mu}{S}$$

nos dará como base para el desarrollo de métodos de inferencias con respecto a μ .

Demostraremos que la distribución de probabilidad de $\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu) / S$

esta dada por una función de densidad de probabilidad conocida como distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad. La definición general de una variable aleatoria que posee una distribución t de Student (o simplemente distribución t), es la siguiente:

DEFINICION: Sea Z una variable aleatoria normal estándar y sea χ^2 una variable aleatoria ji - cuadrada con ν grados de libertad.

Entonces si Z y χ^2

son independientes,

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2 / \nu}}$$

se dice que tiene una distribución t con ν grados de libertad.

Si $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ es una muestra aleatoria de una población normal con media μ y varianza σ^2 , se puede aplicar el teorema 7.1 para demostrar que

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma}$$

tiene una distribución normal estándar. El teorema 7.3 nos dice que $\chi^2 = (n - 1)S^2 / \sigma^2$

tiene una distribución χ^2

con $\nu = n - 1$

grados de libertad y que Z y χ^2

son independientes (ya que Z y χ^2

los son). Por lo tanto, por la definición 7.2

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2 / v}} = \frac{\sqrt{n} \bar{Y} - \mu / \sigma}{\sqrt{(n-1)S^2 / \sigma^2 (n-1)}} = \sqrt{n} \frac{\bar{Y} - \mu}{S}$$

tiene una distribución t con (n-1) grados de libertad.

La ecuación para la función de densidad t no se presentara aquí, pero se dan algunas indicaciones para su obtención en los ejercicios del final del capítulo. Como la función de densidad normal estándar, la función de densidad t es simétrica con respecto a cero, además, para ν

> 1, $E(T) = 0$ y para ν

> 2, $V(T) = \frac{\nu}{\nu - 2}$

(ν

- 2). Así vemos que una variable aleatoria con una distribución t

tiene el mismo valor esperado que una variable normal estándar. Sin embargo, una variable aleatoria normal estándar siempre tiene una varianza de 1, mientras que la varianza de una variable aleatoria con una distribución t

siempre es mayor que 1.

En la figura 7.2 se muestran las gráficas de una función de densidad normal estándar y de una función de densidad t. Nótese que ambas funciones de densidad son simétricas con respecto al origen, pero que la densidad t tiene mas masa probabilística en las colas.

Normal

7.2 estándar

Una comparación entre las funciones

de densidad normal estándar y t

0

valores de tales que $P(T > t)$

) = para $\alpha = 0.100, 0.050, 0.025, 0.010$ y 0.005

se dan en la tabla 5 del apéndice III. Por ejemplo si una variable aleatoria tiene una distribución t con 21 grados de libertad (g.l.), t

0.100 se encuentra al buscar en el renglón encabezado por 21 g.l. y en la columna con t

0.100. aplicando la tabla 5, vemos que t

0.100 = 1.323. Por lo tanto, para 21 g.l. la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución t sea mayor que 1.323 es 0.100.

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD F

Supóngase que deseamos comparar las varianzas de dos poblaciones normales basados en la información contenida en muestras aleatorias independiente de las dos poblaciones. Supóngase que una muestra aleatoria contiene n_1 variables aleatorias distribuidas normalmente con una varianza común σ_1^2

y que la otra muestra aleatoria contiene n_2

variables aleatorias distribuidas normalmente con una varianza común σ_2^2

y que la otra muestra aleatoria contiene n_2

variables aleatorias distribuidas normalmente con una varianza común σ_1^2

. Si calculamos S_1^2

de las observaciones en la muestra 1, entonces S_1^2

es una estimación de σ_1^2

. De manera similar, S_2^2

calculada a partir de las observaciones de la segunda muestra es una estimación para σ_2^2

. Así intuitivamente podríamos pensar en utilizar S_1^2

$/ S_2^2$

para hacer inferencias con respecto a las magnitudes relativas de σ_1^2

y σ_2^2

. Si dividimos cada S_i^2

por σ_i^2

, entonces la razón siguiente

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

tiene una distribución F

con $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$

grados de libertad. La definición general de una distribución F

es como sigue:

DEFINICION Sean χ_1^2

y χ_2^2

variables aleatorias ji – cuadrada con ν_1

y ν_2

grados de libertad. Respectivamente. Entonces si χ_1^2

y χ_2^2

son independientes,

$$F = \frac{\chi_1^2 / \nu_1}{\chi_2^2 / \nu_2}$$

se dice que tiene una distribución F

con ν_1

grados de libertad del numerador y ν_2

grados de libertad del denominador.

La función de densidad para variables aleatorias con la distribución F

es un miembro de la familia de las distribuciones beta . Omitimos la formula para la densidad de una variable aleatoria con la distribución F

, pero el método para obtenerla se indica en los ejercicios al final del capitulo.

DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD χ^2 – CUADRADA

Considerando nuevamente las muestras aleatorias independientes de distribuciones normales, sabemos que

$$\chi_1^2 = (n_1 - 1)S_1^2 / \sigma_1^2 \text{ y } \chi_2^2 = (n_2 - 1)S_2^2 / \sigma_2^2$$

tienen distribuciones χ^2
independientes con

$$\nu_1 = (n_1 - 1) \text{ y } \nu_2 = (n_2 - 1)$$

grados de libertad, respectivamente.

Así la definición 7.3 implica que

$$F = \frac{\chi_1^2 / \nu_1}{\chi_2^2 / \nu_2} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 / \sigma_1^2 (n_1 - 1)}{(n_2 - 1)S_2^2 / \sigma_2^2 (n_2 - 1)} = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$$

tiene una distribución F
con $(n_1 - 1)$

grados de libertad del numerador y $(n_2 - 1)$

grados de libertad del denominador.

En la figura 7.3 se muestra la gráfica de una típica función de densidad F

. Los valores de F_α

tales que $P(F > F_\alpha) = \alpha$

se dan en la tabla 7 del apéndice III, para los valores de $\alpha = 0.100,$

0.050, 0.025, 0.010 y 0.005. En la tabla 7 del apéndice III, los encabezados de las columnas corresponden a los grados de libertad del numerador, en tanto que los grados de libertad del denominador se encuentran como los encabezados principales de los renglones.

Frente a los grados de libertad del denominador (los encabezados de los renglones), se encuentran los valores de $\alpha =$

0.100, 0.050, 0.025, 0.010 y 0.005. Por ejemplo, si la variable F

estudiada tiene 5 grados de libertad del numerador y 7 grados de libertad del denominador, F

0.100 = 2.88, F

0.050 = 3.97, F

0.025 = 5.29, F

0.010 = 7.46 y F

0.005 = 9.52. luego la probabilidad de que una variable aleatoria con una distribución F

con 5 grados de libertad del numerador y 7 grados de libertad del denominador exceda de 7.46 es 0.01 . Lo correspondiente se afirma para los demás casos.

FIGURA 7.3 $f(u)$

Una típica función de densidad

De probabilidad F α

u

F_{α}

DISTRIBUCION PROBABILIDAD GAMA.

Los tiempos que tardan en revisar un motor de un automóvil ó avión tienen una distribución de frecuencias sesgadas. Las poblaciones asociadas a estas variables aleatorias frecuentemente tienen distribuciones que se pueden modelar adecuadamente por la función de densidad tipo gamma.

Función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria tipo gamma:

$$\alpha, \beta > 0; 0 < y < \infty$$

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

En donde:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

La cantidad de la de la función alfa se conoce como la función gamma. La integración directa nos da que la función uno igual a uno. La integración por partes nos da que la función de alfa menos uno alfa menos uno por la función alfa menos uno para cualquier intervalo de alfa mayor o igual a uno y que la función de n sea igual a n menos uno factorial, para un número entero n.

En el caso especial cuando alfa es un número entero, se puede expresar la función de distribución de una variable aleatoria tipo gamma como una suma de ciertas variables aleatorias de Poisson.

Si alfa no es un número entero, es imposible encontrar la antiderivada del integrando de la expresión:

$$0 < c < d < \infty$$

donde

$$\int_c^d \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} dy$$

Y por lo tanto es importante obtener las áreas bajo la función de densidad tipo gamma mediante integración directa.

Hay dos casos especiales de las variables aleatorias tipo gamma que merece consideración particular:

Una variable aleatoria tipo gamma que tiene una función de densidad con parámetros alfa igual a v entre dos y beta igual a dos se denomina variable aleatoria ji – cuadrada.

Ji – cuadrada se presenta con frecuencia en la teoría de la estadística. El parámetro v se denomina número de grados de libertad asociado a la variable aleatoria ji – cuadrada.

La función de densidad gamma para el caso especial $v = 1$ se denomina función de densidad exponencial.

$$\beta > 0; 0 < y < \infty$$

$$f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}$$

0

En cualquier punto.

La función de densidad exponencial muchas veces es útil en los modelos de duración de componentes eléctricos.

Un fusible es un ejemplo de un componente para el cual este supuesto suele cumplirse.

LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD BETA.

La distribución de probabilidad beta es una función de densidad con dos parámetros definida en el intervalo cerrado $0 \leq y \leq 1$. Se utiliza frecuentemente como modelo para fracciones, tal como la proporción de impurezas en un producto químico o la fracción de tiempo que una máquina está en reparación.

Función de densidad probabilidad:

$$\alpha, \beta > 0; 0 < y < 1$$

$$f(y) = \frac{y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

En cualquier otro punto donde

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Nótese que la definición de $f(y)$ sobre el intervalo $0 \leq y \leq 1$ restringe su aplicación. Si $c \leq y \leq d$, $y = (y - c) / (d - c)$ definirá una nueva variable en el intervalo $0 \leq y \leq 1$. Así la función de densidad beta se puede aplicar a una variable aleatoria definida en el intervalo $c \leq y \leq d$ mediante una traslación y una medición en la escala.

La función de distribución acumulativa para la variable aleatoria beta se llama comúnmente función beta y esta dada por

$$F(y) = \int_0^y \frac{t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} dt = I_y(\alpha, \beta)$$

Para valores enteros de alfa y beta, $I_y(\alpha, \beta)$ está relacionada con la función de probabilidad binomial. Cuando $y = p$, se puede demostrar que

$$F(p) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} dy = \int_{y=\alpha}^n p^y (1-p)^{n-y}$$

En donde $0 < p < 1$ y n igual a alfa más beta menos uno.

DISTRIBUCIÓN WEIBULL

Devuelve la probabilidad de una variable aleatoria siguiendo una distribución de Weibull. Esta distribución se aplica en los análisis de fiabilidad, para establecer, por ejemplo, el periodo de vida de un componente hasta que presenta una falla.

La ecuación para la función de distribución acumulada de Weibull es:

$$F(x, \alpha, \beta) = 1 - e^{-(x/\beta)^\alpha}$$

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha}$$

.

Cuando $\alpha = 1$ la distribución de Weibull devuelve la distribución exponencial con:

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

.

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Devuelve la probabilidad de una variable aleatoria continua siguiendo una distribución exponencial. Se usa para la planeación del tiempo entre dos sucesos.

Esta distribución se puede usar en diversos casos tales como: el tiempo que tardara una maquina de cajero automático en entregar efectivo. Esta función puede usarse para determinar la probabilidad de que el proceso tarde como máximo un minuto.

La ecuación de la distribución exponencial es:

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Distribución acumulada:

$$F(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$$

.

Siendo λ el valor del parámetro y x el valor de la función.