

Teorema de Gauss

Flujo de un campo vectorial

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie es un concepto matemático de gran utilidad en física: electromagnetismo, mecánica de fluidos, etc.

El flujo Φ de un campo vectorial $\mathbf{V}$ a través de una superficie S se define como la integral de superficie

$$\Phi = \oint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_S V \cos \theta \, dS \quad (15)$$

donde

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie S en cada punto. La orientación de $\mathbf{n}$ se adopta por convenio como sigue: si S es una superficie cerrada (en cuyo caso aparece un circulito en el signo integral), $\mathbf{n}$ apunta siempre hacia afuera del volumen; si S es abierta, $\mathbf{n}$ se orienta en el sentido en que avanza un tornillo de rosca derecha cuando gira en el sentido de la circulación fijada para el contorno de S . El flujo de campo eléctrico puede verse, en definitiva, como el número de líneas de fuerza que atraviesa una determinada superficie.

El flujo total puede ser positivo, negativo o nulo. Si es positivo, se denomina *saliente*, y si es negativo *entrante*. Esto proviene de la aplicación de (15) al campo de velocidades de un fluido, la cual da el flujo de fluido a través de S .

Si S es una superficie cerrada, la ec. (15) puede reescribirse de la siguiente forma: tómese un punto arbitrario P en el interior de S ; por definición, el elemento de ángulo sólido $d\Omega$ subtendido por la superficie diferencial dS desde el punto P es $d\Omega = dS \cos \theta / r^2$, donde r es la distancia de P a dS , y θ es el ángulo que forman la normal a dS y la línea que une P con dS . Sustituyendo esto en (15) queda

$$\Phi = \oint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_S V r^2 d\Omega \quad (16)$$

donde

Ley de Gauss para el campo eléctrico

Considérese el flujo del campo eléctrico de una carga puntual q , a través de una superficie cerrada arbitraria S que la contiene. Sustituyendo la ec (4) en (16) y tomado P donde está q , obtenemos

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (17)$$

Supongamos una carga q' exterior a la superficie cerrada S , entonces el flujo eléctrico es cero, porque el flujo entrante es igual al saliente. En efecto, consideremos dos elementos de superficie opuestos dS' y dS'' , subtendidos por el mismo ángulo sólido diferencial desde q' ; el flujo a través de dS' es igual en magnitud, pero de signo opuesto, al flujo eléctrico a través de dS'' , por consiguiente su suma es cero.

Si hay varias cargas en el interior de la superficie arbitraria S , el flujo eléctrico total será la suma de los flujos producidos por cada carga, en virtud del principio de superposición. Se puede establecer pues la *ley de Gauss*: el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada arbitraria que encierra una carga eléctrica neta q en su interior es

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = q/\epsilon_0 \quad (18)$$

S

Esta ley, obtenida analíticamente por el insigne matemático Gauss, es especialmente útil para calcular el campo producido por distribuciones de cargas que presentan ciertas simetrías.

Ejemplos de resolución del teorema de Gauss:

Carga puntual

Eligiendo como superficie una esfera centrada en la carga, el campo eléctrico es normal a la superficie, luego

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E \oint_S dS = E S = E 4\pi r^2 = q/\epsilon_0$$

entonces

$$E = q / 4\pi\epsilon_0 r^2.$$

Superficie esférica

Se elige la misma superficie esférica. En un punto del interior, al no haber cargas encerradas, se tiene $q/\epsilon_0 = 0$, es decir, $E_{int} = 0$. En el exterior, es válido el resultado anterior.

Lámina conductora

Supóngase una distribución uniforme de carga. Elegimos, por cuestiones de simetría, como superficie un cilindro normal a la lámina. El campo eléctrico es normal a la lámina, luego el flujo por la pared del cilindro es nulo y tan sólo hay flujo en sus caras planas, con incidencia normal,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E \oint_S dS = E S = E 2\pi r^2 = q/\epsilon_0$$

La carga encerrada es $q = \sigma A = \sigma 2\pi r^2$, luego

$$E = \sigma / 2\epsilon_0.$$

Línea cargada

Suponiendo una distribución uniforme σ de carga, elegimos el cilindro paralelo a la línea y centrado en ella. El campo eléctrico a través de sus caras planas será nulo, y normal a su pared, luego

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = E \oint_S dS = E S = E 2\pi r L = q/\epsilon_0$$

La carga encerrada es $q = \sigma L$, luego

$$E = \sigma / 2\pi\epsilon_0 r.$$

Teorema de Gauss en forma diferencial

Por otra parte, el teorema de Gauss del cálculo vectorial dice que, para todo campo vectorial $\mathbf{V}$ y cualquiera superficie S que encierre un volumen V' , se cumple que el flujo de $\mathbf{V}$ a través de S es igual a la integral extendida a todo el volumen V' de la divergencia de $\mathbf{V}$, esto es

$$\oint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_V \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}' \quad (19)$$

$$\oint_V \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}'$$

La aplicación de este teorema al campo eléctrico, junto con (18), nos permite escribir la ley de Gauss en forma diferencial para una distribución continua de carga de densidad ρ . En efecto, sea S una superficie cerrada arbitraria y V el volumen que encierra, entonces

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = q / \epsilon_0 = 1 / \epsilon_0 \oint_V \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \oint_V \rho \mathbf{E} d\mathbf{r}' \quad (20)$$

$$\oint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}'$$

pero como V es arbitrario, se tiene la igualdad

$$\rho \mathbf{E} = \epsilon_0 \nabla^2 \mathbf{V} \quad (21)$$

El significado físico de la ley de Gauss en forma diferencial es que establece una relación local entre el campo eléctrico en un punto y la densidad de carga en él. De este modo, se puede concluir que las cargas eléctricas son las fuentes del campo eléctrico, y que su distribución y magnitud determinan el campo en cada punto del espacio.

Por regla general, a las cargas positivas se las denomina *fuentes* del campo eléctrico, pues desde ellas parten las líneas de fuerza, mientras que a las cargas negativas se las llama *sumideros* del campo, ya que las líneas de fuerza siempre acaban en ellas.

Sustituyendo la ecuación (18) en la (21) tenemos la ley de Gauss para el potencial, más conocida como *ecuación de Poisson*

$$\nabla^2 V = \rho / \epsilon_0 = -(\nabla^2 \phi) \quad (22)$$

En los puntos donde no hay cargas $\rho = 0$, y la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

El problema electrostático fundamental consiste en calcular el potencial, y por lo tanto el campo eléctrico, en cada punto del espacio para una distribución de cargas dada. Esto equivale a resolver la ecuación de Poisson.

También puede resolver la *ecuación de Laplace* con las condiciones de contorno en las superficies que delimitan las distribuciones de carga (p. ej. las superficies de los conductores).