

Índice

Pág.

Primera parte.....	2
Segunda parte.....	5
Cálculo de errores.....	6
Tablas.....	7
Gráfica.....	9

Primera parte

El movimiento de un péndulo de torsión es armónico simple con tal de que el momento restaurador sea proporcional al ángulo girado, que es el caso cuando no se supera el límite elástico del muelle correspondiente a una tensión de cizalladura. En este caso no lo sobrepasamos, ya que la barra se desplaza *ligeramente*.

Cuando se tuerce la barra un cierto ángulo μ , el péndulo de torsión ejerce un momento o par restaurador proporcional a μ :

La constante k de proporcionalidad se denomina *constante de torsión*.

Si tratáramos de obtener la constante de torsión aplicando un momento conocido μ_0 para desviar la barra y luego midiéramos el desplazamiento angular μ_0 , conociendo además el momento angular I_0 de la barra, podríamos aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación, con lo que obtendríamos:

$$\mu_0 = -k\mu_0 I_0(d^2\mu/dt^2)$$

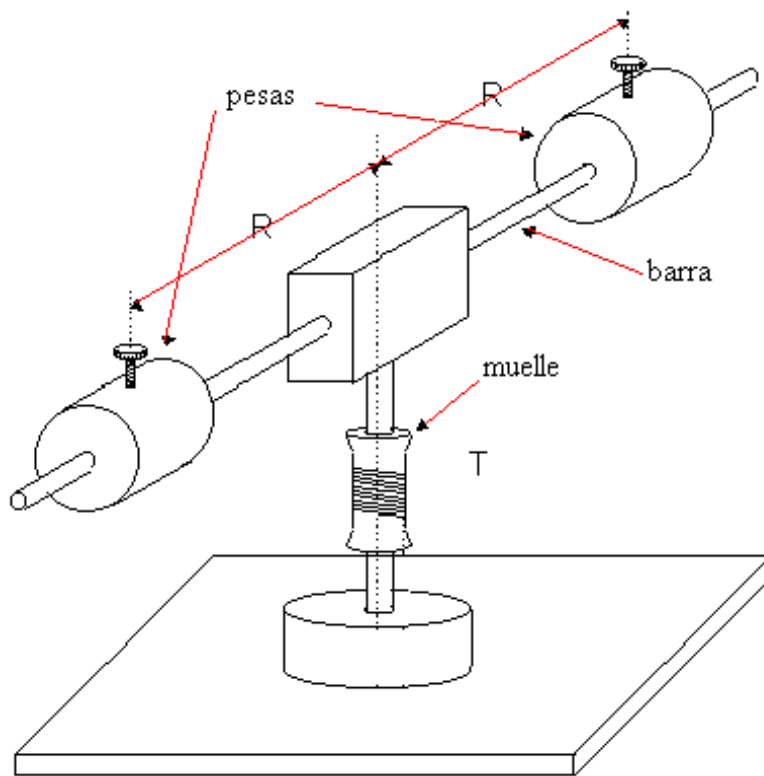
es decir:

ecuación que corresponde a un movimiento armónico simple con frecuencia angular

cuyo periodo es

Obsérvese que no hemos hecho ninguna aproximación para ángulos pequeños.

ESQUEMA



El momento de inercia se calcula mediante la ecuación:

donde m_i es la masa de y r_i es la distancia desde el eje de rotación a la i -ésima partícula. Si las partículas son suficientemente pequeñas, se puede reemplazar la primera ecuación por la integral:

Por lo tanto, es trivial que los momentos de inercia son aditivos, lo que nos permite escribir $I_{total} = I_{pesa1} + I_{pesa2} + I_{barra} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + I_{barra}$. Como los radios son iguales, si suponemos conocido el momento de inercia de la barra, $I_0 = cte.$, el momento de inercia total se puede expresar:

Además, sabemos que en este tipo de movimiento se verifica que $T^2 = 4\pi^2 I / k$, así que, sustituyendo I por su valor, obtenemos:

En nuestro experimento, la única variable en el segundo miembro de esta ecuación es la distancia r , y si representamos T^2 en función de $I_m := (m_1 + m_2)r^2$ obtenemos una recta. La pendiente de esta recta será $4\pi^2/k$, lo que permite hallar la constante de torsión cómodamente.

Para hallar esta recta hemos medido el periodo de oscilación del conjunto de la barra y las pesas, colocadas a distintas distancias. Hemos girado la barra algo menos de 180° y hemos contado el tiempo que tarde en oscilar 5 veces (a partir de la tercera oscilación, para evitar distorsiones). A partir de las distancias, como conocemos las masas (Vid. Tabla 0), hemos calculado los momentos de inercia de las pesas en cada uno de los casos. Los datos están recogidos en la tabla 1.

Como se puede observar en la gráfica, a causa de los errores experimentales los puntos no quedan perfectamente alineados, lo que impide hallar con exactitud la constante k (quedaría ligeramente distinta en cada caso). Para ajustar los datos de que disponemos a una recta, hemos empleado el método de los mínimos cuadrados. Si la recta es $y = ax + b$, con los momentos de inercia en abscisas y los cuadrados de los periodos en ordenadas, a y b vienen dadas por las fórmulas:

Los valores que hemos obtenido son:

- $a = 1'69820855954 \cdot 10^{-4}$

- $b = 7'41441372472$ (representa el momento de inercia de la barra)

Hemos representado la recta en la misma gráfica.

Ahora, despejando k del valor obtenido para a , $k = 4'2/a$, (Vid. Cálculo de errores)

Segunda parte.

Las masas y los radios de los cuerpos problemas están en la tabla 0.

Para calcular los respectivos momentos de inercia, hemos colocado cada objeto sobre el muelle (cuya constante ya conocemos) y hemos medido los periodos de oscilación siguiendo los mismos pasos ya descritos en la primera parte (Vid. Tabla 2)

Hemos calculado por medio de la integral correspondiente los momentos de inercia de cada uno de los cuerpos, empleando sólo las medidas de masa y radio. Las fórmulas aplicadas en cada caso son:

- Cilindro hueco: $I = mr^2$

- Cilindro macizo: $I = (1/2) mr^2$

- Disco: $I = (1/2) mr^2$ (un disco es equivalente a un cilindro macizo, ya que la altura del cilindro no aparece en la fórmula)

- Esfera: $I = (2/5) mr^2$

Por último, hemos calculado de nuevo los momentos de inercia, esta vez haciendo uso de la constante k obtenida en la primera parte. Para eso se usa la fórmula

o, lo que es más fácil: $I = T^2/a$.

La Tabla 3 muestra una comparación entre los resultados teóricos y los prácticos del cálculo del momento de inercia.

Aunque en el caso del cilindro hueco y sobre todo del disco hay una diferencia grande entre los resultados teóricos y los prácticos es muy improbable que hayamos cometido un error sistemático, porque los otros dos casos están bastante ajustados. El momento de inercia del cilindro macizo calculado por medio de k difiere del teórico una cantidad menor que el error. Seguramente, en el caso de la esfera pasa lo mismo (Vid (*) en Tablas 0 y 3) Por lo tanto, cabe suponer un error accidental en la medida de los periodos del cilindro hueco y el disco.

Medidas experimentales. Cálculo de errores.

En lugar de trabajar en el sistema internacional, hemos usado gramos y centímetros, para no tener que operar con potencias negativas de 10. La unidad de tiempo empleada sí es el segundo.

La balanza empleada para medir tenía una precisión de décimas de gramo. El error de escala era, por tanto de $\pm 0'1g$.

El cronómetro medía hasta centésimas de segundo. Como la medida tomada era de cinco veces el periodo, el

error de T^2 varía según la medida. Si el tiempo obtenido es $A = X + Y$, siendo X el valor real e Y el error, al hallar T , dividiendo A entre 5, resulta $X/5 + Y/5$. Como $X/5$ es el periodo exacto, el error se reduce ahora a $Y/5$. Al elevar $A/5$ al cuadrado, lo que obtenemos es: $A^2/25 = X^2/25 + Y^2/25 + 2XY/25$. El error ahora es de $Y^2/25 + 2XY/25$. Está claro que $Y^2/25$ es despreciable frente a $2XY/25$. En cada caso hemos hallado esta cantidad sabiendo que $A^2 - 2XY - X^2 = 0$, lo que quiere decir que el error es:

En el caso de los momentos de inercia, $I = zmr^2$, resulta que el error del radio en cm coincide con el error de la masa en g, por lo que hemos podido llamar Y a dicho error (aunque lo no hubiera resultado ninguna complicación de ser distinto) y, siendo A el valor obtenido, aplicar la fórmula $A = (m + Y)(r + Y)^2 = (m + e)(r^2 + e^2 + 2re)$, o lo que es lo mismo, $(m + 2r)Y^2 + (2mr + r^2)Y + Y^3 = A - mr^2 = \text{Error}$. Despreciando los términos en Y^2 e Y^3 , hemos aplicado:

Para el valor a en la ecuación obtenida por el método de los números cuadrados, el error estimado para el valor de a se obtiene por medio de la fórmula:

Como $k = 4\frac{1}{2}/a$ y el error de a es despreciable frente al de T^2 , bastará con coger para k tres cifras decimales. El resto no será significativo.

Para el cálculo por medio de k de los momentos de inercia, considerando el error de k despreciable, el error será, si Y es el error de T^2

TABLA 0

Masas y longitudes de los cuerpos empleados en el experimento

Cuerpo	Longitud (cm)	Radio (cm)	Masa (g)
Barra	70'1 ± 0'1	—	131'5 ± 0'1
Pesa 1	—	—	210'0 ± 0'1
Pesa 2	—	—	210'6 ± 0'1
Cilindro hueco	—	5'0 ± 0'1	376'0 ± 0'1
Cilindro macizo	—	4'9 ± 0'1	364'4 ± 0'1
Disco	—	10'9 ± 0'1	353'2 ± 0'1
Esfera	—	7'0 (*)	870 (**)

(*) No conocemos el error de esta medida, porque para calcular el radio tuvimos que rodear la esfera con una cuerda y luego medir la cuerda.

(**) Esta masa nos la daban como dato, por lo que la hemos considerado exacta.

TABLA 1

T^2 (s ²)	ϵT^2 (s ²)	r (cm)	ϵr (cm)	I_m (g.cm ²)	ϵI_m (g.cm ²)
8'18	0'01	4'0	0'1	6730	2
9'70	0'01	6'0	0'1	15142	3
11'89	0'01	8'0	0'1	26918	6
14'59	0'02	10'0	0'1	42060	10
18'71	0'02	12'0	0'1	60570	10
21'59	0'02	14'0	0'1	82440	20
25'54	0'02	16'0	0'1	107670	30

30'10	0'02	18'0	0'1	136270	30
36'31	0'02	20'0	0'1	168240	40
42'04	0'03	22'0	0'1	203570	50
48'33	0'03	24'0	0'1	242270	60

TABLA 2

<i>Cuerpo</i>	T2 (s2)	¢T2 (s2)	Im (g.cm2)	¢Im (g.cm2)
Cilindro hueco	1'411	5.10-3	9400	400
Cilindro macizo	0'723	3.10-3	4400	400
Disco	2'353	6.10-3	16000	600
Esfera	2'910	7.10-3	17017'947 (*)	(*)

(*) En este caso, aunque el error de la masa es 0, como no podemos hallar el del radio (Vid. Tabla 0) no tenemos forma de aproximar.

TABLA 3

<i>Cuerpo</i>	Resultado teórico		Resultado práctico		¢Im (g.cm2)
		Im (g.cm2)	¢Im (g.cm2)	Im (g.cm2)	
Cilindro hueco	9400	400	8310	30	
Cilindro macizo	4400	400	4250	20	
Disco	16000	600	13860	40	
Esfera	17017'947 (*)	(*)	17140	40	

(*) En este caso, aunque el error de la masa es 0, como no podemos hallar el del radio (Vid. Tabla 0) no tenemos forma de aproximar.

8

$$\circ = k\mu$$

$$! = rk/I0$$

$$d2\mu/dt2 = k\mu0/I0 = -!2\mu0$$

$$T = 2\pi I0/k$$

$$k = 232470'961$$

$a = \frac{N(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{N(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$	$b = \frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i Y_i)}{N(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$
---	--

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = \int r^2 dm$$

$$I = I_0 + (m_1 + m_2)r^2$$

$$T2 = 4\sqrt{2}Ibarr/k + 4\sqrt{2}(m1 + m2)r2/k$$

$$a = \frac{N(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{N(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2} \qquad b = \frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i Y_i)}{N(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \right\} \left\{ n\sum y^2 - (\sum y)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{\left\{ n\sum xy - (\sum x)(\sum y) \right\}^2}{\left\{ n\sum x^2 - (\sum x)^2 \right\} \left\{ n\sum y^2 - (\sum y)^2 \right\}} \right\}}$$

$$T=2\sqrt{r}I/k$$

$$E=A2/25-(A\pm0'01)2/25$$

$$E/z=Y(2mr+r2)$$

$$E=Yk/4\sqrt{2}$$