SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. Ecuaciones con dos incógnitas.

En este apartado vamos a tratar con ecuaciones con dos incógnitas. Por ejemplo, $2x - 5y = 7$ es una ecuación con dos incógnitas.

El par de valores $x = 6$, $y = 1$ es solución de esta ecuación porque $2 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 7$.

Definición: Llamamos **solución** de una ecuación con dos incógnitas a todo par de valores que hacen cierta la igualdad. Cabe destacar que si sólo tenemos una ecuación con dos incógnitas, tendremos infinitas soluciones.

Las ecuaciones lineales se representan mediante rectas.

Para obtener las soluciones de dos incógnitas se despeja una de ellas y se le dan valores a la otra. Si representamos las dos ecuaciones que forman un sistema como dos rectas, se puede observar que el punto donde se cortan dichas rectas (si se cortan) es la solución al sistema.

x	-1	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2	1

Ejemplo: $x + y = 5$

$$2x - y = 7$$

$y = 5 - x$

$y = 2x - 7$

Tabla de la 1ª Ecuación

Tabla de la 2ª Ecuación

Representación gráfica de ambas ecuaciones. Aquí podemos observar cómo la solución del sistema es x=4 e y=1

2. Sistemas de ecuaciones.

Definición: Dos ecuaciones forman un **sistema** cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común. Cuando dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, las ponemos de esta forma:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

Se llama **solución** de un sistema de ecuaciones a la solución común de ambas.

3. Sistemas equivalentes.

Definición: Dos sistemas de ecuaciones se dicen **equivalentes** cuando tienen la misma solución.

4. Número de soluciones de un sistema lineal.

4.1. Sistemas sin solución.

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias. Por ejemplo:

$$2x + 3y = 15$$
$$2x + 3y = 9$$

En este caso, nos dice por una parte que 2x+3y=15 y por otra que 2x+3y=9 y eso es absolutamente imposible porque para eso tendrían que adoptar las incógnitas valores distintos en cada ecuación y entonces no sería un sistema de ecuaciones.

Así sacamos la conclusión de que el sistema no tiene soluciones comunes y entonces se dice que el sistema es **incompatible**.

4.2. Sistemas con infinitas soluciones.

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen lo mismo o que una ecuación es proporcional a la otra, es decir, tenemos dos veces la misma ecuación. Veamos un ejemplo:

$$2x + 3y = 15$$
$$2x + 3y = 15$$

(1) $2x + 3y = 15$

$4x + 6y = 30$

(2)

En el ejemplo (1) tenemos que las dos ecuaciones son idénticas y en el ejemplo (2) tenemos que la segunda ecuación es la misma, pero multiplicada por 2, entonces si dividimos toda la ecuación por 2, obtendremos de nuevo que tenemos dos ecuaciones idénticas.

En este caso el sistema se llamará compatible determinado, porque tiene soluciones, pero éstas son infinitas.

5. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

5.1. Método de sustitución.

Este método de resolución de un sistema de ecuaciones consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

1º. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

2º. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

3º. Se resuelve esta ecuación.

4º. El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

5º. Se ha obtenido, así, la solución.

5.2. Método de igualación.

Éste método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e **igualar** las expresiones resultantes.

Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

1º. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2º. Se igualan las expresiones, lo cual da lugar a una ecuación con una incógnita.

3º. Se resuelve esta ecuación.

4º. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejara la otra incógnita.

5º. Se ha obtenido así la solución.

5.3. Método de reducción.

Este método consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas. Restando las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene una ecuación con sólo una incógnita (se ha **reducido** el número de incógnitas).

Resumamos los pasos que debemos dar:

1º. Se preparan las dos ecuaciones (multiplicándolas por los números que convenga).

2º. Al restarlas desaparece una de las incógnitas.

3º. Se resuelve la ecuación resultante.

4º. El valor obtenido se sustituye en una de las iniciales y se resuelve.

5º. Se obtiene, así, la solución.

Ejercicio resuelto por el método de reducción:

$$3x + 4y = 9$$
$$5x + 2y = 15$$

Puesto que el coeficiente de la y en la primera ecuación es doble que en la segunda, multiplicando ésta por 2 se igualarán los coeficientes. Restando, se eliminará esta incógnita.

$$3x + 4y = 9$$
$$5x + 2y = 15$$

Multiplicando por −2: $3x + 4y = 9$

$$-10x - 4y = -30$$

; ahora sumando ambas ecuaciones se obtiene lo siguiente: $-7x = -21$; $x = \frac{-21}{-7}$

$= 3$;

Ahora sustituimos x=3 en cualquiera de las expresiones inciales 3x+4y=9 3·3+4y=9 4y=0 y=0.

6. Reglas prácticas para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Si una o las dos ecuaciones del sistema tienen un aspecto externo complicado, se empieza por arreglarlas hasta llegar a la expresión $ax+by=c$.

Recordemos las ventajas de cada uno de los tres métodos aprendidos:

* El método de sustitución es especialmente útil cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1 ó −1 en alguna de las ecuaciones.

* El método de reducción es muy cómodo de aplicar cuando una de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones o bien sus coeficientes son uno múltiplo del otro.

* Si queremos evitar las operaciones con fracciones, podemos conseguirlo aplicando dos veces el método de reducción para despejar, así, una y otra incógnita. Este consejo es especialmente útil cuando los coeficientes de las incógnitas son números grandes.

ACTIVIDADES RELATIVAS A LA LECCIÓN:

*** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones**.

a) x+y=2; 2x+3y=5. **b)** x+y=1; 3x+2y=3 **c)** 2x+y=5; x+3y=5

d) 2x−y=3; 4x+3y=1 **e)** x+y=1; 3x−4y=7 **f)** 5x−y=7; 2x+3y=−4

g) 3x−2y=3; x−3y=−6 **h)** 5x−y=9; x−y=1 **i)** 2x−3y=2; x−2y=0

*** Resuelve los siguientes problemas.**

1. La Cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta de invertir el orden de sus cifras. **¿Cuál es dicho número?**

2. La edad de María es doble que la edad de Julia. Hace diez años la suma de las edades de las dos era igual a la edad actual de María. **¿Cuál son las edades actuales de María y Julia?**

3. Por 560 pesetas se han comprado 6 kg de azúcar de la clase A y dos kg de azúcar de la clase B. Se mezcla 1 kg de azúcar de cada clase y se obtiene una mezcla que vale 75 ptas. El kg. **¿Cúanto vale el kg de azúcar de la clase A?¿Y el de la clase B?**

4. Un comerciante compra un pañuelo y una bufanda por 2000 ptas y los vende por 2260 ptas. **¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del pañuelo ganó el 10 por 100 y en la venta de la bufanda ganó el 15 por 100?**

5. En un colegio, entre chicos y chicas, hay 300 alumnos. Del total asisten a una excursión 155 alumnos. Se sabe que a la excursión han ido el 60 por 100 de los chicos y el 40 por 100 de las chicas. **¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el colegio?**

6. ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

7. En un corral hay conejos y gallinas. En total hay 58 cabezas y 168 patas. **¿Cuántos conejos y cuantas gallinas hay en el corral?**

8. La edad de un padre es doble que la de su hijo. Hace diez años la edad del padre era triple que la del hijo**. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y del hijo?**

9. La suma de dos números es 12 y su cociente es 3. **Halla estos números**.

10. Un padre desea repartir entre sus hijos una cantidad de 10.000 pesetas. Al hijo mayor le quiere dar 2000 pesetas más que al pequeño. **¿Cuánto corresponderá a cada hijo?**.

1

3

Sistemas de ecuaciones lineales. <u>*Teoría y problemas*</u>*.*

x	-1	0	1	2	3	4
y	6	5	4	3	2	1

x	-1	0	1	2	3	4
y	-9	-7	-5	-3	-1	1

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Despejamos la x en la 2ª ecuación:

$x = 2y - 1$

$2(2y - 1) + 3y = 19$

$4y - 2 + 3y = 19 \rightarrow y = 3$

$x = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

Solución: $x = 5,\ y = 3$

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

$$\begin{cases} x = \dfrac{19 - 3y}{2} \\ x = -1 + 2y \end{cases}$$

$$\frac{19 - 3y}{2} = -1 + 2y$$

$$19 - 3y = 2(-1 + 2y) \rightarrow y = 3$$

$$x = -1 + 2 \cdot 3 = 5$$

Solución: $x = 5, \ y = 3$