

Vectores

Cuando vas en coche por una carretera, una autovía o una autopista, habrás observado que aparecen unas informaciones, representadas por flechas, que indican unas direcciones.

De igual forma, en cada vía de circulación están delimitados unos carriles para circular en un sentido o en otro.

De estos ejemplos podrás deducir que hay magnitudes en las que la dirección y el sentido desempeñan un papel muy importante: estas son magnitudes dirigidas o vectoriales y se expresan mediante *vectores*.

Representación de un vector

–Gráficamente

Un vector se representa gráficamente como un segmento orientado, identificando sus extremos mediante dos letras mayúsculas, o colocado una sola letra minúscula en el segmento.

–Analíticamente

Lo expresamos con las dos letras mayúsculas de los extremos o con la letra minúscula, en ambos casos, una pequeña flecha encima de las letras para indicar su carácter vectorial. A continuación, entre paréntesis, los componentes horizontales y vertical del vector

Elementos de un vector

En un vector se pueden distinguir los siguientes elementos:

–Punto de aplicación del vector: es el origen del vector.

–Dirección del vector: coincide con la dirección de la recta que lo contiene. Por tanto, la dirección del vector AB es la misma que la del vector BA, ya que una recta tiene una sola dirección.

–Sentido del vector: es la orientación que tiene el vector en las rectas. Una recta tiene dos sentidos opuestos entre sí.

El sentido del vector viene indicado por la punta de la flecha, así, el sentido del vector

AB es opuesto al sentido del vector BA.

–Modulo del vector: es la longitud del segmento que lo representa gráficamente e indica la intensidad o el valor numérico de la medida de la magnitud. Para indicar el modulo de un vector se escribe este entre dos barras verticales:

Modulo de AB $|\overrightarrow{AB}|$

Componentes de un vector

Podemos definir la posición de un vector en el plano mediante sus componentes referidas a unos ejes de coordenadas.

Para hallar las componentes de un vector basta ver cuantas unidades avanza horizontal y verticalmente desde su origen asta su extremo. Para ello hallamos la diferencia entre las coordenadas del punto extremo y el punto origen del vector.

Por ejemplo: $AB (8-2, 11-3) = AB (6,8)$

Modulo de un vector

Conocidas las componentes de un vector, podemos calcular el valor de su modulo. Para ello basta con hallar la hipotenusa del triangulo rectángulo cuyos catetos son las componentes del vector. En los vectores de la pagina anterior:

$$AB = 36 + 64 = 100 \quad CD = 9 + 16 = 25$$

En general:

$$AB = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$$

Equivalencia de vectores

Dos vectores son *equipolentes* cuando tiene el mismo modulo, la misma dirección y mismo sentido.

Para que dos vectores sean equipolentes, no es necesario que tengan el mismo punto de aplicación.

Si dos vectores tienen el mismo modulo, la misma dirección, pero sentido contrario, decimos que son vectores opuestos.

Los vectores AB y CD son equipolentes y escribimos: $AB = CD$.

Los vectores MN y PQ son opuestos y escribimos: $MN = - PQ$

Cuando un vector se traslada paralelamente a si mismo se obtiene un vector equipolente al primero.

Suma de vectores

– Gráficamente:

Para sumar gráficamente dos vectores trasladamos uno de ellos paralelamente a si mismo hasta hacer coincidir su origen con el extremo del otro vector. La vector suma sera el que se obtiene tomando como origen el del vector fijo y como extremo el del que hemos trasladado.

También podemos obtener el vector suma haciendo coincidir los orígenes de los dos vectores en un origen común y construyendo con ellos un paralelogramo. La diagonal del paralelogramo representa el vector suma de ambos vectores.

– Analíticamente:

Sean los vectores $u (3,8)$ y $v (7,-3)$.

Las componentes del vector suma de estos dos vectores serán iguales a la suma de las componentes respectivas de los vectores.

$$u(3,8) + v(7,-3) = w(3+7,8-3) = w(10,5)$$

Diferencia de vectores

– Gráficamente:

Para hallar la diferencia entre dos vectores trasladamos paralelamente a sí mismo el opuesto del vector sustraendo hasta hacer coincidir su origen con el extremo del vector minuendo. El vector diferencia se obtiene uniendo el origen de vector minuendo con el extremo del vector opuesto al vector sustraendo. También podemos hacer coincidir los orígenes de los dos vectores y obtener el vector diferencia uniendo el extremo del vector sustraendo con el vector minuendo.

– Analíticamente:

Sean los vectores $u(2,4)$ y $v(5,3)$

Obtenemos el vector diferencia sumando al vector minuendo el opuesto del vector sustraendo.

$$u(2,4) + (-v)(-5,-3) = w(2-5, 4-3) = w(-3,1)$$

Producto de un vector por un numero real

El producto de un vector v por un numero real h es otro vector $h \cdot v$, que cumple las siguientes condiciones:

- Tiene la misma dirección que v .
- Si h es mayor que 0 tiene el mismo sentido que v .
- Si h es menor que 0 tiene sentido opuesto
- El modulo es: $h \cdot v = h \cdot v$

Producto escalar de dos vectores

Vamos a definir una operación llamada producto escalar, cuyo resultado, a diferencia de las anteriores, no es un vector.

El producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman los dos vectores.

$$u \cdot v = u \cdot v \cos(u, v)$$

Observa que el producto escalar de dos números da como resultado un numero real, pues tanto los módulos de los vectores como el coseno del ángulo que forman son números reales.

Según se deduce de la expresión anterior, el producto escalar es distinto de cero cuando $u = 0$, $v = 0$ y el ángulo que forma u con v no es de 90° o 270° .

Otra forma de expresar el producto escalar es en una función de las componentes de los vectores. El producto escalar de los vectores $u(u_1, u_2)$ y $v(v_1, v_2) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$

Ejemplo

Si $u = 2$, $v = 4$ y el ángulo que forman los dos vectores es de 30° , vamos a calcular su producto escalar.

3

$$U \cdot v = 2 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Del producto escalar de dos vectores se pueden deducir que la condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean perpendiculares (también se les llama ortogonales), es que su producto escalar sea cero.

En efecto, si consideramos los vectores $u(1, 0)$ y $v(0, 2)$, observamos que el ángulo que forman es de 90° .

Sus módulos son, respectivamente, 1 y 2. si realizamos su producto escalar:

$$u \cdot v = 1 \cdot 2 \cos 90^\circ, \text{ y como } \cos 90^\circ = 0 \text{ } u \cdot v = 0$$

Ángulo de dos vectores

A partir de la expresión del producto escalar se puede deducir el ángulo que forman dos vectores.

Despejando $\cos(u, v)$ en $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos(u, v)$, resulta $\cos$

$$u \cdot u$$

$$(u, u) = u \cdot u$$

Ejemplos

El producto escalar de dos vectores es 6. Si sus módulos son 2 y 6 ¿qué ángulo forman?

$$6 = 2 \cdot 6 \cdot \cos(u, v)$$

$$\cos(u, v) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$u$$

Por tanto, el ángulo formado por u y v será el arco cuyo coseno sea $\frac{1}{2}$ que es de 60° .

Propiedades del producto escalar

Igual que las operaciones con números reales tienen sus propiedades el producto escalar también las tiene.

- Conmutativa: el resultado no depende del orden en que se tomen los vectores:

$$u \cdot v = v \cdot u$$

- Asociativa mixta: para multiplicar un número real por el producto escalar de dos vectores se puede multiplicar el número real por uno de los vectores y el resultado final no varía:

$$h(u \cdot v) = (h \cdot u) \cdot v = u \cdot (h \cdot v)$$

- Distributiva respecto a la adición de vectores.

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

- El producto escalar de un vector por si mismo es siempre positivo e igual al cuadrado de su modulo.

$$u \cdot u \text{ mayor que } 0$$

$$u \cdot u = u \cdot u \cdot \cos 0^\circ = u$$

Ecuación de la recta

Un espacio afín euclido es un conjunto de puntos y vectores donde se pueden medir las distancias entre puntos y módulos de vectores. En espacio afín euclido vamos a estudiar la ecuación de la recta en sus diversas formas.

Forma vectorial

Sabes que una recta esta formada por infinitos puntos. Supón que conoces un punto A (a_1, a_2) de la recta y un vector v (v_1, v_2), que pertenece a dicha recta.

Cualquier punto X (x, y) de la recta se puede alcanzar llevando desde el punto A un numero de veces el vector v hasta llegar al punto X, por lo que el vector $AX = h v$, por tanto:

$$OX = OA + h v$$

Esta forma de expresar la ecuación de la recta se denomina *forma vectorial*. Al vector v que determina la dirección de la recta se le llama *vector director de la recta*.

Como los puntos y los vectores tienen dos componentes (coordenadas), esta ecuación vectorial puede ponerse de la forma:

$$(X, y) = (a_1, a_2) + (v_1, v_2)$$

Ejemplo

¿Cuál es la ecuación en forma vectorial de la recta que pasa por el punto (1, 1) y tiene como vector director v (2, 2)?

Como $OX = OA + h v$:

$$(x, y) = (1, 1) + h (2, 2)$$

Forma parametrica

De la forma vectorial podemos deducir otra forma de expresar la ecuación de la recta denominada *forma parametrica*.

Para ello, lo único que tenemos que hacer es igualar las respectivas componentes de los miembros de la ecuación vectorial.

Si $(x, y) = (a_1, a_2) + h (v_1, v_2)$, resulta

$$x = a_1 + h v_1$$

$$y = a_2 + h v_2$$

Forma continua

En la ecuación paramétrica podemos despejar el parámetro h , por lo que nos quedaría:

$$x - a_1$$

$$h = \frac{v_1}{v_2} (x - a_1) + a_2$$

$$v_1 = v_2$$

$$y - a_2$$

$$h = \frac{v_2}{v_2}$$

Esta expresión es la forma continua o *ecuación continua* de la recta.

Ejemplo

Exprésala ecuación en forma continua de la recta que pasa por los puntos A (1, 1) y B (3, 3).

En este caso no nos dan unos puntos. Como la recta tiene que pasar por ellos. Calculamos el vector $v = AB$ restando a las coordenadas del punto B las del punto A.

Así obtenemos el vector $v (2, 2)$.

Como necesitamos un punto, tomamos A o B.

Eligiendo el punto A y el vector v , la ecuación en forma continua es:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2}$$

$$2 \cdot 2$$

Forma general o implícita

Tomando la ecuación continua como punto de partida, y operando en ella:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

$$= \frac{v_2 x - v_2 a_1 - v_1 y + v_1 a_2}{v_1 v_2} = 0$$

$$v_1 v_2$$

Si llamamos $A = v_2$, $B = -v_1$ y $C = -v_2 a_1 + v_1 a_2$, queda una expresión de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Que es la ecuación general o implícita de la recta.

Forma explícita

Partiendo de la forma implícita y despejando la variable y en función de x , se obtiene:

A C

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{B}{A}$$

A C

Si hacemos $-B/A = m$ y $-B/A = n$, la expresión nos queda de la forma:

$$Y = mx + n$$

Que es la ecuación explícita de la recta.

Observa que m es la coordenada x de dicho vector, esto es, la tangente del ángulo que forma el vector director con la horizontal, es decir, la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal. Por este motivo se dice que m es la pendiente de la recta.

n , que se denomina ordenada en el origen, es el punto donde la recta corta el eje Y .

Forma punto-pendiente

Partiendo de la ecuación en forma continua, llegamos a:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Que es la ecuación punto-pendiente de la recta.

Distancia de un punto a una recta

Dados un punto P y una recta r , ¿qué se entiende por distancia del punto P a la recta r ?

- Si P pertenece a la recta r , es evidente que $d(P, r) = 0$
- Si P no pertenece a la recta r , entendemos por distancia del punto P a la recta r el módulo del vector $\vec{QP}$, siendo Q el punto de corte de la recta r con la perpendicular a r que pasa por P , es decir, $d(P, r) = |\vec{QP}|$

Expresión vectorial

Sea la recta r cuya determinación normal es $r(A, n)$.

En el triángulo rectángulo AQP se verifica: $\vec{AP} = \vec{AQ} + \vec{QP}$; multiplicado escalarmente los dos miembros de la igualdad anterior por el vector normal, resulta:

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = \vec{AQ} \cdot \vec{n} + \vec{QP} \cdot \vec{n} = \vec{QP} \cdot \vec{n} \quad (1)$$

Ya que $\vec{AQ}$ y $\vec{n}$ son ortogonales y, por tanto, $\vec{AQ} \cdot \vec{n} = 0$.

De la relación (1) se obtiene $\vec{AP} \cdot \vec{n} = \vec{QP} \cdot \vec{n}$, de donde:

$$D(P, r) = QP = AP \cdot n$$

n

Expresión analítica

Sea la ecuación general de la recta dada $r: Ax + By + C = 0$, $A(X_0, Y_0)$ un punto cualquiera de r y $P(X_1, Y_1)$ el punto dado, entonces se tiene:

$$n = (A, B) \quad n = A + B$$

$$AP = (X_1 - X_0, Y_1 - Y_0) \quad AP \cdot n = A(X_1 - X_0) + B(Y_1 - Y_0)$$

Sustituyendo estos valores en la expresión vectorial resulta:

$$A(X_1 - X_0) + B(Y_1 - Y_0) \quad Ax_1 + By_1 + C$$

$$d(P, r) =$$

$$A + B \quad A + B$$

Pues $-(Ax_0 + By_0) = C$ ya que $A(x_0, y_0)$ es un punto de la recta r y por tanto verifica la ecuación $Ax_0 + By_0 + C = 0$

INDICE

Vectores, definición..... PAG 1

- Representación grafica
- Elementos de un vector
- Componentes de un vector
- Modulo de un vector
- Equivalencia de vectores
- Suma de vectores
- Diferencia de vectores
- Producto de un vector por un numero real
- Producto escalar de dos vectores
- Angulo de dos vectores
- Propiedades del producto escalar

Ecuación de la recta.....PAG 6

- forma vectorial
- forma parametrica
- forma continua
- forma general o implícita
- forma explicita
- forma punto-pendiente

Distancia de un punto a una recta.....PAG 10

- expresión vectorial

- expresión analítica

Ejercicios.....PAG 12

10