

Algebra Vectorial

Objetivo:

Adquirir destreza en el manejo de los segmentos dirigidos y de los vectores en 2 y 3 dimensiones y aplicarlos en problemas geométricos

Un punto cualquiera en el espacio de 3 dimensiones quedara definido si se conoce sus 3 distancias dirigidas a los 3 planos coordenados x , y y z

La distancia del punto al plano yz se llama ábsisa o coordenada x

La distancia del punto al plano xz se llama ordenada o coordenada y

La distancia del plano xy se llama cota o coordenada z

A cada punto en el espacio puede hacerse corresponder una terna ordenada de valores y viceversa

Para espacio de más de 3 dimensiones los puntos no se pueden representar gráficamente

SEGMENTO DIRIGIDO

Para representar geoméricamente un vector se usa el segmento dirigido el cual es una recta entre 2 puntos al que se le asigna un sentido recorrido

Un vector se representa con una letra minúscula y una raya encima (testa)

COMPONENTES ESCALARES DE UN SEGMENTO DIRIGIDO SOBRE LOS EJES DE COORDENADAS

A los 3 números reales a_1 , a_2 , a_3 , se les conoce como las componentes escalares del segmento dirigido sobre los ejes de coordenadas x , y , z , y dado que representan gráficamente al vector a se dice que estos números son más componentes de dicho vector y se puede expresar como:

$$= (a_1, a_2, a_3)$$

VECTOR DE POSICIÓN

Definición:

Sea el punto A en el espacio de 3 dimensiones cuyas coordinas son (a_1, a_2, a_3) se llama vector de posición de este punto al representado por el segmento dirigido que va del origen del sistema a dicho punto

MODULO DE UN VECTOR

Es la magnitud de un vector de n dimensiones su modulo será:

$$|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

EL VECTOR COMO CONJUNTO ORDENADO DE n NÚMEROS REALES

Un vector en el espacio de n dimensiones se define como un n -tupla de números reales es decir un arreglo ordenado $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ al i -ésimo número se le llama i -ésima componente del vector

Al conjunto de todos los vectores de n dimensiones se le llama espacio n dimensional o simplemente espacio n

OPERACIONES CON VECTORES

Igualdad:

Dados 2 vectores en el espacio de n dimensiones

$a = b$ sus componentes correspondientes son iguales es decir $a_1 = b_1, a_n = b_n$

Adición:

La suma de los vectores a y b se obtiene sumando sus correspondientes componentes

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Si λ es un número real y $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es un vector en el espacio de n dimensiones el producto (λa) será el vector que se obtiene multiplicando cada componente de a por λ es decir:

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$$

Esto nos dice que al multiplicar un vector por un escalar se va obtener otro vector, con las siguientes características:

- Si el escalar $\lambda > 1$ el resultado será un vector con la misma dirección del vector a pero con un módulo mayor
- Si $0 < \lambda < 1$ el resultado obtenido será un vector obtenido en la misma dirección pero con módulo menor
- Si $\lambda < -1$ el resultado será un vector obtenido en dirección opuesta y con un módulo mayor
- Si λ está en $\{-1 < \lambda < 0\}$ será un vector obtenido en dirección opuesta a a y con módulo menor

PROPIEDADES

Dados los escalares λ y μ y los vectores a y b , los cuales están en el mismo espacio se tiene que:

- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
- $(\lambda \mu)a = \lambda(\mu a)$
- $|\lambda a| = |\lambda| |a|$

VECTORES UNITARIOS

Un vector se dice que es unitario cuando su módulo es igual a la unidad para cualquier vector que cumpla con $a \neq 0$ siempre será posible determinar el vector unitario en su misma dirección estará dado por la siguiente expresión

$$u = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{|a|} (a_1, a_2, a_3)$$

$$|a| \quad |a||a| \quad |a|$$

SUSTRACCIÓN DE VECTORES

Dados a y b el vector $a-b$ se define a partir de la adición como

$$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_n - b_n)$$

el resultado obtenido se le conoce como diferencia de los vectores a y b

DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS COMO MODULO DE LA DIFERENCIA DE 2 VECTORES

Dados 2 vectores en el espacio de 3 dimensiones cuyas coordenadas son $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ los cuales nos definen a los puntos A y B sus vectores de posición siendo a y b el vector $a-b$ es aquel que va del extremo de b al extremo de a y su modulo $|a-b|$ será igual a la distancia entre los puntos A y B

EL PRODUCTO ESCALAR DE 2 VECTORES EN EL ESPACIO DE n DIMENSIONES

Se denota como $a \cdot b$ y se define con la siguiente expresión:

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_nb_n$$

El resultado de esta operación será un escalar (numero real) a esta operación se le conoce también como producto interno o producto junto de 2 vectores

ORTOGONALIDAD

2 vectores a y b serán ortogonales su producto punto es igual a 0

COMPONENTE VECTORIAL Y COMPONENTE ESCALAR DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Sean 2 vectores cuales quiera a y b en un espacio de 3 dimensiones a partir de estos se puede definir los siguientes elementos:

Un vector unitario bu en la dirección de b

Un escalar $a \cdot bu$ talque el vector $a - bu$ es ortogonal al vector b

La componente vectorial de un vector a sobre otro vector b la cual se expresa como:

Comp. Vec. $\underline{a}$:

b Un vector será bu en el cual bu es el vector unitario en la dirección del vector b y $a \cdot bu$ es una escalar talque $a - bu$ es ortogonal al vector b al escalar $a \cdot bu$ se le llama componente escalar del vector a sobre el vector b y se representa de la siguiente manera:

Comp. Esc. $\underline{a}$

b

Estas componentes se pueden calcular mediante las siguientes expresiones:

Comp. Vec. $\underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{b} \underline{b}$ Comp. Esc. $\underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{b}$

$b |\underline{b}| |\underline{b}| b |\underline{b}|$

Si θ es el ángulo formado por los vectores $\underline{a}$ y $\underline{b}$, el producto del punto vector $\underline{a}$ y $\underline{b}$ se puede calcular mediante la expresión

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \theta \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Esto que el producto escalar de 2 vectores diferentes del vector 0 es igual al producto de los módulos de cada uno de ellos por el cos del ángulo que forman. Para calcular el ángulo que se forman entre vectores hay que despejar la fórmula anterior

VECTORES UNITARIOS $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ Y FORMA TRINÓMICA DE UN VECTOR

En algunas ocasiones es conveniente expresar al vector en términos de vector unitario $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$. Estos vectores tienen la dirección de los ejes de coordenadas y su módulo es igual a 1. De esta manera el vector $\underline{a}$ se puede expresar como sigue:

$$\underline{a} = (a_1 \underline{i}, a_2 \underline{j}, a_3 \underline{k})$$

Esta expresión define al vector $\underline{a}$ en la forma trinómica

ÁNGULOS Y CÓSENO DIRECTORES DE UN VECTOR

Definición:

Los ángulos directores de un vector $\underline{a}$ son los ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que respectivamente forma el vector $\underline{a}$ con los vectores unitarios $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$

Las expresiones para calcular los ángulos directores se obtienen de la siguiente manera:

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{|\underline{a}|} \quad \cos \alpha_2 = \frac{a_2}{|\underline{a}|} \quad \cos \alpha_3 = \frac{a_3}{|\underline{a}|}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Es más conveniente trabajar con cósenos directores del vector $\underline{a}$ de estos ángulos y para obtenerlos nomás hay que despejar el coseno de las fórmulas anteriores. Cuando se suman los cuadrados de los cósenos tiene que ser igual a 1

PRODUCTO VECTORIAL

Se le conoce también como el producto cruz y nomás es aplicable únicamente a vectores de 3 dimensiones y el resultado será un vector:

$$\underline{a} \times \underline{b} = [(a_2 b_3 - a_3 b_2) \underline{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \underline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underline{k}]$$

El vector resultante de producto vectorial $\underline{a} \times \underline{b}$ es perpendicular tanto al vector $\underline{a}$ como al vector $\underline{b}$ cuando el producto punto es igual a 0

$$\underline{a} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0 \quad \underline{b} \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = 0$$

Si los vectores coinciden en su punto inicial sin ser paralelos entonces forman un ángulo por lo tanto el modulo de $|a \times b|$ será igual:

$$|a \times b| = |a||b| \sin \theta \quad 0^\circ < \theta < 180^\circ$$

PARALELISMO

2 vectores diferentes del vector 0 serán paralelos si y solo si su producto vectorial será igual al vector nulo

$$|a \times b| = 0 \text{ a } 0 \text{ b } 0$$

ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

Se puede calcular mediante el producto vectorial

$$|a \times b| = |a||b| \sin \theta$$

PRODUCTO MIXTO

En este producto primero se debe efectuar el producto $b \times c$ ya que si se asocia $a \cdot (b \times c)$

La expresión no tendrá significado dado que $a \cdot b$ es un escalar y el producto vectorial esta definido para 2 vectores.

Este producto mixto se llama también triple producto escalar y puede expresarse en términos de determinantes de tercer orden como se indica a continuación

$$a \cdot b \times c = a_1, a_2, a_3$$

$$b_1, b_2, b_3$$

$$c_1, c_2, c_3$$

también se puede expresar de esta forma $[a \ b \ c]$

y

z

x

P

ordenada

abcisa

Cota

a

a

a