Universidad de Chile

Facultad de Cs. Forestales

Depto. de Manejo de Recursos Forestales

Cat. Estadísticas II

ESTIMACIÓN PUNTUAL Y POR INTERVALO.

La estimación de un parámetro involucra el uso de los datos muestrales en conjunción con alguna estadística, para ello existen dos métodos **la estimación puntual** y la **estimación por intervalos**.

I. − Estimación puntual.

Es una estimación univaluada, es decir nos entrega un valor único para el parámetro. Dentro de la estimación puntual existen dos métodos de estimación: **La estimación por máxima verosimilitud** y **la estimación por el método de los momentos.**

I. 1. − Estimación Máximo Verosímil:

Tiene la propiedad (deseable) de proporcionar estimadores que son funciones estadísticas suficientes, siempre y cuando el estimador **sea único**, el que además es suficiente. El problema es que por lo general estos estimadores son sesgados, es decir presentan errores importantes en cuanto a su valor.

Def.: Sea *X1, X2, . . . , Xn* una muestra aleatoria de una distribución con función de densidad *f(x;)* y sea L*(x1, x2, . . . , xn;)* la verosimilitud de la muestra como función de . Si *t* = *u*(x1, x2, . . . , xn) es el valor de para el cual el valor de la función de verosimilitud es máxima, entonces *T = u(X1, X2, . . . , Xn)* es el estimador de máxima verosimilitud de , y ***t* es el estimador de máxima verosimilitud**.

Debido a la complejidad que a veces tienen las funciones de verosimilitud se escoge, por lo general, maximizar el *ln*L( ). Para comprobar que el estimador es máximo, se obtiene la 2ª derivada del *ln*L( ), si es < 0 entonces el estimador es E.M.V.

Ejemplo:

En un experimento binomial se observan $X = x$ éxitos en n ensayos. Obtener el E.M..V. del parámetro p.

En este caso la función de verosimilitud es idéntica a la de probabilidad de que

$X = x$, por lo tanto:

$L(x\ ;\ p) =$

$0 <= p <= 1$.

Entonces se tiene:

$$\ln L(x\ ;\ p) = \ln(n!) - \ln[(n-x)!] - \ln(x!) + x\ln(p) + (n-x)\ln(1-p)$$

Se deriva con respecto a ***p***, el parámetro, y se iguala a 0:

Para confirmar este valor se deriva por segunda vez con respecto a ***p***:

Lo evaluamos en *x/n*, con *x/n* < 1, y se tiene:

Observaciones:

- Para encontrar los estimadores M.V. de una expresión, se debe derivar por separado la expresión con respecto a cada parámetro.
- La función densidad siempre es dada.
- Demostrar siempre que el estimador es máximo con la segunda derivada.

I. 2. − Estimación por el método de lo Momentos:

Es el método más antiguo para la estimación de parámetros. Consiste en igualar los momentos apropiados en la distribución de la población con los correspondientes momentos muestrales para estimar un parámetro desconocido en la distribución.

Presenta una alternativa razonable cuando no se pueden determinar los estimadores M.V. Se deben igualar tantos momentos muestrales como sea necesario para determinar un estimador de momentos para un parámetro desconocido

f(x;) . El r−ésimo momento alrededor del

Def.: Sea *X1*, *X2*, . . . , *Xn* una muestra aleatoria de una distribución con función de densidad cero se define como:

Ejemplo:

Se tiene una variable aleatoria ***X*** que tiene una distribución conocida, si:

Y

Se tiene que y son los parámetros, entonces se resuelve para :

= / (*)

y

o

Sustituyendo en (*):

Obteniéndose finalmente los estimadores de momento para y :

II. − Estimación por intervalos:

La estimación por intervalos se refiere a un rango dentro del cual encontramos el parámetro, con un nivel de significación , por lo tanto el nivel de confiabilidad que tendra la estimación del parámetro será ***(1 −)*** y su notación será:

IC(1−) = . . .

Dentro de la estimación por intervalo existen muchos casos, los cuales se refieren a las distribuciones normal como binomial, en 1 población, como en pblaciones idependientes.

II. 1. − IC para   cuando se muestrea una distribución normal con varianza conocida:

Interesa conocer , por lo tanto

También se conoce

Entonces tenemos que:

Tamaño de muestra:

n es necesario para efectuar la estimación de , con   conocido, por lo tanto ***n*** se puede estimar de la sgte. forma:

en donde   representa las unidades alrededor del parámetro.

II. 2.− IC para   cuando se muestrea una distribución normal con varianza desconocida:

Es parecida a la anterior pero ahora se desconoce , entonces la varianza se estima por S2.

Entonces el IC queda:

Y el tamaño de muestra queda:

II. 3. − Diferencia de medias de 2 poblaciones normales e independientes:

a) Sean las poblaciones normales e independientes ***X*** e ***Y***, con sus respectivas medias y varianzas conocidas, etonces el intervalo de confianza es:

b) Si se desconoce las varianzas de ambas poblaciones, entonces el intervalo es:

en donde: ***k*** = *nx+ ny − 2*

II. 4. − IC para   con distribución normal y   desconocida.

X2: distribución chi− cuadrado.

III. 5. − IC para el cuociente de 2 varianzas cuando se muestrean dos poblaciones normales e independientes (con medias y varianzas desconocidas).

En donde:

III. 6. − IC para *p*, parámetro de proporción en una muestra de distribución binomial.

En donde:

Tamaño de muestra para este caso:

DOCIMACIA DE HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS.

Docimar una hipótesis estadística, significa hacer una afirmación con respecto a alguna característica desconocida de la población de interés. Se trata de apoyarse en la evidencia experimental de la que disponemos para ello.

Hipótesis nula: Es la hipótesis que asume el problema. ***H0.***

Tipos de error:

$$P(\theta \quad v.c.|_{\theta=\theta_0}) = \alpha$$

Tipo I: Es la probabilidad de **rechazar *H0*** si ésta es cierta =

Tipo II: Es la probabilidad de **no rechazar *H0*** si esta es falsa =

Se llama potencia de la prueba a la probabilidad de rechazar ***H0*** si esta es falsa:

F( ) es la función de distribución de probabilidades.

Los valores de los errores dependerán del tamaño de muestra que se tome a <n, más alto es el valor de , en cambio a >n el valor de es mayor.

Para docimar una hipótesis, es necesario cotejarla con alguna hipótesis alternativa, la que nos permitirá hacer la afirmación correspondiente. Para ello la hipótesis alternativa puede ser bilateral o unilateral, tanto por la derecha como por la izquerda del valor crítico de tabla.

De esta forma tendríamos lo siguiente:

Las regiones achuradas en todos los gráficos representa la región crítica de tamaño , entonces si el valor del parámetro cae en esta región quiere decir que **rechazamos la hipótesis nula**, es decir el parámetro p es:

Caso 1: más grande o más pequeño que los valores críticos obtenidos de la tabla.

Caso 2: más grande que el valor crítico obtenido de la tabla.

Caso 3: más pequeño que el valor crítico de tabla.

En caso contrario, en caso de que el valor del parámetro esté fuera de dicha región crítica, entonces **no rechazamos la hipótesis nula.**

I.− Dócima para , con conocido en una población normal:

Obs. Las hipótesis alternativas las obtenemos a partir del enunciado del ejercicio

Estadística de prueba:

N.S= , por lo tanto rechazamos H0 si

1.− Z0 " Z1− /2 si es bilateral.

2.− Z0 " − Z1− si es unilateral por la izquierda.

3.− Z0 " Z1− si es unilateral por la derecha.

Para calcular la probabilidad de **no rechazar H0 si esta es falsa**, entonces calculamos:

En que se puede asumir = a la media muestral en caso de desconocer su verdadero valor.

Ejercicio:

En un proceso de manufactura de tableros de contrachapado, se ha determinado que la cantidad promedio de aserrín utilizado en la fabricación de un tablero de 2.40 * 1.50 metros es de 20 kilos. Para comprobarlo, mes a mes se escogen 25 muestras al azar calculándose el peso de aserrín utilizado. Se considera que el proceso está fuera de control cuando la media muestral es menor o igual a 19.8 kilos, o mayor o igual a 20.2 kilos. Se supone que la desviación estándar es de 0.5 kilos/tablero.

- Enuncie la hipótesis nula y alternativa del problema.
- Obtener la probabilidad de error de tipo 1, suponga la pòblación normalmente distribuida.
- Suponiendo que la probabilidad de error de tipo I es = 0.05, entonces docime la o las hipótesis

II.− Dócima para una , con varianza desconocida.

Estadística de prueba:

N.S.: , por lo tanto se rechazará H0 si:

1.− t0 " tn−1; 1− /2 cuando es bilateral

2.− t0 " − tn−1; 1− cuando es unilateral por la izquierda.

3.− t0 " tn−1; 1− cuando es unilateral por la derecha.

Ejercicio.

Una cosechadora forestal, se demora en promedio 15.5 segundos en voltear, descortezar y trozar un árbol. Forestal Tornagaleones necesita comprar estos equipos pero está estudiando de qué marca deben ser para ello seleccionó una muestra al azar de 3 marcas y dentro de ellas muestreó lo siguiente:

Caterpillar:

12.5 10.2 9.8 12. 5 12.1 10.3 10.2 15 12.3 14.1 12.1 14 16 12.8

Fiat:

- 12.6 15.5 15.6 14.5 12.6 14.5 18.6 20.3 21.5 21 15.2 15.1 14.1

Mercedes−Benz:

14.2 12.3 13.3 12.1 14.5 12.3 14.5 25.1 23.1 21.1 24 25 14.5 16 12

- Efectúe pruebas de hipótesis para cada una de las tres marcas utilizando un N.S.= 0.01
- Cuál marca le recomendaría Ud. a la empresa y porqué.
- Calcule que probabilidad existe de rechazar la hipótesis nula si es cierta.
- Calcule la posibilidad de rechazar la hipótesis nula si esta es falsa.

III.− Dócima para diferencia de medias de poblaciones normales e independientes, con

varianzas conocidas.

Sean dos poblaciones **X** e **Y,** normales e independientes, con medias x y y y además varianzas conocidas x y y, respectivamente.

Estadística de prueba:

N.S= , por lo tanto rechazamos H0 si

1.− Z0 " Z1− /2 si es bilateral.

2.− Z0 " − Z1− si es unilateral por la izquierda.

3.− Z0 " Z1− si es unilateral por la derecha.

Probabilidad de **no rechazar H0**, si esta es falsa:

En donde C0:

Si nx " ny , se puede tomar un n promedio para poder calcular tanto , como C0.

Con el verdadero valor de la diferencia, o considerado como el valor de la dif. muestral.

Ejercicio:

Una disquería desea saber si un artista popular vende 3 veces más que un artista clásico, para ello efectuó un muestreo en 12 sucursales al azar, obteniendo los siguientes resultados: el artista popular vende en promedio 1500 copias de sus discos a la semana, con una desviación estándar de 5 discos por sucursal, en cambio el artista clásico vende 469 copias, con una varianza de 12 discos por sucursal.

- Efectuar la dócima correspondiente usando un N.S = 0.05 y 0.01, y concluir respecto al

tema.

- Calcular la probabilidad de rechazar H0, si es cierta.

c) Calcular el tamaño de muestra cuando la probabilidad de rechazo de Ho es de un 95%, si

esta es falsa.

IV.− Dócima para diferencias de medias de dos pobaciones independientes, pero con varianzas desconocidas, pero se suponen iguales.

Estadística de prueba:

En donde Sp:

N.S.: , por lo tanto se rechazará H0 si:

1.− t0 " tn−1; 1− /2 cuando es bilateral

2.− t0 " − tn−1; 1− cuando es unilateral por la izquierda.

3.− t0 " tn−1; 1− cuando es unilateral por la derecha.

Ejercicio:

Es de interés conocer cómo actúa el ruido de una motosierra en el rendimiento de los trabajadores. Para controlarlo Forestal CELCO ha seleccionado a 48 personas al azar de entre el personal de sus contratistas para llevar acabo el estudio. De las 48, a 24 se les entregó motosierras que trabajaban a 200 decibeles y al resto motosierras que trabajan a 220 decibeles, obteniéndose los siguientes resultados, registrándose los resultados en número de arboles cortados en promedio por 1 semana. Supuestamente los trabajadores sometidos a 200 decibeles cortarían en promedio 2 árboles más que los otros.

200 decibeles:

- 53 54 52 51 50 49 56 48 52 55 53 52 51 54 51 52 51 51 52 56 55 51 51

220 decibeles:

48 47 46 55 51 52 53 56 54 51 57 49 45 47 47 49 50 51 52 56 55 51 52 50

Docime la hipótesis correspondiente y concluya al respecto. N.S. = 0.05

V.− Dócima con respecto a   cuando se muestrea una población normal.

Estadística de prueba:

Se rechaza H0, si:

1.−   " Ð. : **X**20 " **X**2n−1; 1− /2

2.−   > Ð. : **X**20 " **X**2n−1; 1− .

3.−   < Ð. : **X**20 " **X**2n−1; 1− .

Ejercicio:

En un proceso de llenado de recipientes, la tolerancia en el peso es de 8 gramos. Para cumplir con este requisito, la máquina está calibrada para   = 0.21 grs/recipiente. Se toman al azar 50 muestras y el resultado es una varianza de 0.04 grs/recipiente. Efectuar la dócima correspondiente y concluir al respecto. Use un N.S = 0.01.

VI.− Dócima para la varianza de dos poblaciones normales e independientes.

Sean **X** e **Y** dos poblaciones normales e independientes, con medias desconocidas x y y y varianzas desconocidas x y y respectivamente. Entonces:

Estadística de prueba:

Debido que se asumen las vaianzas iguales.

Por lo tanto tenemos que se rechaza la hipótesis nula cuando:

1.− **F**o " **F**1− /2; nx−1; ny−1.

2.− **F**o " **F**1− ; nx−1; ny−1.

3.− **F**o " **F**1− ; nx−1; ny−1.

Ejercicio:

Se desea saber si la constante   de una máquina lijadora está bien calibrada, para ello se compara con una máquina calibrada digitalmente, los datos que a continuación se presentan corresponden a los promedios de aserrín en grs por hora dejados como desecho, siendo la máquina B el testigo:

A:

- 254.4 254.1 259.1 263 298 351 237 267 249 254 269 254 215 236 214

B:

255 256 241 253 257 259 254 251 250 249.8 256 263 254 236 246 251 258

Docime la hipótesis correspondiente y concluya al respecto.

VII.− Inferencia con respecto a dos poblaciones binomiales independientes.

Este tipo de inferencia se refiere generalmente a procesos de competencia en algún atributo de interés.

Entonces si:

Son los estimadores de máximo verosimilitud de *p1* y de *p2* respectivamente y dado que las poblaciones **X** e **Y** son binomiales, entonces es de interés docimar la hipótesis nula:

Versus la hipótesis alternativa que corresponda, de esta manera se tiene:

Estadística de prueba:

En donde:

N.S= , por lo tanto rechazamos H0 si

1.− Z0 " Z1− /2 si es bilateral.

2.− Z0 " − Z1− si es unilateral por la izquierda.

3.− Z0 " Z1− si es unilateral por la derecha.

Ejercicio:

Una organización de salud se interesa en actualizar su información respecto a la proporción de hombres que fuman. Con base en estudios previos, se cree que esta es de un 40%. Para comprobarlo la organización lleva a cabo una encuesta en la que se seleccionan en forma aleatoria 1200 hombres a los cuales se les pregunta sus hábitos de fumador, de éstos resulto que 463 son fumadores. Emplee un método aproximado para determinar si esta evidencia apoya la noción de que la proporción de hombres que fuman es del 40%. Use un N.S. = 0.01

y 0.05.

Ejercicios

- El responsable de la campaña política del candidato A piensa que dado el ambiente de las últimas semanas previas a las elecciones, su candidato se encuentra en igual posición que su oponente B. Sin embargo han ocurrido algunas situaciones incómodas que hacen peligrar su elección (el factor Lenguisky), de tal forma una organización lleva a cabo una encuesta entre 1500 ciudadanos. Suponiendo que 720 personas indican una preferencia por el candidato A
- ¿Existe alguna razón para indicar que el candidato A se encuentra en desventaja con respecto a B?, =0.05
- ¿Con qué n se podría empezar a tener la certeza de que no se pierda en las elecciones?, =0.05
- Se cree que el promedio verbal para el número de respuestas correctas para la PAA es mayor para las mujeres que para los hombres, por más de 10 puntos. Las muestras aleatorias para ambos sexos arrojaron los siguientes resultados:

Hombres	Mujeres
n1 = 125	n2=100
x1 = 480	x2=460
s1=60	s2=52

- Si se muestrearon dos poblaciones independientes normales, ¿se encuntra la creencia apoyada por la evidencia muestral con = 0.05?. ¿Cuál es el valor de p?.
- Supóngase una verdadera diferencia de 15 puntos. ¿Cuál es la potencia de la prueba anterior?.
- El gerente de una planta de partes y piezas de muebles sospecha que el número de piezas que un trabajador arma varía día a día con una valor más allá del normal esperado. Para comprobarlo encarga a su jefe de producción que observe a un trabajador tipo en particular y que controle su desempeño durante 10 días. Los resultados fueron los siguientes 15, 12, 8, 13, 12, 15, 16, 9, 8 y 14. Si se sabe que la desviación estándar para los trabajadores en general es de 2 unidades, y si el número de éstas que se produce diariamente se encuentra de forma adecuada por una distribución normal, a un nivel = 0.05. ¿Tiene apoyo la sospecha del gerente?. ¿Cuál es el valor de p?.
- Un distribuidor de insumos forestales tiene 2 proveedores principales, A y B. Debido a una mejor estructura de precios, el distribuidor hace negocio únicamente con B, si es que la proporción de artículos defectuosos para A y B es la misma. De dos grandes lotes de producto, el distribuidor selecciona al azar 125 unidades de A y 100 unidades de B, al inspeccionar tales unidades se encuentra con que hay 7 artículos defectuosos por proveedor. Bajo las suposiciones adecuadas y con base en esta información, ¿existe alguna razón para no comprar en forma única a B?. = 0.01.
- En un proceso de llenado, la tolerancia para el peso de los recipientes es de 8 gramos. Para reunir este requisito, la desviación estándar en el peso debe ser de dos gramos. Los pesos de 25 recipientes seleccionados al azar dieron como resultado una d.e. de 2.8 gramos.
- Si los pesos se encuentran normalmente distribuidos, determinar si la varianza de estos es diferente del valor necesario, = 0.01.
- ¿Para qué valores de la varianza muestral , no puede rechazarse la hipótesis de a)?.
- Un contratista ordena un gran número de vigas de acero con longitud promedio de 5 m. Se sabe que la longitud de una viga se encuentra normalmente distribuida con d.e.= 0.02m. Después de recibir el embarque, se seleccionan 16 vigas al azar y se miden. Si el rpomedio es menor que el esperado, se enviará de vuelta el embarque al fabricante. Si la probabilidad de rechazar un embarque bueno es de 0.04. ¿Cuál debe ser el valor de la media muestral?. Y si el promedio real es de 4.98 m, ¿cuál es la potencia de la prueba anterior?

17

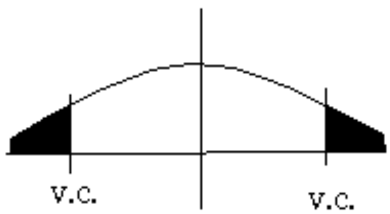
10

$P_1 = X / n_1$

$P = Y / n_2$

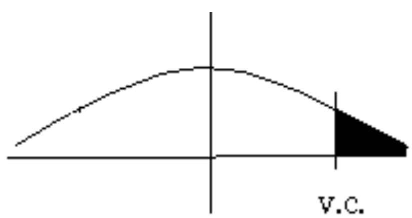
$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p \quad p_0$



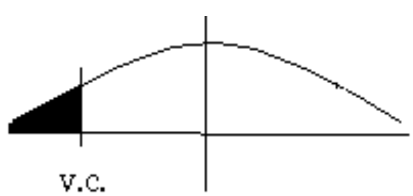
$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p > p_0$



$H_0 : p = p_0$

$H_1 : p < p_0$



$H_1'' : \mu > \mu_0$

$H_1'' : \mu < \mu_0$

$H_1 : \mu \quad \mu_0$

$H_0 : \mu = \mu_0$

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$\beta = P(z < \frac{\sigma * z_{1-\alpha} / \sqrt{n} + \mu_0 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} |_{\mu=\mu_1})$$

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \quad \mu_0$$

$$H_1'' : \mu < \mu_0$$

$$H_1''' : \mu > \mu_0$$

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

$$H_0 : (\mu_x - \mu_y) = \delta_0$$

$$H_1''' : \mu_x - \mu_y < \delta_0$$

$$H_1'' : \mu_x - \mu_y > \delta_0$$

$$H_1' : \mu_x - \mu_y \quad \delta_0$$

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_x}}}$$

$$P(z < \frac{c_0 - \delta_1}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{n}}} |_{\delta=\delta_1}) = \beta$$

$$c_0 = z_{1-\alpha} (\sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{n}} + \delta_0)$$

$$n = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})}{(\delta_1 - \delta_0)^2}$$

$$F_o = \frac{S_x^2 / \sigma_x^2}{S_y^2 / \sigma_y^2} \quad \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

$$H_1^{'}:\sigma_x{}^2 \quad \sigma_y^2$$

$$H_1^{''}:\sigma_x{}^2 > \sigma_y^2$$

$$H_1^{'''}:\sigma_x{}^2 < \sigma_y^2$$

$$H_0:\sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2$$

$$H_0:(\mu_x - \mu_y) = \delta_0$$

$$H_1^{'}:\mu_x - \mu_y \quad \delta_0$$

$$H_1^{''}:\mu_x - \mu_y > \delta_0$$

$$H_1^{'''}:\mu_x - \mu_y < \delta_0$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}}$$

$$H_0:\sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1^{'''}:\sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$H_1^{''}:\sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$H_1^{'}:\sigma^2 \quad \sigma_0^2$$

$$\mathbf{X}_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

$$P_1 = X \big/ n_1$$

$$P = Y \big/ n_2$$

$$H_0: p_1 - p_2 = 0$$

$$H_1^{'''}: p_1 - p_2 < 0$$

$$H_1^{\cdot\cdot} : p_1 - p_2 > 0$$

$$H_1^{\cdot} : p_1 - p_2 \quad 0$$

$$z_0 = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{(P(1-P))}\sqrt{\;{}^1\!/_{n_1} + {}^1\!/_{n_2}}}$$

$$P = \frac{X+Y}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{d[\ln L(x;p)]}{dp} = \frac{x}{p} - \frac{(n-x)}{(1-p)} = 0$$

$$\frac{d^2[\ln L(x;p)]}{dp^2} = \frac{np(1-p) + (x-np)(1-2p)}{[p(1-p)]^2}$$

$$-\frac{x}{(x/n)^2[1-(x/n)]} < 0$$

$$\mu = x\alpha$$

$$\mu = x\alpha$$

$$\mu_2^! = \alpha(\alpha+1)\theta^2$$

$$\mu_2^! = \frac{\mu}{\theta}(\frac{\mu}{\theta}+1)\theta^2$$

$$\theta = (\mu_2^! - \mu^2)/\mu$$

$$\alpha = \mu^2/(\mu_2^! - \mu^2)$$

$$\tilde{\alpha} = \overline{X^2}/(M_2^! - \overline{X^2})$$

$$\tilde{\theta} = (M_2^! - \overline{X^2})/\overline{X}$$

$$\mu \quad \tilde{\mu} = \overline{x}$$

$$IC_{(1-\alpha)}\mu = [\overline{x} \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

$$n = \frac{z^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}} * \sigma^2}{\xi^2}$$

$$IC_{(1-\alpha)}\mu = [\bar{x} \quad t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

$$n = \frac{t^2{}_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} * S^2}{\xi^2}$$

$$IC_{(1-a)\%}\mu_x - \mu_y = [(\bar{x} - \bar{y}) \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{(\frac{\sigma_x^2}{n_x} - \frac{\sigma_y^2}{n_y})}]$$

$$IC_{(1-a)\%}\mu_x - \mu_y = [(\bar{x} - \bar{y}) \quad t_{(1-\frac{\alpha}{2};k)} S_p \sqrt{(\frac{1}{n_x} - \frac{1}{n_y})}]$$

$$S_p = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{k}$$

$$IC_{(1-\alpha)\%}\sigma^2 = [\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}; \frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}]$$

$$IC_{(1-\alpha)\%}\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = [a\frac{S_y^2}{S_x^2}; b\frac{S_y^2}{S_x^2}]$$

$$a = \frac{1}{F_{(n_x-1);(n_y-1);(1-\frac{\alpha}{2})}}$$

$$b = F_{(n_x-1);(n_y-1);(1-\frac{\alpha}{2})}$$

$$IC_{(1-\alpha)\%}p = [p \quad z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$$

$$p = \frac{x}{n}$$

$$n = \frac{z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} * p(1-p)}{\varepsilon^2}$$