

Fractales

1.1. ¿Por qué Fractales?

La geometría tradicional, la euclídea, es la rama de la matemática que se encarga de las propiedades y de las mediciones de elementos tales como puntos, líneas, planos y volúmenes. La geometría euclídea también describe los conjuntos formados por la reunión de los elementos más arriba citados, cuyas combinaciones forman figuras o formas específicas.

Sin embargo, las formas encontradas en la naturaleza, como montañas, franjas costeras, sistemas hidrográficos, nubes, hojas, árboles, vegetales, copos de nieve, y un sinnúmero de otros objetos no son fácilmente descriptos por la geometría tradicional.

La geometría fractal provee una descripción y una forma de modelo matemático para las aparentemente complicadas formas de la naturaleza. Éstas poseen a veces una remarcable invariancia de simplificación bajo los cambios de la magnificación, propiedad que caracteriza a los fractales, como veremos más adelante.

1.2. Etimología de la palabra Fractal

El matemático francés Benoit Mandelbrot acuñó la palabra fractal en la década de los '70, derivándola del adjetivo latín *fractus*. El correspondiente verbo latino: *frangere*, significa romper, crear fragmentos irregulares.

1.3. Breve Reseña Histórica

Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henri Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en los años '20.

El estudio fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo de la computadora digital. El Dr. Mandelbrot, de la Universidad de Yale, con sus experimentos de computadora, es considerado como el padre de la geometría fractal. En honor a él, uno de los conjuntos que él investigó fue nombrado en su nombre.

Otros matemáticos, como Douady, Hubbard y Sullivan trabajaron también en esta área explorando más las matemáticas que sus aplicaciones.

Desde la década del '70 este campo ha estado en la vanguardia de los matemáticos contemporáneos. Investigadores como el Dr. Robert L. Devaney, de la Universidad de Boston ha estado explorando esta rama de la matemática con la ayuda de las computadoras modernas.

1.4. Diferencias fundamentales entre la Geometría Euclídea y la Fractal

Euclídea	Fractal
Tradicional (más de 2000 años)	Moderna (aprox. 10 años)
Dimensión entera	Dimensión fractal
Trata objetos hechos por el hombre	Apropiada para formas naturales
Descripta por fórmulas	Algoritmo recursivo (iteración)

1.5. Concepto de Fractal

El Fractal es, matemáticamente, una figura geométrica que es compleja y detallada en estructura a cualquier nivel de magnificación. A menudo los fractales son semejantes a sí mismos; esto es, poseen la propiedad de que cada pequeña porción del fractal puede ser visualizada como una réplica a escala reducida del todo. Existen muchas estructuras matemáticas que son fractales: el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, el conjunto Mandelbrot, los conjuntos Julia, y muchas otras.

La característica que fue decisiva para llamarlos fractales es su dimensión fraccionaria. No tienen dimensión uno, dos o tres como la mayoría de los objetos a los cuales estamos acostumbrados. Los fractales tienen usualmente una dimensión que no es entera, ni uno ni dos, pero muchas veces entre ellos. Ejemplo: 1,55.

Es importante reconocer que los fractales verdaderos son una idealización. Ninguna curva en el mundo real es un fractal verdadero; los objetos reales son producidos por procesos que actúan sólo sobre un rango de escalas finitas. En otras palabras, los objetos reales no tienen la infinita cantidad de detalles que los fractales ofrecen con un cierto grado de magnificación.

2.1. Dimensión Fractal

La noción de dimensión fractal (fraccional) provee una manera de medir qué tan rugosa es una curva. Normalmente consideramos que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. A esta idea de dimensión se lo llama dimensión topológica. Sin embargo, una curva rugosa que recorre una superficie puede ser tan rugosa que casi llene la superficie en la que se encuentra. Superficies como el follaje de un árbol o el interior de un pulmón pueden efectivamente ser tridimensionales. Podemos, entonces, pensar de la rugosidad como un incremento en la dimensión: una curva rugosa tiene una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tiene entre 2 y 3.

2.2. ¿Puede existir una Dimensión Fraccional?

Para calcular la dimensión de un fractal se usan los conceptos de límite, logaritmo, escalas y medidas. En el cálculo de la dimensión de fractales muy complejos como el conjunto Mandelbrot se usan computadoras, pero para fractales más simples se usan fórmulas matemáticas, una muy común es la de Hausdorff-Besicovitch, pero hay varios métodos. Damos aquí un ejemplo simple: el cálculo de la dimensión del triángulo de Sierpinski, utilizando un método llamado similitud por duplicación.

Si tomamos un segmento de longitud 1 y lo duplicamos tendremos dos segmentos iguales al original.

¡Error! Marcador no definido.

Si duplicamos los lados de un cuadrado de lado 1 tendremos 4 cuadrados iguales al original

¡Error! Marcador no definido.

Tomamos ahora un cubo de largo, alto y ancho 1 y duplicamos todas sus medidas. Tenemos ahora 8 cubos iguales al original.

Disponemos estos datos en una tabla:

Figura	Dimensión	No. de Copias
Línea	1	$2 = 2^1$
Cuadrado	2	$4 = 2^2$

Cubo	3	$8 = 2^3$
Similitud al duplicar	d	$n = 2^d$

Se nota ahora que al duplicar los lados de una figura el número de figuras iguales a la original es igual a 2 elevado a un número que es igual a la dimensión de la figura.

F número de figuras iguales a la original(copias).

D dimensión de la figura.

La fórmula es: $F = 2^D$

Al aplicar el logaritmo a ambos lados de la igualdad:

$$\log F = \log 2^D$$

$$\log F = D \cdot \log 2$$

Luego,

$$D = \log F / \log 2$$

Se puede usar esta fórmula para encontrar la dimensión fractal del Triángulo de Sierpinski puesto que al duplicar la longitud de los lados, se obtiene otro triángulo de Sierpinski semejante al primero, que contiene a su vez a 3 triángulos de la misma escala que el primero; por lo tanto, $F = 3$.

Usando nuestra fórmula:

$$D = (\log 3) / (\log 2) = 1,58496$$

3.1. Iteración

El conjunto de Mandelbrot es generado por iteraciones. Iteración significa repetir un proceso varias veces. En matemática este proceso es casi siempre la aplicación de una función. Para el conjunto de Mandelbrot, la función involucrada es la función no-lineal más simple de imaginar, $z^2 + c$, donde c es una constante. Veremos más tarde el valor exacto de c .

Para iterar $z^2 + c$, comenzamos con lo que llamaremos una semilla para la iteración. Esta semilla es un número (real o complejo) que representaremos por z_0 . Aplicando la función $z^2 + c$ a z_0 obtenemos un nuevo número:

$$z_1 = z_0^2 + c$$

Ahora, iteraremos usando el resultado del cálculo anterior para el cálculo siguiente:

$$z_2 = z_1^2 + c$$

$$z_3 = z_2^2 + c$$

$$z_4 = z_3^2 + c$$

$$z_5 = z_4^2 + c$$

y así sucesivamente. La lista de números $z_0, z_1, z_2, \dots$ generada por esta iteración se denomina órbita de z_0 bajo la iteración de $z^2 + c$.

3.2. Destino de las Órbitas

Una de las principales preguntas en esta área de las matemáticas es: ¿Cuál es el destino de órbitas típicas? ¿Convergen o divergen? ¿Son cíclicos o se comportan erráticamente? En realidad, el conjunto de Mandelbrot es una versión geométrica de la respuesta a esta pregunta.

Comencemos con unos ejemplos. Supongamos que $c = 1$. Luego, si elegimos la semilla 0, la órbita es:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 1 = 0^2 + 1$$

$$z_2 = 2$$

$$z_3 = 5$$

$$z_4 = 26$$

$$z_5 = \text{número grande}$$

$$z_6 = \text{número más grande}$$

y notamos que esta órbita tiende al infinito.

Ahora supongamos que $c = 0$, la órbita de la semilla 0 es muy diferente: esta órbita permanece constante para todas las iteraciones:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

Si ahora suponemos que $c = -1$. Para la semilla 0, la órbita es:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = -1$$

$$z_2 = 0$$

$$z_3 = -1$$

Aquí vemos que la órbita va de 0 a -1 y viceversa, un ciclo de periodo 2.

Para entender el destino de las órbitas, es más fácil proceder geométricamente. A menudo, se consigue más información del destino de las órbitas con un gráfico que representa los resultados de cada iteración para un cierto c . En los gráficos de abajo mostramos los resultados de las órbitas de 0 para $c = -1,1$; $c = -1,3$; $c = -1,38$; y $c = -1,9$.

Para $c = -1,1$ vemos que la órbita se aproxima a un ciclo de periodo 2.

Para $c = -1,3$ la órbita tiende a un ciclo de periodo 4.

Para $c = -1,38$ vemos un ciclo de periodo 8.

y cuando $c = -1,9$ no hay ningún ciclo aparente para la órbita; los matemáticos usan la palabra caos para este fenómeno. Para verlo de otra manera, mostramos el gráfico de la estadística en la que se considera los primeros 20.000 resultados de la órbita de 0 bajo $z_2 - 1,9$. En este gráfico hemos dividido el intervalo $[-2, 2]$ en 400 subintervalos, y cada vez que el resultado de una iteración pertenecía a un subintervalo, se incrementaba en 1 la estadística.

Antes de proceder, hagamos una observación obvia. Bajo la iteración de $z^2 + c$, la órbita de 0 tiende al infinito o no. Cuando la órbita no va al infinito, ésta se comporta de varias maneras. Puede ser constante, cíclico o caótico, pero la observación fundamental es que existe una dicotomía: a veces la órbita va hacia el infinito, otras veces, no. El conjunto de Mandelbrot es el gráfico que representa esta dicotomía cuando la semilla es 0. Por lo tanto, el conjunto de Mandelbrot es un registro del destino de la órbita de 0 bajo la iteración de $z^2 + c$.

Entonces, ¿cómo es posible que el conjunto de Mandelbrot sea un gráfico plano? La respuesta es, en vez de considerar sólo los valores reales de c , también consideramos los complejos. Por ejemplo, la órbita de 0 bajo $z^2 + i$ esta dada por:

$z_0 = 0$
 $z_1 = i$
 $z_2 = -1 + i$
 $z_3 = -i$
 $z_4 = -1 + i$
 $z_5 = -i$
 $z_6 = -1 + i$

y vemos que esta órbita eventualmente se convierte en un ciclo de periodo 2. Si cambiamos c por $2i$, entonces la órbita se comporta de otra manera:

$z_0 = 0$
 $z_1 = 2i$
 $z_2 = -4 + 2i$
 $z_3 = 12 - 14i$
 $z_4 = 52 - 334i$
 $z_5 = \text{grande (lejos del origen)}$
 $z_6 = \text{más grande}$

y vemos que esta órbita tiende al infinito en el plano complejo (los números de la órbita se alejan cada vez más del origen). Otra vez hacemos la observación fundamental de que la órbita de 0 bajo $z^2 + c$ tiende al infinito o no.

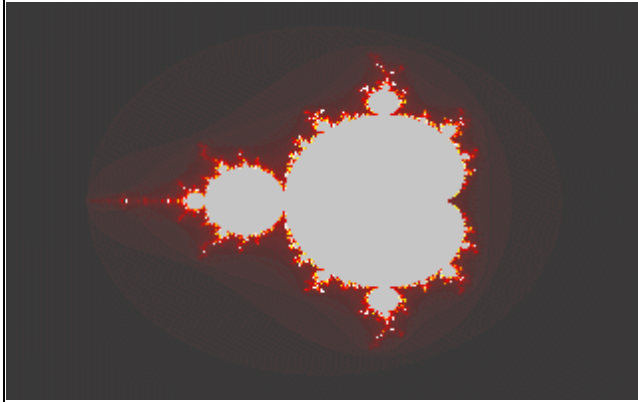
4.1. Definición

El conjunto Mandelbrot introduce algo de geometría en la observación fundamental mencionada anteriormente. La definición precisa es: El conjunto Mandelbrot M , consiste de todos aquellos valores (complejos) de c cuyas órbitas de 0 bajo $z^2 + c$ correspondientes no escapan al infinito. De nuestros cálculos anteriores, vemos que $c = 0, -1, -1.1, -1.3, -1.38$ e i pertenecen al conjunto Mandelbrot, mientras que $c = 1$ y $c = 2i$ no pertenecen.

4.2. ¿Cómo calcular el conjunto Mandelbrot?

Una pregunta natural en este punto es: ¿Por qué alguien se interesaría por el destino de la órbita de 0 bajo $z^2 + c$? ¿Por qué no la órbita de i ? ¿O $2 + 3i$? ¿O cualquier otra semilla compleja? Como veremos más adelante, existe una buena razón para preguntarnos acerca del destino de la órbita de 0; de algún modo la órbita de 0 nos dice mucho sobre el destino de otras órbitas bajo $z^2 + c$.

Antes de enfocar esta idea, vemos que la definición misma del conjunto Mandelbrot nos da un algoritmo para calcularlo. Consideremos simplemente un cuadrado en el plano complejo, centrado en el origen con lados de longitud 4. Coloquemos un conjunto de puntos uniformemente distribuidos dentro de este cuadrado. Cada uno de estos puntos deberá ser considerado como un valor complejo de c . Luego, para cada c , preguntamos a la computadora si su órbita de 0 correspondiente escapa al infinito o no. Si no escapa al infinito, pintamos el punto de gris. Pero, no es posible determinar si ciertos valores de c escapan al infinito, ya que sólo podemos iterar un número finito de veces. Ciertos valores de c cerca del borde de M tienen órbitas que escapan al infinito sólo después de una cantidad grande de iteraciones. A estos puntos se les pinta de acuerdo a cuántas iteraciones se realizaron.



El Conjunto Mandelbrot

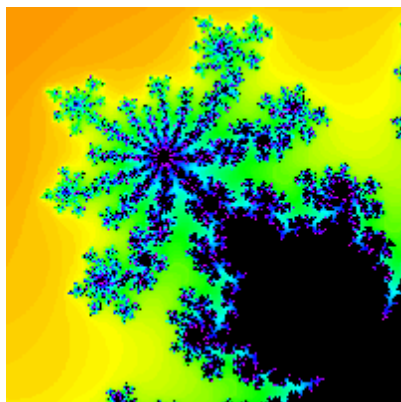
Esta figura es sólo una aproximación del conjunto Mandelbrot.

4.3. Criterio del Escape

Una segunda pregunta es: ¿Cómo sabemos si la órbita de 0 bajo $z^2 + c$ realmente escapa al infinito? Afortunadamente, hay un fácil criterio que ayuda:

El criterio del escape: Supongamos que $|c| \leq 2$. Si la órbita de 0 bajo $z^2 + c$ alguna vez sale del círculo de radio 2 centrado en el origen, entonces esta órbita definitivamente tiende al infinito.

Puede parecer que este criterio no es valioso, puesto que sólo funciona cuando $|c| \leq 2$. Sin embargo, es sabido que todo el conjunto Mandelbrot reside dentro de este disco, por lo tanto estos son los únicos valores de c que necesitamos considerar.



Nótese que el conjunto Mandelbrot consiste de muchas protuberancias pequeñas. Una inspección de cerca de estas protuberancias nos muestra que todas tienen formas diferentes.

Por ejemplo, considérese una protuberancia directamente sujeta al cardioide principal de M , llamamos a ésta, bulbo principal. Esta protuberancia tiene, a su vez, una cantidad infinita de protuberancias más pequeñas

sujetas a él que parecen antenas. En particular, como es claramente visible en la figura, la "antena principal" sujeta a cada protuberancia parece consistir de un número de rayos que varían para cada protuberancia.

5.1. Definición de Periodo

Es sabido que si c pertenece al interior de un bulbo, la órbita de 0 es atraída a un ciclo de periodo n . El número n es el mismo para cualquier c dentro de este bulbo. Por ejemplo, $c = -1$ y $c = -1,1$ ambos pertenecen al interior del bulbo primario más grande, que está justo a la izquierda del cardioide principal. Para estos valores de c , la órbita de 0 es atraída a un ciclo de periodo 2. El número n es considerado como el periodo del bulbo.

Existe una relación peculiar y sorprendente entre el número de rayos de la antena principal sujeta a un bulbo y el periodo de éste: estos números son exactamente iguales.

Mediante cálculos hechos con computadora se obtuvieron los periodos de las órbitas para ciertos c , dichos periodos corresponden a los bulbos que contienen a cada c .

Los fractales han sido y están siendo usados de varias maneras. Tanto artistas como científicos están intrigados por el gran valor de los fractales. Los fractales están siendo aplicados en campos que van desde la compresión de imágenes hasta las finanzas. Recién estamos comenzando a darnos cuenta de la importancia y de la utilidad de la geometría fractal.

□

Una de las más estrechas relaciones con la realidad es la similitud entre fractales y objetos de la naturaleza. La semejanza entre los fractales y ciertos objetos de la naturaleza es tan grande que no podemos dejar de tenerla en cuenta. Fórmulas matemáticas son usadas para modelar formas naturales semejantes a sí mismas.

8.1. Compresión de Imágenes Los fractales han sido y están siendo usados de varias maneras. Tanto artistas como científicos están intrigados por el gran valor de los fractales. Los fractales están siendo aplicados en campos que van desde la compresión de imágenes hasta las finanzas. Recién estamos comenzando a darnos cuenta de la importancia y de la utilidad de la geometría fractal.

□

Una de las más estrechas relaciones con la realidad es la similitud entre fractales y objetos de la naturaleza. La semejanza entre los fractales y ciertos objetos de la naturaleza es tan grande que no podemos dejar de tenerla en cuenta. Fórmulas matemáticas son usadas para modelar formas naturales semejantes a sí mismas.

8.1. Compresión de Imágenes

Una de las aplicaciones más útiles de los fractales y de la geometría fractal está en la compresión de imágenes. Es también una de las ideas más controversiales. El concepto básico detrás de la compresión fractal de imágenes es tomar una imagen y expresarla como un Sistema de Funciones Iteradas (SFI). Un SFI es el conjunto de funciones que describen partes de un fractal que, una vez juntas, recrean dicho fractal en su totalidad. Si un fractal puede ser descrito por un número pequeño de funciones, el SFI es una descripción bastante compacta del fractal. La imagen puede ser rápidamente desplegada y a cualquier grado de magnificación con infinitos niveles de detalle fractal. El mayor problema detrás de esta idea es encontrar el SFI que describa la imagen.

8.2. Efectos Visuales

Una de las más triviales aplicaciones de los fractales son sus efectos visuales. No solamente engañan la vista, sino que también de algún modo confunden a la mente. Los fractales han estado siendo usados comercialmente en la industria cinematográfica, en películas como Star Wars y Star Trek. Las imágenes

fractales son usadas como una alternativa ante costosos sets elaborados para producir paisajes fabulosos.

8.3. Música Fractal

Otra aplicación de los fractales aparentemente irrelevante es la música fractal. Ciertas músicas, incluyendo las de Bach y las de Mozart, pueden ser reducidas y todavía retener la esencia del compositor. Están siendo desarrolladas muchas nuevas aplicaciones software para el desarrollo de música fractal.

Una de las aplicaciones más útiles de los fractales y de la geometría fractal está en la compresión de imágenes. Es también una de las ideas más controversiales. El concepto básico detrás de la compresión fractal de imágenes es tomar una imagen y expresarla como un Sistema de Funciones Iteradas (SFI). Un SFI es el conjunto de funciones que describen partes de un fractal que, una vez juntas, recrean dicho fractal en su totalidad. Si un fractal puede ser descrito por un número pequeño de funciones, el SFI es una descripción bastante compacta del fractal. La imagen puede ser rápidamente desplegada y a cualquier grado de magnificación con infinitos niveles de detalle fractal. El mayor problema detrás de esta idea es encontrar el SFI que describa la imagen.

8.2. Efectos Visuales

Una de las más triviales aplicaciones de los fractales son sus efectos visuales. No solamente engañan la vista, sino que también de algún modo confunden a la mente. Los fractales han estado siendo usados comercialmente en la industria cinematográfica, en películas como Star Wars y Star Trek. Las imágenes fractales son usadas como una alternativa ante costosos sets elaborados para producir paisajes fabulosos.

8.3. Música Fractal

Otra aplicación de los fractales aparentemente irrelevante es la música fractal. Ciertas músicas, incluyendo las de Bach y las de Mozart, pueden ser reducidas y todavía retener la esencia del compositor. Están siendo desarrolladas muchas nuevas aplicaciones software para el desarrollo de música fractal.

Después de todo lo expuesto anteriormente, podemos concluir que, aunque la geometría fractal aún no se haya entendido completamente, posee aplicaciones realmente útiles en distintos campos, y es en sí sumamente fascinante.

Muchos investigadores continúan su exploración a través de esta área, como Douady, Hubbard, Yoccoz, McMullen y otros, pero mucho más queda por ser descubierto.