

EJERCICIOS DE CÁLCULO Y GEOMETRIA ANALITICA

- **FUNCIONES**

- Dada $F(wt) = 2 \sin(wt)$

Hallar:

- Tabla de datos
- Gráfica
- Nombre de la gráfica
- Dominio
- Rango
- Punto de corte con el eje X
- Punto de corte con el eje Y
- $F(p) = 4p + 5$

Hallar:

- Tabla de datos
- Gráfica
- Nombre de la gráfica
- Pendiente
- Dominio
- Rango
- Punto de corte con el eje X
- Punto de corte con el eje y
- $F(t) = 8t^2 - 4t$

Hallar:

- Tabla de datos
- Gráfica
- Nombre de la gráfica
- Dominio
- Rango
- Punto de corte con el eje X
- Punto de corte con el eje y
- **LIMITE**

1. $\lim_{X \rightarrow 20} (X^3 + 5X^2 - 4X - 20)$

$X^3 - 5X^2 - 25$

2. $\lim_{X \rightarrow 8} (X^2 + 2X - 8)$

$X^3 - 4X^2 + 5X - 24$

3. $\lim_{X \rightarrow 3} (X^3 - 2X^2 - 3)$

$X^3 - X^2 - 7X$

- **DERIVADA**
- $Y = \sin^4(X^2 - 4X)$
- $Y = (3X^4 - 4X)^5$
- $Y = (X^3 - 2X)(X^2 + 7X)^2$
- **MATRICES**

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar:

- $4A + 2B$
- $A * B$
- $3B - 8A$

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS

- **FUNCIONES**
- Dada $F(wt) = 2 \sin(wt)$

Hallar:

- Nombre de la función: Función seno
- Tabla de datos

$F(wt) = 2 \sin(wt)$	wt	$Y = F(wt)$
	-180	0
	-150	-1
	-120	-1,73
	-90	-2
	-60	-1,73
	-30	-1
	0	0
	30	1
	60	1,73
	90	2
	120	1,73
	150	1
	180	0
	210	-1
	240	-1,73
	270	-2
	300	-1,73

	330	-1
	360	0
	390	1

- Gráfica

- Nombre de la gráfica: Sinusoide
- Dominio: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- Rango: $[-2, +2]$
- Punto de corte con el eje $X = \{\dots -360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \dots\}$

Es una progresión aritmética de razón 180° , no es un intervalo.

Por lo tanto, los puntos de corte con X van de 180 en 180 en el sub-eje

X y de -180 en -180 en el sub-eje $-X$

- Punto de corte con el eje $Y = 0$
- **$F(p) = 4p + 5$**

Hallar:

- Nombre de la función: Función lineal
- Tabla de datos

CÁLCULO DE $F(p) = 4p + 5$	p	F(p)
$F(-3) = 4(-3) + 5 = -12 + 5 = -7$	-3	-7
$F(-2) = 4(-2) + 5 = -8 + 5 = -3$	-2	-3
$F(-1) = 4(-1) + 5 = -4 + 5 = 1$	-1	1
$F(0) = 4 * 0 + 5 = 0 + 5 = 5$	0	5
$F(1) = 4 * 1 + 5 = 4 + 5 = 9$	1	9
$F(2) = 4 * 2 + 5 = 8 + 5 = 13$	2	13
$F(3) = 4 * 3 + 5 = 12 + 5 = 17$	3	17

- Nombre de la gráfica: Una línea recta
- Pendiente

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$m = \frac{9 - 5}{1 - 0} = \frac{4}{1} = 4$$

- Dominio: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- Rango: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- Punto de corte con el eje X :

$Y = mx + b$. En esta fórmula $m=4$ es el valor de la pendiente

En el punto de corte con el eje X , Y vale 0,

$$\text{Luego, } 0 = mx + b$$

$$X = -b/m, \text{ cuando } Y=0$$

$$X = -5/4 = -1,25$$

Luego el punto de corte con el eje X es -1,25

- Punto de corte con el eje Y

En el punto de corte con el eje Y, $X=0$

Luego, sustituimos en $Y = mx+b = Y = m \cdot 0 + b$

$Y = 4 \cdot 0 + 5 = 5$, además, en la grafica se aprecia claramente este

punto de corte

- **$F(t) = 8t^2 - 4t$**

Hallar:

- Tabla de datos

$Y = F(t) = 8t^2 - 4t$	t	F(t)
$F(-2) = 8(-2)^2 - 4(-2) = 32 + 8 = 40$	-2	40
$F(-1,5) = 8(-1,5)^2 - 4(-1,5) = 8 \cdot 2,25 + 4 \cdot 1,5 = 18 + 6 = 24$	-1,5	24
$F(-1) = 8(-1)^2 - 4(-1) = 8 + 4 = 12$	-1	12
$F(-0,5) = 8(-0,5)^2 - 4(-0,5) = 8 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,5 = 2 + 2 = 4$	-0,5	4
$F(0) = 8(0)^2 - 4(0) = 8 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$	0	0
$F(0,25) = 8(0,25)^2 - 4(0,25) = 8 \cdot 0,0625 - 4 \cdot 0,25 = 0,5 - 1 = -0,5$	0,25	-0,5
$F(0,5) = 8(0,5)^2 - 4(0,5) = 8 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,5 = 2 - 2 = 0$	0,5	0
$F(1) = 8(1)^2 - 4(1) = 8 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 8 - 4 = 4$	1	4
$F(1,5) = 8(1,5)^2 - 4(1,5) = 8 \cdot 2,25 - 4 \cdot 1,5 = 18 - 6 = 12$	1,5	12
$F(2) = 8(2)^2 - 4(2) = 32 - 8 = 24$	2	24
$F(2,5) = 8(2,5)^2 - 4(2,5) = 50 - 10 = 40$	2,5	40

- Puntos de corte con los ejes

Punto de corte con el eje X = (0,0); (0,5;0)

Punto de corte con el eje Y = (0,0)

$$a = 8$$

$$b = -4$$

$$c = 0$$

- Nombre de la gráfica: Parábola
- Dominio: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- Rango: $[-1/2, +\infty)$
- **LÍMITE**

$$1. \lim X^3 + 5X^2 - 4X - 20$$

$$X \rightarrow -5 \quad X^2 - 25$$

Sustituimos X por el valor al que tiende:

$$\lim X^3 + 5X^2 - 4X - 20 = \lim (-5)^3 + 5(-5)^2 - 4(-5) - 20$$

$$X \rightarrow -5 \quad X^2 - 25 \quad X \rightarrow -5 \quad (-5)^2 - 25$$

$$\lim -125 - 125 + 20 - 20 = 0/0$$

$$X \rightarrow -5 \quad 25 - 25$$

Como se presenta la indeterminación $0/0$, factorizamos el numerador por Ruffini y factorizamos el denominador por diferencia de cuadrados, ya que

$$X^2 - 25 = X^2 - 5^2 = (X+5)(X-5), \text{ por diferencia de cuadrados}$$

Aplicación de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 5 & -4 & -20 & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 14 & 20 & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 7 & 10 & 0 & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & -2 & -10 & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 5 & 0 & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -5 & -5 & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Luego,

$$\lim X^3 + 5X^2 - 4X - 20 = \lim (X-2)(X+2)(X+5) =$$

$$X \rightarrow -5 \quad X^2 - 25 \quad X \rightarrow -5 \quad (X+5)(X-5)$$

$$\lim (X-2)(X+2) = (-5-2)(-5+2) = (-7)(-3) = -21$$

$$X \rightarrow -5 \quad (X-5)(-5-5) = -10 \cdot 10$$

$$2. \lim X^2 + 2X - 8$$

$$X \rightarrow -4 \quad X^3 + 5X^2 - 2X - 24$$

Como se presenta una indeterminación del tipo $0/0$, factorizamos en ambos miembros de la fracción.

$X^2 + 2X - 8$. Dos números que sumados den 2 y que multiplicados resulten -8, esos números son: 4 y -2.

Luego, el polinomio queda así:

$$X^2 + 2X - 8 = (X+4)(X-2)$$

En el denominador aplicamos Ruffini debido a que el polinomio es de grado 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 5 & -2 & -24 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 14 & 24 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 7 & 12 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & -3 & -12 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 0 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & -4 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & & & \end{array}$$

Luego, el Limite queda de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^2 + 2X - 8}{X^3 - 4X^2 + 5X - 24} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(X+4)(X-2)}{(X-2)(X+3)(X+4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X-2}{(X+3)(X+4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{1} = 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X-2}{(X+3)(X+4)} = \frac{-4-2}{(-4+3)(-4+4)} = \frac{-6}{(-1)(0)} = -1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3 - 2X^2 - 3}{X^2 - 7X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3 - 2X^2 - 3}{X^2 - 7X}$$

Al sustituir X por -4 , resulta la indeterminación $\frac{0}{0}$. Para eliminar la indeterminación, dividimos la expresión por la variable con su mayor exponente.

Luego, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3 - 2X^2 - 3}{X^2 - 7X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3 - 2X^2 - 3}{X^2 - 7X} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{X^3}{X^2 - 7X}$$

$$X^3 - X^2 - 7$$

$$X^3 - X^2$$

$$= 1 - 0 - 0 = 1/0 = \hat{a}$$

$$\bullet - 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{X \rightarrow 0} X^3 - 2X^2 - 3 = \hat{a}$$

$$X \hat{a} \quad X^2 - 7X$$

• DERIVADA

$$\bullet Y = \sin^4 (X^2 - 4X)$$

Para resolver esta derivada aplicamos la fórmula:

$$Y = u^n \quad Y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$U = \sin (X^2 - 4X)$$

$$n = 4$$

$$Y' = 4 \sin^3 (X^2 - 4X) \cdot [\sin (X^2 - 4X)]'$$

$$Y' = 4 \sin^3 (X^2 - 4X) \cdot \cos (X^2 - 4X) \cdot (X^2 - 4X)'$$

$$Y' = 4 \sin^3 (X^2 - 4X) \cdot \cos (X^2 - 4X) \cdot (2X - 4)$$

$$\bullet Y = (3X^4 - 4X)^5$$

Aplicamos la formula:

$$\text{La función } Y = U^n \text{ es de la forma } Y = U^n \quad Y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

En este caso, $u = (3X^4 - 4X)$ y $n = 5$; luego,

$$Y' = 5 (3X^4 - 4X)^4 \cdot (3X^4 - 4X)'$$

$$(3X^4 - 4X)' = (3X^4)' - (4X)'$$

$$(3X^4)' = 4 \cdot 3X^{4-1} = 12X^3$$

$$(4X)' = 4, \text{ por aquello de que } Y = kx \quad Y' = k$$

$$Y' = 5 (3X^4 - 4X)^4 \cdot (12X^3 - 4)$$

$$\bullet Y = (X^3 - 2X) (X^2 + 7X)^2$$

Esta función es de la forma

$$Y = u * v \quad Y' = u * v' + v * u'$$

$$Y' = (X3 - 2X) * (X2 + 7X)' + (X2 + 7X) * (X3 - 2X)'$$

$$Y' = (X3 - 2X) * (2X + 7) + (X2 + 7X) * (3X2 - 2)$$

• MATRICES

Dadas las matrices:

$$3 \quad -4 \quad 6 \quad 4 \quad 7 \quad 8$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$0 \quad -2 \quad 3 \quad 4 \quad -2 \quad 4$$

Hallar:

• $4A + 2B$

$$(4) \quad (3) \quad (4) \quad (-4) \quad (4) \quad (6) \quad 12 \quad -16 \quad 24$$

$$4A = (4) \quad (-2) \quad (4) \quad (-7) \quad (4) \quad (5) = -8 \quad -28 \quad 20$$

$$(4) \quad (0) \quad (4) \quad (-2) \quad (4) \quad (3) \quad 0 \quad -8 \quad 12$$

$$(2) \quad (4) \quad (2) \quad (7) \quad (2) \quad (8) \quad 8 \quad 14 \quad 16$$

$$2B = (2) \quad (2) \quad (2) \quad (0) \quad (2) \quad (-1) = 4 \quad 0 \quad -2$$

$$(2) \quad (4) \quad (2) \quad (-2) \quad (2) \quad (4) \quad 8 \quad -4 \quad 8$$

$$(12+8) \quad (-16+14) \quad (24+16)$$

$$4A + 2B = (-8+4) \quad (-28+0) \quad (20-2)$$

$$(0+8) \quad (-8-4) \quad (12+8)$$

$$20 \quad -2 \quad 40$$

$$4A + 2B = -4 \quad -28 \quad 18$$

$$8 \quad -12 \quad 20$$

• $A * B$

Aquí se procede a realizar una nueva matriz que tendrá; por filas, el resultado de la multiplicación de cada fila de A con cada columna de B.

Primera fila de A con primera columna de B

Primera fila de A con segunda columna de B

Primer fila de A con segunda columna de B

Segunda fila de A con primera columna de B

Segunda fila de A con segunda columna de B

Segunda fila de A con tercera columna de B

Tercera fila de A con primera columna de B

Tercera fila de A con segunda columna de B

Tercera fila de A con tercera columna de B

$$(3*4) + (-4*2) + (6*4) \quad (3*7) + (-4*0) + (6*-2) \quad (3*8) + (-4*-1) + (6*4)$$

$$(-2*4) + (-7*2) + (5*4) \quad (-2*7) + (-7*0) + (5*-2) \quad (-2*8) + (-7*-1) + (5*4) =$$

$$A*B =$$

$$(0*4) + (-2*2) + (3*4) \quad (0*7) + (-2*0) + (3*-2) \quad (0*8) + (-2*-1) + (3*4)$$

$$12-8+24 \quad 21+0-12 \quad 24+4+24$$

$$-8-14+20 \quad -14+0-10 \quad -16+7+20$$

$$=$$

$$0-4+12 \quad 0+0-6 \quad 0+2+12$$

$$28 \quad 9 \quad 52$$

$$= -2 \quad -24 \quad 11$$

$$8 \quad -6 \quad 14$$

$$\bullet \mathbf{3B - 8A}$$

$$(8*3) \quad (8* - 4) \quad (8*6)$$

$$24 \quad -32 \quad 48$$

$$8A = (8* -2) \quad (8* -7) \quad (8*5) = -16 \quad -56 \quad 40$$

$$(8*0) \quad (8* -2) \quad (8*3) \quad 0 \quad -16 \quad 24$$

$$(3*4) \quad (3*7) \quad 3* 8)$$

$$12 \quad 21 \quad 24$$

$$3B = (3*2) \quad (3*0) \quad (3* -1) =$$

$$60 - 3$$

$$(3 \cdot 4) (3 \cdot -2) (3 \cdot 4) 12 - 6 12$$

$$(12 - 24) (21 - 32) (24 - 48)$$

$$-12 53 - 24$$

$$3B - 8A = [6 - (-16)] [0 - (-56)] (-3 - 40) =$$

$$22 56 - 43$$

$$12 10 - 12$$

$$(12 - 0) [-6 - (-16)] (12 - 24)$$

$$4$$

$$\text{seno } 30^\circ = 0.5, \text{ luego } F(30^\circ) = 2 \text{ sen } -30^\circ = 2 * (-0.5) = -1$$

$$\text{seno } 0^\circ = 0, \text{ luego } F(0^\circ) = 2 \text{ sen } 0^\circ = 2 * 0 = 0$$

$$\text{seno } -30^\circ = -0.5, \text{ luego } F(-30^\circ) = 2 \text{ sen } -30^\circ = 2 * (-0.5) = -1$$

$$\text{seno } -60^\circ = -0.866, \text{ luego } F(-60^\circ) = 2 \text{ sen } -60^\circ = 2 * (-0.866) = -1.73$$

$$\text{seno } -90^\circ = -1, \text{ luego } F(-90^\circ) = 2 \text{ sen } -90^\circ = 2 * (-1) = -2$$

$$\text{seno } -120^\circ = -0.866, \text{ luego } F(-120^\circ) = 2 \text{ sen } -120^\circ = 2 * (-0.866) = -1.73$$

$$\text{seno } -150^\circ = -0.5, \text{ luego } F(-150^\circ) = 2 \text{ sen } -150^\circ = 2 * (-0.5) = -1$$

$$\text{seno } -180^\circ = 0, \text{ luego } F(-180^\circ) = 2 \text{ sen } -180^\circ = 2 * 0 = 0$$

$$\text{seno } 60^\circ = 0.866, \text{ luego } F(60^\circ) = 2 \text{ sen } 60^\circ = 2 * (0.866) = 1.73$$

$$\text{seno } 90^\circ = 1, \text{ luego } F(90^\circ) = 2 \text{ sen } 90^\circ = 2 * 1 = 2$$

$$\text{seno } 120^\circ = 0.866, \text{ luego } F(120^\circ) = 2 \text{ sen } 120^\circ = 2 * 0.866 = 1.73$$

$$\text{seno } 150^\circ = 0.5, \text{ luego } F(150^\circ) = 2 \text{ sen } 150^\circ = 2 * 0.5 = 1$$

$$\text{seno } 180^\circ = 0, \text{ luego } F(180^\circ) = 2 \text{ sen } 180^\circ = 2 * 0 = 0$$

$$\text{seno } 210^\circ = -0.5, \text{ luego } F(210^\circ) = 2 \text{ sen } 210^\circ = 2 * (-0.5) = -1$$

$$\text{seno } 240^\circ = -0.866, \text{ luego } F(240^\circ) = 2 \text{ sen } 240^\circ = 2 * (-0.866) = -1.73$$

$$\text{seno } 270^\circ = -1, \text{ luego } F(270^\circ) = 2 \text{ sen } 270^\circ = 2 * (-1) = -2$$

$$\text{seno } 300^\circ = -0.866, \text{ luego } F(300^\circ) = 2 \text{ sen } 300^\circ = 2 * (-0.866) = -1.73$$

$\text{seno } 330^\circ = -0.5$, luego $F(330^\circ) = 2 \text{ sen } 330^\circ = 2 * (-0.5) = -1$

$\text{seno } 360^\circ = 0$, luego $F(360^\circ) = 2 \text{ sen } 360^\circ = 2 * 0 = 0$

$\text{seno } 390^\circ = 0.5$, luego $F(390^\circ) = 2 \text{ sen } 360^\circ = 2 * 0.5 = 1$

-F(wt)

F(wt)

60

150

240

210

330

300

-150

-120

120

.

.

30

360 $\tilde{A}^3 0$

90

270

180

.

.

.

.

.

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

- 1,73

1,73

2

•

-2

-1

1

•

240

360

330

300

270

210

-180

-t

-90

-0,5

.

.

.

.

.

.

.

.

-1

3

2

1

17

13

9

5

1,5

1

-3

-3

-2

-1

0

F(p)

-1,5

.

.

2,5

4

.

0,5

.

.

1

2

-0,5

F (t)

-F (t)

- t

t

(X-2) porque cambia de signo

(X+2) porque cambia de signo

(X+5) porque cambia de signo

(X+4) porque cambia de signo

(X+3) porque cambia de signo

(X-2) porque cambia de signo

1

1

2

0

0

0

0

0

• Gráfica

-60

-30

-210

180

150

120

90

60

30

0

t

.

-7

+

-

- b

$b^2 - 4ac$

$2 \cdot 8$

$F(t) = Y =$

$t =$

16

$$(-4)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 0$$

$$4$$

$$+$$

$$-$$

$$42$$

$$+$$

$$-$$

$$16$$

$$t =$$

$$t_1 =$$

$$(4 + 4)/16 = 1/2$$

$$t_2 =$$

$$(4 - 4)/16 = 0/16 = 0$$

$$-F(p)$$

$$-p$$

$$p$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$0,25$$

$$24$$

Tiene dos raíces reales y diferentes, por lo tanto los puntos de corte con el eje X son $\hat{A}/2$ y 0

$$40$$

$$12$$

-2

-1

1

Hallar el vértice de la parábola:

$$Y = 8t^2 - 4t + 0$$

Donde: $a = 8$; $b = -4$ y $c = 0$.

El vértice se calcula con la fórmula: $(-b/2a, 4ac-b^2/4a)$

Sustituimos: $\{ [-(-4)/2 \cdot 8] , [4 \cdot 8 \cdot 0 - (-4)^2 / 4 \cdot 8] \}$

$$(4/16, -16/32) = (1/4, -1/2).$$

Luego, el vértice de la parábola se halla en el punto cuyas

Coordenadas son $(1/4, -1/2)$