

Intersecciones con los ejes

Los puntos útiles de una función son aquellos cuya coordenada x o y se anula.

- Intersecciones con los ejes ya que corta el eje x o y . Un punto $(a, 0)$ es una x -intersecciones de la gráfica de una ecuación si es un punto de la solución de la ecuación. Para lo mismo será y -intersecciones $(0, b)$ cuando la gráfica de la ecuación sea una solución de la misma.

Para determinar el número de x -intersecciones:

- Igualamos la y a cero. $y=0$.
- Resolvemos la ecuación para x (mediante la fórmula general de binomios, Ruffini)

Para determinar el número de y -intersecciones:

- Igualamos la x a cero. $x=0$.
- Resolvemos la ecuación para la y .

Ejemplo

Encontrar el número de intersecciones con los ejes de la gráfica $y=x^3-4x$.

(Determinación de x -intersecciones).

- Igualar y a 0 y se aísla x .

$$x^3-4x=0$$

- Resolución de la ecuación (factorizar)

$$x(x-2)(x+2)=0$$

- De esta manera se conoce que:

$$X_1 = 0 \quad f(0) = 0 \quad (0, 0)$$

$$X_2 = 2 \quad f(2) = 0 \quad (2, 0)$$

$$X_3 = -2 \quad f(-2) = 0 \quad (-2, 0)$$

(determinación de y -intersecciones)

- Igualar x a 0.

$$X=0 \quad f(0) = 0$$

Por lo tanto, dicha ecuación no corta explícitamente el eje de las y .

Aproximar los ceros de una función

Método de Newton

- Sirve para aproximar ceros de una función.
- Utiliza las rectas tangentes para aproximar la gráfica de la función cerca de sus x-intersecciones.

Para ver como funciona:

PROBLEMA 1

Datos

Función $f(x)$ continua para $[a, b]$

Derivable para (a, b)

Si $f(a)$ y $f(b)$ son signos opuestos CORROBORA que al menos existe un cero de la función $f(x)$ para el intervalo (a, b) .

Como primera estimación sabemos que $x = x_1$.

Se basa en que la **gráfica $f(x)$** y la **recta tangente en $(x_1, f(x_1))$** cruzan el eje x por el mismo punto. Al ser relativamente fácil calcular la x -intersección de la recta tangente, podemos usarla como segunda estimación (mejor que la 1ª) para el cero de $f(x)$. La recta tangente pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$ con pendiente $= f'(x_1)$. En forma punto-pendiente, la ecuación de esa recta tangente es, por tanto:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

Desarrollando $y = 0$, y despejando x , obtenemos

Así pues, de la primera estimación x_1 hemos pasado a una nueva estimación:

Podemos mejorar x_2 calculando la tercera estimación:

La aplicación reiterada de este proceso nos llevará a un resultado mucho más fiable y menos inequívoco.

RESUMEN DEL PROCESO

Ejercicio de comprensión (pág.226 ej.1)

1. para $x_1 = 1,7$

PRIMER PASO

(gráfica $f(x)$) (gráfica $f(x)$ ampliada)

SEGUNDO PASO

				$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	1,7000	-0,1100	3,4000	-0,0323	1,7323

2	1,7324	0,0012	3,4648	0,0003	1,7321
---	--------	--------	--------	--------	--------

*seguir hasta que sea el valor más próximo a 0.

**= número de iteraciones.

TERCER PASO (último)

Representa de forma clara si el último valor adquirido está dentro de nuestro intervalo cogido como óptimo.

Ejemplo 2

Usar el método de Newton para aproximar ceros de la siguiente función:

Iterar hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0,0001.

Gráfica

Tabla de valores

				$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	-1,20000	0,18400	5,24000	0,03511	-1,23511
2	-1,23511	-0,00771	5,68276	-0,00136	-1,23375
3	-1,23375	0,00001	5,66533	0,00000	