

FÓRMULAS DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

INTRODUCCIÓN

Tras la elaboración de la triangulación y el cálculo de las coordenadas geodésicas de los puntos es posible que los datos iniciales (longitud y azimut del lado inicial, las coordenadas del punto inicial) tomados durante el proceso estén sujetos a pequeñas variaciones.

Esto conlleva la necesidad de corregir las latitudes, longitudes y azimutes calculados para la triangulación.

Una opción sería resolver de nuevo los triángulos y calcular las latitudes, longitudes y azimutes en base a los nuevos datos iniciales, sin embargo es más sencilla la opción alternativa, consistente en la corrección de las coordenadas de los puntos calculando las correcciones a éstos.

Las fórmulas que expresan las correcciones de las coordenadas geodésicas de los puntos y los azimutes de las direcciones para cambiar los datos iniciales de la triangulación, se llaman **fórmulas diferenciales de primer género**.

Existe un segundo grupo de fórmulas encargadas de referir las coordenadas geodésicas calculadas bajo un elipsoide escogido a un nuevo elipsoide con parámetros distintos. A las fórmulas que expresan las correcciones a las coordenadas geodésicas por el cambio de parámetros del elipsoide, se les denomina fórmulas diferenciales de segundo orden. En éste caso las dejaremos fuera de nuestro ámbito de estudio y nos centraremos en la deducción de las fórmulas diferenciales de primer orden.

0. -DATOS DE PARTIDA

PUNTO 1 A (B1, L1)

PUNTO 2 B(B2, L2)

A12 : Azimut de A hacia B

A21: Azimut de B hacia B

Dónde

B es la latitud geodésica

L es la longitud geodésica.

El esquema de trabajo a seguir será el siguiente:

1- Deducción de los valores dB_2^{B1}

, dL_2^{B1}

, $dA_{2,1}^{B1}$

.

2- Deducción de las magnitudes dB_2^s

$$, dL_2^s$$

$$, dA_{2,1}^s$$

.

3- Deducción de las magnitudes buscadas $dB_2^{A1,2}$

$$, dL_2^{A1,2}$$

$$, dA_{2,1}^{A1,2}$$

.

Comenzamos el proceso de cálculo:

Si B1 varía dB1, y también varían dA12 y ds. , para hallar las expresiones del punto B necesitamos dB2, dL2 y dA21, que vienen en función de dB1, dA12 y ds;

Por lo tanto nos encontramos con la siguientes expresiones:

$$dB_2 = \frac{B_2}{B_1} dB_1 + \frac{B_2}{s} ds + \frac{B_2}{A_{12}} dA_{12}$$

$$dL_2 = \frac{L_2}{B_1} dB_1 + \frac{L_2}{s} ds + \frac{L_2}{A_{12}} dA_{12} + dL_1$$

$$dB_2 = \frac{A_{21}}{B_1} dB_1 + \frac{A_{21}}{s} ds + \frac{A_{21}}{A_{12}} dA_{12}$$

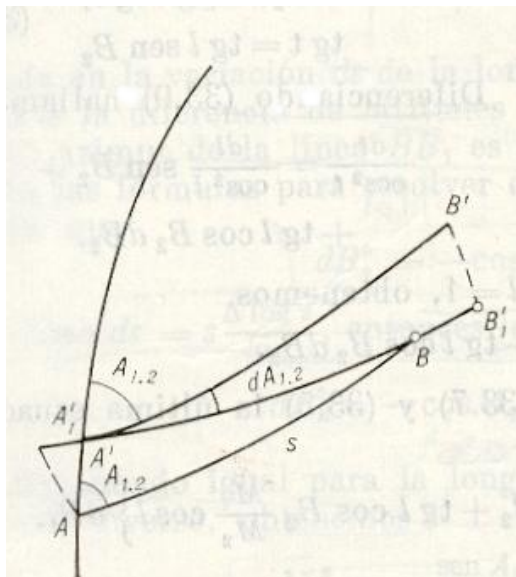
$$dB_2 = dB_2^{B_1} + dB_2^s + dB_2^{A_{12}}$$

$$dL_2 = dL_1 + dL_2^{B_1} + dL_2^s + dL_2^{A_{12}}$$

$$dA_{21} = dA_{21}^{B_1} + dA_{21}^s + dA_{21}^{A_{12}}$$

1. -CÁLCULO DE LOS VALORES DE dB2B, dL2B y dA21B

Si el punto A' se encuentra sobre el meridiano de A y posee una latitud B1+dB1. La longitud de la línea AB=s, desplazamos B a la posición B1', entonces, se podrá afirmar que A'B1'=s.



Luego:

$$dB_2^{B_1} = \frac{B_2}{B_1} dB_1$$

Obtenemos:

$$BB_1 = AA_1 = M_1 dB_1 \cos A_{12}$$

$$AA_1 = M_1 dB_1 \sin A_{12}$$

que no es mas que la diferencia de

latitudes de los puntos B1' y B:

$$\frac{-M_1 dB_1 \cos A_{12} \cos A_{21}}{M_2}$$

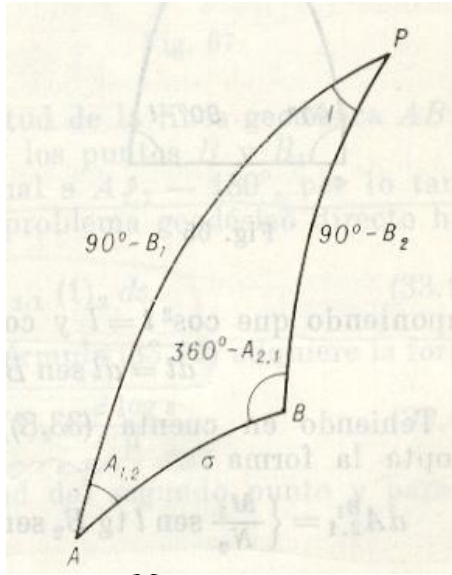
y la diferencia de latitudes de los puntos B' y B1' :

$$\frac{-M_1 dB_1 \sin A_{12} \sin A_{21}}{M_2}$$

Como $AA_1 = BB_1$

entonces podemos afirmar que:

$$dB_2^{B_1} = \frac{-M_1 dB_1 \cos A_{12} \cos A_{21}}{M_2} - \frac{-M_1 dB_1 \sin A_{12} \sin A_{21}}{M_2}$$



$$dB_2^{B_1} = -\frac{M_1}{M_2} dB_1 (\cos A_{12} \cos A_{21} + \sin A_{12} \sin A_{21})$$

Considerando el triángulo ABP, como esférico:

$$\cos l = -\cos A_{12} \cos A_{21} - \sin A_{12} \sin A_{21} \cos \sigma$$

Suponiendo que $\cos \sigma = 1$
, obtenemos:

$$dB_2^{B_1} = \frac{M_1}{M_2} \cos l dB_1$$

Para la deducción de $dL_2^{B_1}$
, observamos que:

$$L_2 = L_1 + l; dL_2 = dL_1 + dl; dl = dl^{B_1} + dl^s + dl^{A_{12}}$$

De la misma forma se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$dL_2^{B_1} = \frac{-M_1 dB_1 \cos A_{12} \sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} + \frac{M_1 dB_1 \sin A_{12} \cos A_{21}}{N_2 \cos B_2}$$

$$dB_2^{B_1} = -\frac{M_1}{N_2 \cos B_2} dB_1 (\cos A_{12} \sin A_{21} + \sin A_{12} \cos A_{21})$$

De la figura de arriba se deduce que:

$$\sin B_2 \sin l = -\sin A_{21} \cos A_{12} + \cos A_{21} \sin A_{12} \cos \sigma$$

$$-\sin B_2 \sin l = \sin A_{21} \cos A_{12} - \cos A_{21} \sin A_{12} \cos \sigma$$

Si suponemos que $\cos \sigma = 1$
, entonces:

$$dL_2^{B_1} = \frac{M_1}{N_2} \sin l \operatorname{tg} B_2 dB_1$$

Para deducir $dA_{21}^{B_1}$
:

$$A_{21} = A_{12} - 180^\circ + t$$

$$dA_{12} = dt$$

Del triángulo cPb :

$$\sin B_2 = \cot l \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} l \sin B_2$$

Si diferenciamos la expresión obtenemos la siguiente ecuación: $\operatorname{tg} t = \operatorname{tg} l \sin B_2$
:

$$\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dl}{\cos^2 l} \sin B_2 + \operatorname{tg} l \cos B_2 dB_2$$

suponiendo que $\cos^2 t = l$ y $\cos^2 l = 1$
, obtenemos:

$$dt = dl \sin B_2 + \operatorname{tg} l \cos B_2 dB_2$$

De forma análoga :

$$dA_{21}^{B_1} = \frac{M_1}{N_2} \sin l \operatorname{tg} B_2 \sin B_2 + \operatorname{tg} l \cos B_2 \frac{M_1}{M_2} \cos l dB_1$$

Si tenemos en consideración que $M_1 \quad M_2$
, podemos obtener las siguientes expresiones:

$$\frac{M_1}{M_2} = 1 - e^2 \cos^2 B_2$$

$$dA_{21}^{B_1} = \frac{\sin l}{\cos B_2} \left[(1 - e^2 \cos^2 B_2) \sin^2 B_2 + \cos^2 B_2 \right] dB_1$$

2. -CÁLCULO DE LAS MAGNITUDES dB_2^s , dL_2^s Y dA_{21}^s

Suponemos que $AB = s$ y que varía en la magnitud $BB_1 = ds$. Según podemos observar en las figuras siguientes:

El azimut de la línea BB_1 es igual a $A_{21} - 180$

, por lo tanto, según las fórmulas para resolver el problema geodésico directo hallamos que:

$$dB_2^s = -\cos A_{21} (1)_2 ds$$

Como $ds = s \frac{\Delta \log s}{\mu}$, obtenemos :

$$dB_2^s = -\cos A_{21} (1)_2 s \frac{\Delta \log s}{\mu}$$

De forma análoga se obtienen la longitud del segundo punto y el azimut inverso, como se puede observar a continuación:

$$dL_2^s = -\frac{\sin A_{21}}{\cos B_2} (2)_2 ds$$

$$dL_2^s = -\frac{\sin A_{21}}{\cos B_2} (2)_2 s \frac{d \log s}{\mu}$$

$$dA_{21}^s = -\sin A_{21} \operatorname{tg} B_2 (2)_2 ds$$

$$dA_{21}^s = -\sin A_{21} \operatorname{tg} B_2 (2)_2 s \frac{d \log s}{\mu}$$

3. - CÁLCULO DE dB_{2A12} , dL_{2A12} , dA_{2A12}

Si:

$$BB_1 = du = mdA_{12}$$

Dónde:

m Función de la longitud del azimut de la línea geodésica para la cual es correcta la igualdad escrita. La magnitud *m* se denomina **longitud reducida de la línea geodésica**.

Si tomamos el elipsoide como una esfera de radio igual al radio medio de curvatura.

Tomando como esférico el triángulo ABB₁ y si expresamos sus lados en medida angular, llegaremos a la siguiente expresión

$$\frac{\text{sen} \frac{du}{R}}{\text{sen } dA_{12}} = \frac{\text{sen} \frac{s}{R}}{\text{sen } 90}$$

Como $\frac{du}{R}$ y dA_{12}

son muy pequeñas, se puede considerar que:

$$du = R \text{sen} \frac{s}{R} dA_{12}$$

Si comparamos esta expresión con las dos expresiones anteriores llegamos a la siguiente conclusión:

$$m = R \text{sen} \frac{s}{R}$$

Si tenemos en cuenta que el azimut de la línea BB₁ es igual a $A_{21} + 270$ obtenemos que:

$$dB_2^{A_{12}} = m \text{sen } A_{21} (1)_2 dA_{12}$$

De la misma forma se obtiene el siguiente resultado:

$$dL_2^{A_{12}} = -\frac{m \cos A_{21}}{\cos B_2} (2)_2 dA_{12}$$

Para deducir $dA_{21}^{A_{12}}$

, es necesario tener en consideración que la corrección al azimut inverso, como consecuencia de la variación del azimut directo debe estar compuesta por dos términos:

A) Corrección dA_{12}

, relacionada con la longitud reducida de la línea geodésica. Esta parte de la corrección será:

$$\frac{dm}{ds} dA_{12}$$

B) Corrección basada en

el cambio del acercamiento

de los meridianos al

desplazarse el punto extremo como resultado de la variación del azimut inicial.

Anteriormente se había llegado a la conclusión de que:

$$BB_1 = du = m dA_{12}$$

$$A_{12} = A_{21} \quad 180 + 90$$

Con lo cual, se puede deducir sin complicación que la variación del acercamiento de los meridianos en el punto extremo valdrá:

$$dt = dL_{21}^{A_{12}} \operatorname{sen} B_2 = -m \cos A_{21} (2)_2 \operatorname{tg} B_2 dA_{12}$$

La corrección completa al azimut inverso tendrá la siguiente forma:

$$dA_{21}^{A_{12}} = dL_{21}^{A_{12}} = \frac{dm}{ds} dA_{12} - m \cos A_{21} (2)_2 \operatorname{tg} B_2 dA_{12}$$

Como sabemos:

$$m = R \operatorname{sen} \frac{s}{R}$$

Con lo cual se puede decir que:

$$\frac{dm}{ds} = \cos \frac{s}{R}$$

Con todo ello, se puede llegar a la expresión:

$$dA_{21}^{A_{12}} = dA_{12} - \frac{s^2}{2N_2^2} dA_{12} - R \operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos A_{21} (2)_2 \operatorname{tg} B_2 dA_{12}$$

Si llamamos:

$$\cos \frac{s}{R} = 1 - \frac{s^2}{2R^2}$$

$$R \operatorname{sen} \frac{s}{R} = s$$

y sustituimos en la ecuación inicial obtendremos que :

4.-EXPRESIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Como conclusión podemos considerar que las fórmulas exactas, válidas para cualquier valor de s, serán de la

siguiente forma:

$$dB_2 = \frac{M_1}{M_2} \cos A_{12} \cos A_{21} + \frac{dm}{ds}_2 \sin A_{12} \sin A_{21} dB_1 - \frac{\cos A_{21}}{M_2} ds + \frac{m}{M_2} \sin A_{21} \sin dA_{12}$$

$$dL_2 = dL_1 - \frac{M_2}{N_2 \cos B_2} \cos A_{12} \sin A_{21} - \frac{dm}{ds}_2 \sin A_{12} \cos A_{21} dB_1 - \frac{\sin A_{21}}{N_2 \cos B_2} ds \frac{m \cos A_{21}}{N_2 \cos B_2} dA_{12}$$

$$dA_{21} = -M_1 \operatorname{tg} A_{21} \frac{\operatorname{tg} B_1}{N_1} + \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \cos A_{12} \cos A_{21} + \frac{dm}{ds}_2 \sin A_{12} \sin A_{21} dB_1 -$$

$$- \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \sin A_{21} ds + \frac{dm}{ds}_1 - m \frac{\operatorname{tg} B_2}{N_2} \cos A_{21} dA_{12}$$

Donde:

$$\frac{dm}{ds}_1 = \frac{m \operatorname{tg} B_2}{N_2 \cos A_{21}} + \frac{\operatorname{tg} A_{21}}{\operatorname{tg} A_{12}}$$

$$\frac{dm}{ds}_2 = \frac{m \operatorname{tg} B_2}{N_1 \cos A_{12}} + \frac{\operatorname{tg} A_{12}}{\operatorname{tg} A_{21}}$$

EXPRESIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

- 2 -

$$dA_{21}^{A_{12}} = dA_{12} - \frac{s^2}{2N_2^2} dA_{12} - s(2)_2 \cos A_{21} \operatorname{tg} B_2 dA_{12}$$