

tema IV: CURVAS CIRCULARES

- Introducción: la Instrucción de Carreteras.
- Geometría de las curvas circulares.
- Elementos de una curva circular.
- Estudio matemático del enlace.
- Encaje de curvas circulares.
- Curva que pasa por tres puntos.
- Curva tangente a tres rectas.
- Curva tangente a dos rectas y que pasa por un punto.
- Curva tangente a una recta y que pasa por dos puntos
- Replanteo de curvas circulares.
- Por abscisas y ordenadas sobre la tangente.
- Por cuerdas y flechas.
- Por intersección angular desde las tangentes.
- Por coordenadas polares.

En este tema se va a estudiar el trazado en planta de una obra lineal como puede ser una carretera.

En el primer apartado, Introducción, se definen las características geométricas generales de estos trazados y en los siguientes se estudia en detalle la alineación tipo constituida por dos alineaciones rectas enlazadas mediante una curva circular a fin de que sirva de modelo para cualquier otro tipo de enlace a efectos del cálculo de sus elementos y de las coordenadas de los puntos singulares y secuenciales.

1– INTRODUCCIÓN: LA INSTRUCCIÓN DE CARRETERAS

El trazado de carreteras se rige por la siguiente norma dictada por el Ministerio de Fomento:

- Norma 3.1– IC. Trazado, de la Instrucción de Carreteras, aprobada por Orden Ministerial de 27 de diciembre de 1999 (B.O.E. de 2 de febrero de 2000).

Compila y actualiza la normativa existente hasta este momento dictada por el entonces Ministerio de Obras Públicas:

- Norma 3.1– IC Características geométricas. Trazado aprobada por Orden Ministerial de 23 de abril de 1964.
- Norma Complementaria de la 3.1– IC Trazado de autopistas aprobada por Orden Ministerial de 12 de marzo de 1976.

La modificación de la antigua normativa responde a la experiencia acumulada en lo referente al trazado de carreteras, que unida al desarrollo tecnológico experimentado en los últimos años, a los cambios acaecidos en el volumen y composición del tráfico, a los nuevos planeamientos de seguridad y a la normativa técnica nacional e internacional han aconsejado proceder a su revisión.

La instrucción 3.1– IC reúne las normas y especificaciones para:

- Proyectar la planta de una carretera.
- Proyectar el alzado de una carretera.
- Coordinar conveniente los elementos de planta y alzado.

El objetivo de las normas es que las carreteras se proyecten de manera que el tráfico ofrezca las máximas garantías de **seguridad** y **comodidad** haciendo compatible estas condiciones con el **aspecto estético**.

TRAZADO EN PLANTA

La planta de las carreteras está formada por rectas y curvas. Al realizar el proyecto, se procura que la longitud de las alineaciones rectas forme un conjunto armónico con el resto del trazado.

- La recta es un elemento de trazado indicado en carreteras de calzada única con dos carriles para obtener suficientes oportunidades de adelantamiento y en cualquier tipo de carreteras para adaptarse a condicionamientos externos obligados (infraestructuras preexistentes, condiciones urbanísticas, etc.). En carreteras de calzadas separadas se emplean alineaciones rectas en tramos singulares que así lo justifiquen, y en particular en terrenos llanos, en valles de configuración recta, por conveniencia de adaptación a otras infraestructuras lineales, o en las proximidades de cruces, zonas de detención obligatoria, etc.
- Grandes rectas producen sensación de monotonía, resultan molestas para la conducción, especialmente durante la noche por el deslumbramiento de los faros y son propicias para que por ellas se circule con exceso de velocidad.
- Alternancia de curvas y rectas para la adaptación al terreno.

Por tanto, el trazado en planta está formado por la sucesión de alineaciones rectas enlazadas entre sí por alineaciones curvas. Vemos las características de un tramo de carretera en recta y en curva:

En un **tramo de recta** no existe fuerza centrífuga y la sección transversal tipo de la carretera es la siguiente:

Eje

$$p = 2\% \quad p = 2\%$$

La pendiente transversal de la calzada es del 2%, llamada pendiente de bombeo y cuya finalidad es evacuar las aguas de lluvia.

En un **tramo de curva** existe una fuerza centrífuga que tiende a desplazar el vehículo en sentido radial y hacia fuera de la curva. Además existe una aceleración centrípeta, producida por el cambio de dirección del vector velocidad:

F centrífuga V

$$m \frac{V^2}{R}$$

A centrípeta

$$a = \frac{V^2}{R}$$

V

La fuerza centrífuga tiende a desequilibrar las condiciones de la marcha, especialmente cuando tiene una magnitud importante (radios pequeños). Para minimizar su efecto se opta por peraltar la curva. Con la inclinación del plano transversal de la calzada el esquema de las fuerzas que actúan sobre el vehículo sería el siguiente:

$$F_c \cdot \cos \theta$$

G ! centro de gravedad del vehículo

$$F_c P \cdot \sin \theta$$

$$F_c \cdot \sin \theta$$

$$P \cdot \cos \theta$$

P

θ

Al inclinar el plano de la calzada, las fuerzas se descomponen según la figura de manera que las resultantes son:

- En el plano de la calzada. Esta fuerza actúa transversalmente a la trayectoria del vehículo y tiende a modificarla. Al peraltar la curva, disminuye su valor, resultando:

$$F_c \cdot \cos \theta - P \cdot \sin \theta$$

- En la dirección perpendicular al plano de la calzada. Esta fuerza fija el vehículo al firme. Al peraltar la curva, aumenta su valor, resultando:

$$P \cdot \cos \theta + F_c \cdot \sin \theta$$

El peralte de una curva depende de la fuerza centrífuga (función del radio y de la velocidad) y del coeficiente de rozamiento transversal. Esos parámetros quedan relacionados por la siguiente fórmula:

$$V^2 = 127 R \left(f_t + \frac{p}{100} \right)$$

V = velocidad (Km/h)
 R = radio en m
 f_t = coeficiente de rozamiento
 p = peralte en %

El peralte, en función del radio de la curva, se calcula aplicando los siguientes criterios:

CARRETERAS DEL GRUPO I		CARRETERAS DEL GRUPO II	
AUTOPISTAS, AUTOVÍAS		CARRETERAS C-80, C-60 Y C-40	
VÍAS RÁPIDAS Y CARRETERAS C-100		50 " R " 350	p = 7 %
250 " R " 700	p = 8 %	350 " R " 2500	p = 7 - 6,08 · (1 - 350/r)1,3 %
700 " R " 5000	p = 8 - 7,3 · (1 - 700/r)1,3 %	2500 " R " 3500	p = 2 %
5000 " R " 7500	p = 2 %	3500 " R	Bombeo
7500 " R	Bombeo		

El radio está condicionado por la velocidad específica de la curva: es la máxima velocidad que puede mantenerse en condiciones de seguridad cuando las únicas limitaciones vienen determinadas por las características geométricas de la curva. Se calcula en función de las condiciones topográficas y ambientales, de la homogeneidad del trayecto y de las condiciones económicas.

Se procurará mantener la velocidad de proyecto de cada tipo de carretera: autopistas y autovías, 120, 100 u 80, vías rápidas 100 u 80 y carreteras 100, 80, 60 ó 40.

En las siguientes tablas se muestra la relación velocidad específica – radio – peralte para las carreteras del grupo I y del grupo II:

CARRETERAS GRUPO I			CARRETERAS GRUPO II		
Velocidad Específica (Km/h)	Radio (m)	Peralte (%)	Velocidad Específica (Km/h)	Radio (m)	Peralte (%)
80	250	8,00	40	50	7,00
85	300	8,00	45	65	7,00
90	350	8,00	50	85	7,00
95	400	8,00	55	105	7,00
100	450	8,00	60	130	7,00
105	500	8,00	65	155	7,00
110	550	8,00	70	190	7,00
115	600	8,00	75	225	7,00
120	700	8,00	80	265	7,00
125	800	7,51	85	305	7,00
130	900	6,97	90	350	7,00
135	1050	6,25	95	410	6,50
140	1250	5,49	100	485	5,85
145	1475	4,84	105	570	5,24
150	1725	4,29	110	670	4,67

Por tanto, son dos las características distintivas de un tramo en recta y de un tramo en curva: la sección transversal y la ausencia y presencia de una fuerza centrífuga. Para enlazar una recta con una curva, se utiliza una curva de radio variable (la clotoide) para que el tránsito se haga gradualmente.

El esquema general del enlace tipo es el siguiente:

Secciones transversales:

C'

2% 2%

S1:

2%

S2:

2%

S3:

p O

S4: F'

R

$R =$

$F_c = 0$ S4

S1 S2 S3 F CURVA δ

C

α_{L_0}

δR_0

RECTA CLOTOIDE

La fórmula general de la clotoide es:

$$R L = A^2$$

R = Radio de curvatura en m.

L = Longitud en m de la curva entre $R =$
y el punto de radio R.

A = Parámetro de la clotoide en m.

α_{L_0}

= Ángulo de desviación en el punto de tangencia con la curva circular.

ΔR_0

= Retranqueo de la curva circular.

Las curvas de acuerdo deben cumplir una serie de condiciones:

- Tener una longitud que permita efectuar el cambio de la sección transversal en recta con la pendiente de bombeo a la sección peraltada en curva: la variación de la pendiente transversal se limita a un máximo del 4% por segundo para la velocidad específica de la curva circular asociada. El desvanecimiento del bombeo se realiza en el tramo de recta inmediatamente anterior a la tangente de entrada, en una longitud máxima de 40 m en carreteras del grupo I y de 20 m en carreteras del grupo II.
- Tener una longitud mínima y un parámetro adecuado para conseguir una variación gradual y aceptable de la aceleración centrípeta desde el punto de vista de la comodidad.
- Tener una longitud mínima y un parámetro adecuado para que la curva de transición sea fácilmente perceptible para el conductor: el ángulo de desviación en el punto de tangencia (δL_0) con la curva circular debe ser mayor o igual a 1/18 rad (3,5 gonios) y el retranqueo (δR_0) de la curva circular al menos de 50 cm.

La Instrucción incluye unas fórmulas que permiten calcular los parámetros y longitudes mínimas de las clotoides para cumplir las tres condiciones anteriores.

La norma 3.1 IC establece las longitudes mínimas y máximas de tramos rectos en función de la velocidad de proyecto (velocidad que se determina en función de las características geométricas del trazado en condiciones de comodidad y seguridad). En la siguiente tabla se muestran las longitudes mínimas y máximas de rectas:

VP	L min (m) Trazados en S	L min (m) Resto de trazados	L máx (m)
40	56	111	668
50	69	139	835
60	83	167	1002
70	97	194	1169
80	111	222	1336
90	125	250	1503
100	139	278	1670
110	153	306	1837
120	167	333	2004

Los trazados más habituales en los proyectos de carreteras son:

• Enlace de alineaciones rectas mediante curva circular central y curvas de acuerdo simétricas.	
	Curva de transición Alineación de salida Curva circular Curva de transición Alineación de entrada

- Unión de clotoides para curvas en S (radios de curvatura en sentido contrario)

Clotoide

Clotoide

- Unión de alineaciones rectas mediante curva circular sin curvas de acuerdo.

alineación de salida

curva circular

alineación de entrada

Este enlace se realizará en los siguientes casos:

- Para carreteras del Grupo I cuando los radios de la curva sean iguales o superiores a 5000 m. y para las del Grupo II cuando los radios sean iguales o superiores a 2500 m.

Al ser el radio grande, la fuerza centrífuga es pequeña y se puede prescindir de la curva de acuerdo. Tampoco se necesita para realizar la transición al peralte, ya que para estos radios el peralte es pequeño (del 2 %).

- Cuando el ángulo de giro entre las rectas a enlazar sea inferior a 6 grados centesimales para mejorar la percepción visual se realiza la unión sin clotoide. En este caso el desarrollo del tramo circular debe ser:

$$D = 325 - 25 \Omega$$

D = desarrollo de la curva en m.

Ω = ángulo entre las alineaciones rectas en gonios.

Ese desarrollo mínimo se establece para evitar el efecto antiestético, o efecto garrote.

- Cuando la velocidad específica es pequeña (fuerza centrífuga y peralte pequeños), caso que puede darse, por ejemplo, en tramos de ciudad, en urbanizaciones o en carreteras de montaña.

2- GEOMETRÍA DE LAS CURVAS CIRCULARES

A efectos del encaje, los arcos circulares utilizados en la planta de un proyecto se estudian relacionados con los ejes rectos del estado de alineaciones, diseñándose tangente a ellos.

2.1- ELEMENTOS DE UNA CURVA CIRCULAR

Se muestran en la siguiente figura:

V

$$\Omega = 200 - V = \Omega$$

V

$$V/2$$

B

$$T_e = T M$$

$$\Omega/2 T_s = T'$$

Ω

R = radio

O

Puntos singulares

- V = Vértice de la curva. Es la intersección de las alineaciones que se van a enlazar.

- O = Centro de la curva.
- Te ó T = Tangente de entrada. Punto de tangencia de la curva y la primera alineación. Es el primer punto de la curva.
- Ts ó T' = Tangente de salida. Punto de tangencia de la curva y la segunda alineación. Es el último punto de la curva.
- B = Bisectriz de la curva. Es el punto central del tramo circular.
- M = Centro de la cuerda.

Elementos angulares

- δ = Ángulo en el centro. Es el que forman los radios en los puntos de tangencia. Es igual al ángulo de las alineaciones, δ .
- V = Ángulo en el vértice. Es el suplementario del ángulo en el centro.

$$V = 200 - \delta$$

Elementos lineales

- R = Radio de la curva.
- TV = VT' = Longitud de las tangentes.
- TT' = Cuerda de la curva.
- BM = Flecha de la curva.
- VB = Distancia del vértice a la curva o valor de la bisectriz.
- D = desarrollo del arco circular. Es la longitud del tramo de carretera en curva.

cálculo de los elementos de UNA curva circular

Los datos que se necesitan para calcular los elementos de la curva circular son el **radio (R)** y el **ángulo que forman las alineaciones (δ)**, datos que generalmente vienen impuestos al realizar el proyecto de la carretera: el radio debe ser como mínimo el adecuado a la velocidad específica, y el ángulo entre las alineaciones está condicionado por la forma del terreno o por geometrías previas.

Longitud de las tangentes (VT = VT')

En el triángulo VTO (rectángulo en T) se observa:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{VT}{TO} = \frac{VT}{R} ; VT = R \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$; \alpha = \Omega$$

Cuerda de la curva (TT')

En el triángulo TMO (rectángulo en M) se observa:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{TM}{TO} = \frac{TM}{R} ; TM = R \sin \frac{\alpha}{2} ; TT' = 2 TM = 2 R \sin \frac{\alpha}{2}$$

Flecha de la curva (BM)

En el triángulo TMO se observa:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{MO}{TO} = \frac{MO}{R} ; MO = R \cos \frac{\alpha}{2} ; BM = BO - MO = R - R \cos \frac{\alpha}{2} = R (1 - \cos \frac{\alpha}{2})$$

Distancia del vértice a la curva o valor de la bisectriz (VB)

En el triángulo VTO (rectángulo en T) se tiene:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{TO}{VO} = \frac{R}{VO} ; VO = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} ; VB = VO - BO = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} - R = R \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)$$

Desarrollo del arco circular (D)

Se obtiene estableciendo la equivalencia entre la longitud total de la circunferencia (correspondiente a 400g) y la longitud correspondiente a un ángulo central α :

$$D = \frac{2 \pi R \alpha}{400}$$

2.2- estudio matemático del enlace

Para llegar a realizar el replanteo de una alineación de este tipo, es necesario calcular las coordenadas de los puntos singulares (que generalmente deben replantearse) y de los puntos secuenciales. Los pasos que se siguen hasta determinar las coordenadas de los puntos de la curva son los siguientes:

- Cálculo de las coordenadas del vértice.
- Cálculo de las coordenadas de los puntos singulares.
- Cálculo de las coordenadas de los puntos secuenciales.

Cálculo de las coordenadas del vértice

El vértice está en la intersección de las alineaciones. Éstas estarán definidas por las coordenadas de dos puntos. La intersección de las rectas se puede obtener por trigonometría o analíticamente.

Intersección de las rectas por trigonometría

Sea una alineación definida por los puntos A y B que se quiere enlazar con la alineación definida por C y D:

V

B

D

A C

Se parte de conocer las coordenadas de los puntos que definen las alineaciones. Uniando dos de ellos, se forma un triángulo del que se conocen los ángulos y un lado:

$$\begin{aligned}
 A &= \theta_A^C - \theta_A^V = \theta_A^C - \theta_A^B \\
 C &= \theta_C^V - \theta_C^A = \theta_C^D - \theta_C^A \\
 V &= \theta_V^A - \theta_V^C = \theta_B^A - \theta_D^C \\
 AC &= \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}
 \end{aligned}$$

Tri ngulo ACV

Aplicando el teorema del seno, se obtiene la distancia AV y la distancia CV:

$$\frac{AV}{\text{sen} C} = \frac{CV}{\text{sen} A} = \frac{AC}{\text{sen} V} ; AV = \frac{AC \text{ sen} C}{\text{sen} V} ; CV = \frac{AC \text{ sen} A}{\text{sen} V}$$

Cálculo de las coordenadas de V (desde A):

$$\begin{aligned}
 \theta_A^V &= \theta_A^B \\
 X_V &= X_A + AV \text{ sen} \theta_A^V \\
 Y_V &= Y_A + AV \text{ cos} \theta_A^V
 \end{aligned}$$

Cálculo de las coordenadas de V (desde C):

$$\begin{aligned}
 \theta_C^V &= \theta_C^D \\
 X_V &= X_C + CV \text{ sen} \theta_C^V \\
 Y_V &= Y_C + CV \text{ cos} \theta_C^V
 \end{aligned}$$

Intersección analítica de dos rectas

Una recta en el plano horizontal queda definida por dos puntos. La pendiente de recta es la tangente del ángulo δ , el que forma la dirección positiva del eje de abscisas con la semirrecta situada en el semiplano superior:

B

δ_{AB}

δ

A

O

$$m = \text{tag} \alpha = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

En Topografía los ángulos que se utilizan son los acimutes, medidos desde el eje Y, y con el sentido horario como positivo. Teniendo en cuenta la relación entre δ y δ , la pendiente de la recta es:

$$\text{tag} \theta = \frac{\Delta X}{\Delta Y} ; m = \text{tag} \alpha = \frac{1}{\text{tag} \theta_A^B}$$

; la pendiente es la misma con el δAB o con el δBA

Para un punto cualquiera de la recta se cumple:

$$m = \tan \alpha = \frac{Y - Y_A}{X - X_A}$$
$$; Y - Y_A = m (X - X_A) = m X - m X_A$$

Desarrollando la anterior expresión, se deduce la ecuación general de la recta:

$$Y = m X - (m X_A - Y_A)$$

X_A, Y_A son las coordenadas de un punto de la recta. La pendiente se puede calcular como $1/\tan \delta$

Para calcular analíticamente la intersección de dos rectas, se hallan las ecuaciones de las mismas y se resuelve el sistema:

Recta 1: $Y = m_1 X - (m_1 X_{P1} - Y_{P1})$
(1)

(X_{P1}, Y_{P1}) coordenadas de un punto de la recta 1

$$m_1 (\text{pendiente de la recta 1}) = 1/\tan \delta_1$$

Recta 2: $Y = m_2 X - (m_2 X_{P2} - Y_{P2})$
(2)

(X_{P2}, Y_{P2}) coordenadas de un punto de la recta 2

$$m_2 (\text{pendiente de la recta 2}) = 1/\tan \delta_2$$

Igualando la Y, y despejando el valor de X queda:

$$Y = m_1 X - (m_1 X_{P1} - Y_{P1}) = m_2 X - (m_2 X_{P2} - Y_{P2})$$

$$X (m_1 - m_2) = (m_1 X_{P1} - Y_{P1}) - (m_2 X_{P2} - Y_{P2})$$

$$X = \frac{(m_1 X_{P1} - Y_{P1}) - (m_2 X_{P2} - Y_{P2})}{m_1 - m_2}$$

El valor de X se sustituye en las ecuaciones (1) o (2) y se obtiene el valor de Y

Cálculo de las coordenadas de los puntos singulares: centro, bisectriz y tangentes

V

B

T $\delta/2$

T'

A

O

C

coordenadas del centro

El centro de la curva está en la bisectriz de las alineaciones que se enlazan. El modo más sencillo de obtener las coordenadas del centro de la curva, es calcularlas desde la intersección de las alineaciones:

- El acimut desde V hasta O es el de la bisectriz: $\theta_V^O = \theta_V^A - \frac{V}{2} = \theta_V^C + \frac{V}{2} = \frac{\theta_V^A + \theta_V^C}{2}$

- La distancia desde V hasta O es: $VO = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}$

Coordenadas de O:

$$X_O = X_V + VO \operatorname{sen} \theta_V^O$$

$$Y_O = Y_V + VO \cos \theta_V^O$$

coordenadas de la bisectriz

El punto central de la curva está en la bisectriz, y sus coordenadas se calculan desde el vértice:

- Acimut desde el vértice hasta la bisectriz: $\theta_V^B = \theta_V^A - \frac{V}{2} = \theta_V^C + \frac{V}{2} = \frac{\theta_V^A + \theta_V^C}{2}$

- La distancia desde V hasta B es la distancia desde el vértice a la curva:

$$VB = VO - BO = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} - R = R \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - 1 \right)$$

Coordenadas de B:

$$X_B = X_V + VB \operatorname{sen} \theta_V^B$$

$$Y_B = Y_V + VB \cos \theta_V^B$$

coordenadas de las tangentes

Lo más sencillo es calcularlas desde la intersección de las alineaciones:

- El acimut desde V a las tangentes es el de las alineaciones:

$$\theta_V^T = \theta_V^A$$

$$\theta_V^{T'} = \theta_V^C$$

- La distancia desde V hasta los puntos de tangencia es la longitud de las tangentes:

$$VT = VT' = R \tan \frac{\alpha}{2}$$

Coordenadas de la tangente de entrada:	Coordenadas de la tangente de salida:
$X_T = X_V + VT \sin \theta_V^T$	$X_{T'} = X_V + VT' \sin \theta_V^{T'}$
$Y_T = Y_V + VT \cos \theta_V^T$	$Y_{T'} = Y_V + VT' \cos \theta_V^{T'}$

cálculo de las coordenadas de los puntos secuenciales

Para poder replantear una curva circular, se deberán determinar las coordenadas de una serie de puntos suficientes para poder representar físicamente la circunferencia. La longitud de arco entre puntos consecutivos, puede ser:

1- Un valor que esté determinado en el propio proyecto. Normalmente en los proyectos lineales se determinan las coordenadas de puntos con un intervalo de distancia constante, de **20** ó **25** m, siguiéndose el mismo criterio para puntos de alineaciones rectas y de curvas.

En este caso, la tangente de entrada tendrá una distancia al origen, que en general no será la correspondiente al intervalo. Restando la distancia al origen de los puntos secuenciales en curva a la distancia al origen de la tangente de entrada, se obtiene el desarrollo en curva que determina la posición del punto secuencial dentro del tramo circular, y que será el dato que se utilice para calcular sus coordenadas.

P	$d = D_P - D_T ; \frac{d}{\delta} = \frac{2 \pi R}{400} ; \delta = \frac{d 400}{2 \pi R}$
T	

Cuando en el proyecto (en el anejo de trazado geométrico) no figura como dato el intervalo, se pueden seguir los siguientes criterios para marcar los puntos de la curva:

2- Considerar un desarrollo tal que el arco y la cuerda entre puntos consecutivos tenga una separación despreciable para la precisión que se pretende. Es decir, será el valor máximo de la flecha el que determine la separación entre los puntos, y en consecuencia el ángulo central correspondiente. Flechas despreciables para puntos del eje de una carretera podrían ser de 10 ó 15 cm, y para bordillos de 1 cm.

$$F = R - R \cos \frac{\delta}{2} ; R \cos \frac{\delta}{2} = R - F ; \cos \frac{\delta}{2} = 1 - \frac{F}{R} ; \frac{\delta}{2} = \arccos(1 - \frac{F}{R}) ; \delta = 2 \arccos(1 - \frac{F}{R})$$

Conocido el radio y la flecha, se calcula el ángulo central correspondiente.

3- Si no existen especificaciones al respecto, en construcción se suele seguir el criterio de considerar como intervalo de separación en desarrollo entre los puntos a replantear una longitud igual a la décima parte del radio. El ángulo central sería:

$$d = \frac{R}{10} ; \delta_1 = \frac{400}{2 \pi R} \frac{R}{10} = \frac{400}{10 \cdot 2 \pi} = \frac{20}{\pi} ; \delta_2 = 2 \delta_1 ; \delta_3 = 3 \delta_1$$

Siguiendo cualquiera de los criterios anteriores, conoceremos el ángulo central correspondiente al punto de la curva. Para obtener las coordenadas, se pueden hacer desde el centro o desde la tangente de entrada:

V

δδ

P

T

δ

coordenadas de P desde el centro:

- El acimut desde el centro hasta P es: $\theta_O^P = \theta_O^T + \delta$; $\theta_O^T = \theta_T^O$ 200^g

- La distancia desde el centro hasta P es el radio de la curva: $OP = R$

- Coordenadas de P
$$X_P = X_O + OP \sin \theta_O^P$$
$$Y_P = Y_O + OP \cos \theta_O^P$$

coordenadas de P desde la tangente de entrada

- El acimut desde la tangente hasta P está definido por el acimut de la primera alineación y el ángulo que forma ésta con la recta TP. Ese ángulo es un ángulo inscrito cuyo valor es la mitad del central correspondiente: $\theta_T^P = \theta_T^V + \frac{\delta}{2}$

- La distancia desde la tangente hasta el punto P es una cuerda correspondiente a un ángulo central :
$$TP = 2 R \sin \frac{\delta}{2}$$

- Coordenadas de P
$$X_P = X_T + TP \sin \theta_T^P$$
$$Y_P = Y_T + TP \cos \theta_T^P$$

3- encaje de curvas circulares

Hasta ahora se han estudiado las curvas circulares a partir de conocer el ángulo que forman las alineaciones y el radio de la curva. Existen algunos casos en los que el radio no es un dato de partida, sino que se debe calcular en función de unas determinadas condiciones geométricas. A continuación se estudia el modo de calcular el radio de la curva en los siguientes casos:

- Curva que pasa por tres puntos.
- Curva tangente a tres rectas.
- Curva tangente a dos rectas y que pasa por un punto.
- Curva tangente a una recta y que pasa por dos puntos.

3.1- curva que pasa por tres puntos

B

2C

O

A C

C

El centro se encuentra en la intersección de las mediatrices de los tres segmentos que se forman al unir los puntos. Para deducir el valor del radio, nos fijamos en el triángulo ABO. El ángulo C marcado en la figura es un ángulo inscrito que abarca el arco AB, y por tanto su valor es la mitad que el central (ángulo en O del triángulo ABO). Resolviendo el triángulo ABO obtenemos el valor del radio. Vemos dos formas de resolverlo:

- Aplicando el valor de la cuerda:

$$AB = 2 R \sin \frac{2C}{2} ; R = \frac{AB}{2 \sin C} \quad AB = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \\ C = \theta_C^B - \theta_C^A$$

- Aplicando el teorema del coseno:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 AO BO \cos 2C = R^2 + R^2 - 2 R^2 \cos 2C = R^2 (2 - 2 \cos 2C) \\ R^2 = \frac{AB^2}{2 - 2 \cos 2C} ; R = \sqrt{\frac{AB^2}{2 - 2 \cos 2C}}$$

3.2- curva tangente a tres rectas

B

M

δ

O

A

C

El centro se encuentra en la intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo que se forma por la intersección de las tres rectas.

A partir de las rectas se pueden hallar las coordenadas de los puntos A, B y C, y los ángulos que forman al intersectarse (A, B y C)

Para calcular el radio, resolvemos el triángulo ABO:

- Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{AO}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{AB}{\sin \Omega} ; AO = \frac{AB \sin \frac{B}{2}}{\sin \Omega} \quad AB = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

$$\Omega = 200 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$$

En el triángulo AMO (rectángulo en M) se observa: $OM = R = AO \sin \frac{A}{2}$

- Obteniendo el valor del lado AB:

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \frac{MO}{AM} ; AM = \frac{R}{\tan \frac{A}{2}} \\ AB &= AM + MB \\ \tan \frac{B}{2} &= \frac{MO}{MB} ; MB = \frac{R}{\tan \frac{B}{2}} \\ AB &= AM + MB = \frac{R}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{R}{\tan \frac{B}{2}} = R \left(\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{B}{2}} \right) \\ R &= \frac{AB}{\frac{1}{\tan \frac{A}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{B}{2}}} \end{aligned}$$

3.3- Curva tangente a dos rectas y que pasa por un punto

Dadas las rectas r1 y r2 y el punto P, hallar el radio de la curva tangente a las dos rectas y que pasa por el punto P:

r1

M

P δ

V

O1 δ O2 V/2

r2

En la figura puede observarse que existen dos curvas que cumplen con las condiciones requeridas: la que tiene su centro en O1 y la que lo tiene en O2. Para calcular el radio, el primer paso es calcular las coordenadas de la intersección de las dos rectas (coordenadas de V). Además se calcula el ángulo $\sphericalangle$ que forman las alineaciones, que nos permite determinar el ángulo en el centro: $\alpha = 200 - \sphericalangle$

Para calcular el radio, se resuelve el triángulo OPV, en el que se aplica el teorema del coseno:

$$\begin{aligned}
 OP &= R \\
 (*) \quad OP^2 &= R^2 = OV^2 + PV^2 - 2 \cdot OV \cdot PV \cdot \cos \delta \quad PV = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \\
 \delta &= \frac{V}{2} - \beta \quad ; \quad \beta = \theta_V^O - \theta_V^P \text{ (por coordenadas)}
 \end{aligned}$$

En el triángulo OVM (rectángulo en M) se deduce el valor de OV:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{MO}{OV} = \frac{R}{OV} \quad ; \quad OV = \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Sustituyendo este valor en la expresión (*) se obtiene:

$$R^2 = \left(\frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 + PV^2 - 2 \cdot \frac{R}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot PV \cdot \cos \delta \quad ; \quad R^2 \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) + R \cdot 2 \cdot PV \cdot \frac{\cos \delta}{\cos \frac{\alpha}{2}} - PV^2 = 0$$

Resolviendo esa ecuación de segundo grado se obtienen los valores del radio, que son los correspondientes a las dos soluciones de la figura inicial.

3.4- Curva tangente a una recta y que pasa por dos puntos

Sea la recta r1 y los puntos A y B. La curva que es tangente a esa recta y que pasa por los puntos es:

V

M ò A

2ð

r1 O

B

Con la recta r1 y las coordenadas de A y B, se puede hallar la intersección de r1 y la recta AB (coordenadas de V). Así podremos obtener la distancia desde V hasta A y hasta B. Aplicamos la expresión de la potencia de V respecto de la circunferencia:

$$\text{Potencia} = VM^2 = VA \cdot VB \quad ; \quad VM = \sqrt{VA \cdot VB}$$

(se calcula VM)

En el triángulo VMA, aplicamos el teorema del coseno:

$$MA^2 = VM^2 + VA^2 - 2 \cdot VM \cdot VA \cdot \cos V$$

(se calcula MA)

En ese mismo triángulo se aplica el teorema del seno:

$$\frac{VA}{\sin \epsilon} = \frac{MA}{\sin V} \quad ; \quad \sin \epsilon = \frac{VA \cdot \sin V}{MA}$$

(se calcula el ángulo δ)

En el triángulo MAO, el lado MA es una cuerda, y el ángulo en el centro es el doble del ángulo δ . Aplicando el valor de la cuerda, tenemos:

$$MA = 2 R \sin \frac{2\epsilon}{2} = 2 R \sin \epsilon ; R = \frac{MA}{2 \sin \epsilon}$$

(se calcula el radio de la curva que cumple las condiciones impuestas inicialmente).

4- replanteo de curvas circulares

4.1- POR ABSCISAS Y ORDENADAS SOBRE LA TANGENTE

Es un método de replanteo interno puesto que se realiza desde la tangente. Por tanto este punto debe haber sido previamente replanteado.

En la siguiente figura se muestran la abscisa y ordenada sobre la tangente para un punto P de la curva:

V

H

P

T

Q

T'

O

Cálculos:

- Determinar el valor del ángulo central en función del desarrollo lineal.
- Determinar el valor de la abscisa y de la ordenada:

$$\text{Abscisa: } X_P = TH = QP = R \sin \delta$$

$$\text{Ordenada: } Y_P = HP = TQ = TO - QO = R - R \cos \delta$$

Pasos para replantear P (con goniómetro o con cinta):

- Desde T, marcar H en la dirección TV a distancia igual a XP
- Desde H, marcar P en la dirección perpendicular a TV y a una distancia igual a YP

Relación entre la abscisa y la ordenada:

Triángulo OPQ (rectángulo en Q):

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2$$

$$R^2 = (R - Y)^2 + X^2 ; R^2 = R^2 + Y^2 - 2 R Y + X^2$$

$$Y < X \quad Y^2 \ll X^2 \text{ (despreciable)} \quad 0 = -2 R Y + X^2$$

$$Y = \frac{X^2}{2 R}$$

Ventajas del método: el replanteo se realiza por la zona convexa de la curva. Puede utilizarse cuando en la zona cóncava existan obstáculos.

4.2- POR CUERDAS Y FLECHAS

Es también un método de replanteo interno que consiste en ir marcando puntos de la curva que son las sucesivas bisectrices.

V

B2

B1

T M2

M1

T'

O

Cálculos:

– Determinar el valor de las cuerdas y flechas:

$$\text{Cuerda 1: } C_1 = TT' = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$; \text{ Flecha 1: } F_1 = B_1M_1 = R - R \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Cuerda 2: } C_2 = TB_1 = 2R \sin \frac{\alpha}{4}$$

$$; \text{ Flecha 2: } F_2 = B_2M_2 = R - R \cos \frac{\alpha}{4}$$

Pasos para replantear P (con goniómetro o con cinta):

– Replantear previamente las tangentes T y T'

– Desde T, marcar M1 en la dirección TT' a una distancia igual a la mitad de la cuerda

(C1/2)

Desde C1, marcar B1 en la dirección perpendicular a TT' y a una distancia igual a la flecha

F1

– Desde T, marcar M2 en la dirección TB1 a una distancia igual a la mitad de la cuerda

(C2/2)

Desde C2, marcar B2 en la dirección perpendicular a TB1 y a una distancia igual a la flecha

F2

Relación entre cuerdas y flechas:

Triángulo TM1O (rectángulo en M1):

$$TO^2 = TM_1^2 + M_1O^2$$

$$R^2 = \left(\frac{C_1}{2}\right)^2 + (R - F_1)^2 \quad ; \quad R^2 = \frac{C_1^2}{4} + R^2 + F_1^2 - 2 R F_1$$

$$F_1 < C_1 \quad F_1^2 \ll C_1^2 \text{ (despreciable)} \quad 0 = \frac{C_1^2}{4} - 2 R F_1$$

$$F_1 = \frac{C_1^2}{8 R} \quad ; \quad \text{de forma general } F = \frac{C^2}{8 R}$$

Segunda cuerda y segunda flecha:

Aproximadamente la segunda cuerda es la mitad de la primera. Así:

$$C_2 = \frac{C_1}{2} \quad ; \quad F_2 = \frac{C_2^2}{8 R} = \frac{\left(\frac{C_1}{2}\right)^2}{8 R} = \frac{C_1^2}{4 \cdot 8 R} = \frac{F_1}{4}$$
$$; F_3 = \frac{F_2}{4}$$

Cada flecha es aproximadamente la cuarta parte de la flecha anterior (es el método de los cuartos de flecha).

Utilidad del método:

Sirve para densificar puntos de la curva de forma sencilla, pudiendo realizarse el replanteo con cinta.

4.3- POR INTERSECCIÓN ANGULAR DESDE LAS TANGENTES

En este método es necesario replantear previamente las tangentes de entrada y salida.

V

$$\frac{\delta}{2}$$

P

$$T \frac{\alpha - \delta}{2}$$

$$\frac{\delta}{2} \\ \frac{\alpha - \delta}{2}$$

δδ T'

O

Cálculos:

– Determinar el valor del ángulo central en función del desarrollo:

$$\frac{400}{2\pi R} = \frac{\delta}{d} ; \delta = \frac{400 d}{2\pi R}$$

Pasos para replantar P (con goniómetro):

– Orientando al vértice: el punto P está en la intersección de las direcciones trazadas desde T y T' en las que se tienen las siguientes lecturas horizontales:

$$L_T^P = L_T^V + \frac{\delta}{2} ; L_{T'}^P = L_{T'}^V - \frac{\alpha - \delta}{2}$$

– Orientando a las tangentes: el punto P está en la intersección de las direcciones trazadas desde T y T' en las que se tienen las siguientes lecturas horizontales:

$$L_T^P = L_T^{T'} - \frac{\alpha - \delta}{2} ; L_{T'}^P = L_{T'}^T + \frac{\delta}{2}$$

4.4- POR COORDENADAS POLARES

Desde el centro

V

P

T T'

O

Cálculos:

– Determinar el valor del ángulo central en función del desarrollo:

$$\frac{400}{2\pi R} = \frac{\delta}{d} ; \delta = \frac{400 d}{2\pi R}$$

Modo de replantar P:

– Estacionar en O y orientar a la tangente de entrada.

- Replantar el punto P con los siguientes datos:

$$L_O^P = L_O^T + \delta ; OP = R$$

Desde las tangentes

V

$\frac{\delta}{2}$
P

T T'

Cálculos: O

- Determinar el valor del ángulo central en función del desarrollo.

Modo de replantar P:

- Estacionar en T y orientar al vértice V. Marcar el punto P con los siguientes datos:

$$L_T^P = L_T^V + \frac{\delta}{2} ; TP = 2 R \sin \frac{\delta}{2} \text{ (es una cuerda correspondiente a un ángulo central } \delta \text{)}$$

DESDE LAS BASES DE REPLANTEO

En este método el replanteo se lleva a cabo desde puntos exteriores al proyecto (las bases de replanteo):

v

b

p2 p3 c

p1

t t'

a

A, B, C y D: bases de replanteo

P1, P2, P3: puntos secuenciales

d

Cálculos:

- Determinar las coordenadas de los puntos secuenciales.
- Relacionar las coordenadas de esos puntos con las de las bases de replanteo (acimut y distancia reducida)

Modo de replantear los puntos de la curva:

- Estacionar en la base de replanteo (por ejemplo B).
- Orientar a otra base con el acimut (por ejemplo a A con el α_{BA})
- Replantear los puntos en la dirección en la que tengamos una lectura igual al acimut calculado (α_{BP}) y a una distancia igual a la distancia reducida calculada (BP)

Es el método más habitual en el replanteo del proyecto. Los replanteos internos se realizan en casos especiales: donde no hay visibilidad (por ejemplo en túneles o en zonas de abundante vegetación), para densificar puntos o para proyectos sencillos (jardinería, bordillos en tramos de ciudad,...)

25

1