

TALLER DE MATEMATICAS

GEOMETRIA: TRIÁNGULOS

Los triángulos son las figuras planas mas utilizadas porque son los únicos polígonos que son rígidos, es decir, que no se deforman ni se doblan. Algunos objetos en los que se aprovecha la rigidez del triángulo son: la tabla de la plancha, el brazo de la grúa, el poste del tendido eléctrico y muchas construcciones arquitectónicas.

Ya sabes que un triángulo es un polígono de tres lados, pero no siempre es posible construir un triángulo con tres segmentos de longitud conocida. Investígalo con las siguientes actividades.

• Construcción y clasificación de triángulos

ACTIVIDAD 1

Ya sabes que un triángulo es un polígono de tres lados, pero no siempre es posible construir un triángulo con tres segmentos de longitud conocida. Investígalo con los siguientes ejemplos:

- 3, 4 y 5 cm.
- 6, 6 y 9 cm.
- 3, 4 y 9 cm.
- 3, 5 y 8 cm.

A la vista de los resultados, ¿recuerdas que condición deben cumplir los lados de un triángulo para que se pueda construir?

b) Que el mayor de los lados debe ser mayor que la suma de los lados menores

ACTIVIDAD 2

En la actividad anterior has dibujado triángulos conociendo los tres lados. Ahora se trata de construirlos conociendo otros elementos

a) Construye un triángulo conocidos dos lados y el ángulo que forman estos dos lados, por ejemplo: los lados miden 3 y 4 cm. y el ángulo comprendido 30° .

b) Construye un triángulo conocido un lado y dos ángulos adyacentes, por ejemplo: el lado mide 5 cm. y los ángulos adyacentes 60° y 45° .

c) Construye un triángulo conocidos dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos, por ejemplo: Los lados miden 5 y 8 cm. y el ángulo no comprendido entre ellos 50° .

ACTIVIDAD 3

Seguimos construyendo triángulos. Se trata de que ahora construyas un triángulo si solamente conocemos dos lados, por ejemplo, que valgan 6 y 10 cm. ¿Puedes construirlo? ¿Puedes construir un solo triángulo o por el contrario puedes construir mas de uno?

Intenta hacerlo ahora si sabemos los tres ángulos, por ejemplo: 30° , 25° y 125° .

ACTIVIDAD 4

¿Recuerdas cuanto suman los tres ángulos de un triángulo?. Si no lo recuerdas prueba a hacer lo siguiente: dibuja en tu cuaderno un triángulo cualquiera y recórtalo. Dobra una esquina de tal forma que el vértice coincida con el lado opuesto. A continuación dobla las otras dos esquinas de forma que los vértices coincidan con la primera. Así habrás conseguido que los tres ángulos estén adyacentes y puedas ver fácilmente cuanto suman.

ACTIVIDAD 5

Completa la siguiente tabla indicando en que casos es posible:

TRIANGULO	Rectángulo	Acutángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

ACTIVIDAD 6

Para realizar esta actividad necesitas proveerte de unos cuantos palillos.

a) ¿Cuántos triángulos puedes construir con tres palillos? (No vale romperlos) Para mayor comodidad supondremos que cada palillo vale una unidad de medida.

b) ¿Cuántos puedes construir con 4 palillos? ¿Y con cinco? ¿Y con seis?... Recuerda que todo resulta mucho más sistemático y ordenas tus resultados en una tabla en la que indiques el número de palillos utilizados y el tipo de triángulo que se obtiene: Equilátero, isósceles o escaleno. Completa la tabla hasta 12 palillos.

Nº PALILLOS	Equilátero	Isósceles	Escaleno
3	1,1,1		
4			
5		1,2,2	
6	2,2,2		
7		2,2,3//1,3,3	
8		2,3,3	
9	3,3,3		2,3,4
10		2,4,4//3,3,4	
11		3,4,4//3,3,5	2,4,5
12	4,4,4	1,5,5	3,4,5

c) ¿Cuántos palillos son necesarios para que aparezca un triángulo rectángulo? ¿Y para que aparezca el primer obtusángulo?

RESPUESTA: 12 Palillos//8 Palillos.

- *Rectas y Puntos notables de un triángulo*

ACTIVIDAD 7

Sabiendo que la altura en un triángulo es la recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto, dibuja las tres alturas correspondientes a un triángulo de lados 7, 3 y 5 cm. Comprueba que las tres se cortan en un mismo punto llamado ortocentro.

ACTIVIDAD 8

Si un triángulo es rectángulo, ¿qué podemos decir de sus alturas?

RESPUESTA: La altura de los catetos coincide con el cateto opuesto.

ACTIVIDAD 9

Sabiendo que la mediatriz en un triángulo es la recta perpendicular a un lado que pasa por el punto medio, dibuja las tres mediatrices correspondientes al triángulo de la actividad anterior.

Comprueba que las tres se cortan en un mismo punto llamado circuncentro.

Traza una circunferencia tomando como centro este punto y como radio la distancia a cualquiera de sus vértices. ¿Qué observas? (Se dice que la circunferencia esta circunscrita al triángulo)

ACTIVIDAD 10

Sabiendo que la mediana en un triángulo es la recta que pasa por el punto medio de un lado y el vértice opuesto, dibuja las tres medianas correspondientes al triángulo de la actividad 8.

Comprueba que las tres se cortan en un mismo punto llamado baricentro.

El baricentro es el centro de gravedad del triángulo. Lo puedes comprobar si haces lo siguiente:

- Dibuja un triángulo en cartón rígido.
- Dibuja las tres medianas y el baricentro.
- Practica un orificio en ese punto y suspende el triángulo mediante una cuerda anudada al extremo del triángulo.
- Compruebas que se mantiene paralelo al suelo. En cualquier otro punto se inclina.

ACTIVIDAD 11

Dibuja en una hoja de papel milimetrado un triángulo escaleno de 8, 6 y 4 cm. de lado.

- Traza las tres mediatrices y dibuja el circuncentro.
- Traza las tres medianas y dibuja el baricentro.
- Traza las tres alturas y dibuja el ortocentro.

¿Qué ocurre con los tres puntos que has dibujado? (Utiliza distintos colores para cada tipo de recta).

RESPUESTA: Los tres puntos notables se pueden unir por una línea recta.

ACTIVIDAD 12

Dibuja un triángulo acutángulo, uno obtusángulo y uno rectángulo. Dibuja el ortocentro en cada uno de ellos y observa su posición. Escribe las conclusiones a las que llegas.

RESPUESTA: En el triángulo acutángulo el ortocentro queda dentro del triángulo, en el obtusángulo queda fuera del triángulo y en el rectángulo coincide con el vértice del ángulo recto.

ACTIVIDAD 13

Sabiendo que la bisectriz en un triángulo es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales, dibuja las tres bisectrices de un triángulo de 4, 5 y 6 cm. de lado. Comprueba que las tres se cortan en un punto llamado incentro.

El incentro es el centro de una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo. Compruébalo dibujando la circunferencia inscrita en este triángulo.

ACTIVIDAD 14

Cerca de dos pueblos A y B pasa la vía del tren. Después de muchos años de intentarlo, consiguen que les construyan un apeadero para los dos pueblos. Deciden situarlo a igual distancia de los dos. Describe el método que utilizaran para localizar el punto en el que irá el apeadero. Haz un esquema gráfico del problema.

Se hace una perpendicular a la vía desde cada pueblo. Se mide la distancia y en el punto medio se construye la estación.

GEOMETRIA: POLIGONOS

Un polígono es cualquier superficie del plano limitada por una línea poligonal cerrada. Los elementos mas importantes de los polígonos son: lados, vértices, ángulos interiores, ángulos exteriores y diagonales.

Lado

Diagonal

Vértice

Interior Exterior

Un polígono de tres lados se llama triángulo, el de cuatro cuadrilátero y cuando tienen mas de cuatro lados el nombre esta formado por dos palabras de origen griego: una que indica el número de lados, penta-, hexa-, hepta-, etc. y la segunda, -gono, que significa ángulo; pentágono, hexágono, heptágono, etc.

• Polígonos cóncavos y convexos

Un polígono es convexo cuando todos los segmentos que se obtienen al unir dos puntos pertenecientes al mismo estén íntegramente en su interior. Es cóncavo cuando hay, al menos, dos puntos del polígono que determinan un segmento que tiene puntos en el exterior.

ACTIVIDAD 1

Demuestra que este polígono es cóncavo:

ACTIVIDAD 2

Dibuja un cuadrilátero convexo y otro cóncavo. No es obligatorio que todos los lados sean iguales.

ACTIVIDAD 3

Dibuja en tu cuaderno los siguientes polígonos:

- Un hexágono convexo c) Un pentágono cóncavo
- Un heptágono cóncavo d) Un decágono convexo

• *Diagonales de un polígono convexo*

Sabiendo que las diagonales de un polígono es cualquier segmento que une dos vértices no consecutivos del mismo, vamos a calcular cuantas diagonales tiene un polígono convexo con la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 4

Dados los siguientes polígonos convexos:

- Completa la siguiente tabla eligiendo un vértice cualquiera y dibujando las diagonales respecto de ese vértice.

POLIGONO	Nº LADOS	Nº DIAGONALES
Triángulo	3	0
Cuadrado	4	1
Pentágono	5	2
Hexágono	6	3

- ¿Puedes encontrar alguna relación entre ambos números?

Si, el nº de diagonales es el nº de lados menos 3.

- Podríamos pensar que una manera sencilla de calcular el número total de diagonales de un polígono seria multiplicar el número de vértices por el número de diagonales por vértice. Compruébalo dibujando todas las diagonales ¿Se corresponde lo dicho con lo que has dibujado? ¿Qué crees que ocurre?

Que se dibujan el doble de diagonales (la diagonal va y vuelve, sólo hay que contarla una vez)

- Si llamamos n al número de lados (igual al número de vértices), ¿podrías encontrar, con lo visto anteriormente, una formula que te permita calcular el número total de diagonales de cualquier polígono?

$$\text{Nº de diagonales} = (n \times (n - 3)) / 2$$

ACTIVIDAD 5

Con lo aprendido en la actividad anterior, calcula el número total de diagonales de los siguientes polígonos:

a) Dodecágono $\text{Nº de diagonales} = (n \times (n - 3)) / 2 = (12 \times (12 - 3)) / 2 = 54$

b) Eneágono $\text{Nº de diagonales} = (n \times (n - 3)) / 2 = (9 \times (9 - 3)) / 2 = 27$

c) Decágono $\text{Nº de diagonales} = (n \times (n - 3)) / 2 = (10 \times (10 - 3)) / 2 = 35$

ACTIVIDAD 6

¿Existe algún polígono que tenga mayor número de lados que de diagonales? ¿Y que tenga igual número de lados que de diagonales?

- Sí, el triángulo y el cuadrilátero.
- Si, el pentágono.

• *Ángulos de un polígono convexo*

Recuerda que los ángulos interiores son los formados por dos lados contiguos y los ángulos exteriores son los formados por un lado y la prolongación del lado contiguo.

ACTIVIDAD 7

¿Cuánto suman el ángulo interior y exterior de cualquier polígono?

Un ángulo llano (180°)

Interior

Exterior

ACTIVIDAD 8

Dados los siguientes polígonos convexos:

- Descompón en triángulos cada uno de ellos dibujando las diagonales que parten de un vértice cualquiera y anota el número de triángulos obtenidos en la siguiente tabla:

POLIGONO	Nº LADOS	Nº TRIÁNGULOS
Triángulo	3	1
Cuadrado	4	2
Pentágono	5	3
Hexágono	6	4

- ¿Puedes encontrar alguna relación entre estos dos números?

Si, el nº de triángulos es el número de lados menos 2.

- Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , ¿cómo podrías calcular la suma de los ángulos interiores de estos polígonos?

Suma de ángulos = nº de triángulo $\times 180^\circ$

- Si llamamos n al número de lados, ¿podrías encontrar, con lo visto anteriormente, una formula que te permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono?

Suma de ángulos interiores = $(n - 2) \times 180^\circ$

ACTIVIDAD 9

Con lo aprendido en la actividad anterior, calcula la suma de los ángulos interiores de los siguientes

polígonos:

a) Octógono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = (8 - 2) \times 180^\circ = 1080^\circ$

b) Eneágono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = (9 - 2) \times 180^\circ = 1620^\circ$

c) Decágono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = (10 - 2) \times 180^\circ = 1440^\circ$

ACTIVIDAD 10

La suma de los ángulos interiores de un polígono es 900° . ¿Cuántos lados tiene?

$$Sa = (n - 2) \times 180^\circ \quad 900^\circ / 180^\circ = n - 2 \quad n = 5 + 2 = 7 \text{ lados}$$

$$900^\circ = (n - 2) \times 180^\circ \quad 5 = n - 2 \quad n = 7 \text{ lados}$$

ACTIVIDAD 11

Calcula cuanto vale la suma de los ángulos exteriores de los siguientes polígonos convexos:

- Cuadrado $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = 360^\circ$; $360^\circ / 4 = 90^\circ$; $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$; $90^\circ \times 4 = 360^\circ$
- Hexágono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = 720^\circ$; $720^\circ / 6 = 120^\circ$; $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$; $60^\circ \times 6 = 360^\circ$
- Octógono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = 1080^\circ$; $1080^\circ / 8 = 135^\circ$; $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$; $45^\circ \times 8 = 360^\circ$

ACTIVIDAD 12

¿Es cierta la siguiente afirmación? : Un polígono convexo no puede tener mas de tres ángulos agudos.

Si, es verdad, no puede tener mas de tres ángulos agudos, porque seria un polígono cóncavo

ACTIVIDAD 13

Calcula el perímetro de estos polígonos:

6 m

3,5 m 4 m 4 m 4,5 m

4,5 m

5,5 m

TRIANGULO $3,5 + 4,5 + 4 = 12$ metros

CUADRILATERO $5,5 + 4,5 + 6 + 4 = 20$ metros

• *Polígonos regulares*

Antes de hacer las actividades, es conveniente que recuerdes que un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados y ángulos iguales. Además, los polígonos regulares tienen cuatro elementos notables:

- El centro, que es el punto interior en el polígono que esta a igual distancia de todos los vértices.

- La apotema, que es el segmento que une el centro con el punto medio de cualquiera de los lados. La apotema es siempre perpendicular al lado
- El radio, que es la distancia desde el centro a uno de los vértices.
- El ángulo central, que es el ángulo que forman dos radios consecutivos.

ACTIVIDAD 14

Dibuja los elementos notables en cada uno de estos polígonos regulares:

ACTIVIDAD 15

Ya conoces un procedimiento para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo, y además sabes que todos los ángulos interiores de un polígono regular son iguales. Aplícalo para calcular cuanto mide el ángulo interior de los siguientes polígonos regulares:

- Un triángulo equilátero $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = (3 - 2) \times 180^\circ = 180^\circ$; $180^\circ / 3 = 60^\circ$
- Un pentágono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = (5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$; $540^\circ / 5 = 108^\circ$
- Un octógono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = (8 - 2) \times 180^\circ = 1080^\circ$; $1080^\circ / 8 = 135^\circ$
- Un eneágono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = (9 - 2) \times 180^\circ = 1260^\circ$; $1260^\circ / 9 = 145^\circ$
- Un dodecágono $Sa = (n - 2) \times 180^\circ = (12 - 2) \times 180^\circ = 1800^\circ$; $1800^\circ / 12 = 150^\circ$

Según aumentan los lados, ¿aumentan también los ángulos interiores? Sí

Si tenemos un polígono regular de muchos, muchos lados, ¿cuánto valdrá, aproximadamente, su ángulo interior?

Se aproxima a un ángulo llano (180°)

ACTIVIDAD 16

- Cada ángulo interior de un polígono regular mide 140° . ¿Cuántos lados tiene?
- ¿Puede haber un polígono regular cuyo ángulo interior mida 72° ?
- $140 = ((n - 2) \times 180) / n$ b) $72 = ((n - 2) \times 180) / n$

$$140n = (n - 2) \times 180 \quad 72n = (n - 2) \times 180$$

$$140n = 180n - 360 \quad 72n = 180n - 360$$

$$40n = 360 \quad 108n = 360$$

$$n = 360 / 40 = 9 \quad n = 3,^{\wedge}3$$

$n = 9$ lados eneágono regular no existe

ACTIVIDAD 17

- ¿Cuánto vale el ángulo central de un hexágono regular?
- Calcula lo que vale el ángulo central de un pentágono regular y de un decágono regular
- 60° , porque forman 6 triángulos equiláteros.
- Aint 108° ; $108 / 2 = 54$; $54 \times 2 = 108$; $180 - 108 = 72^\circ$ es el ángulo central de un pentágono.

Aint 144° ; $144 / 2 = 72$; $72 \times 2 = 144$; $180 - 144 = 36^\circ$ es el ángulo central de un decágono.

ACTIVIDAD 18

¿Qué ángulo forma la apotema con su lado correspondiente en cualquier polígono regular?

Forma un ángulo rectángulo (90°).

ACTIVIDAD 19

Si un polígono regular tiene 35 diagonales, ¿de cuantos lados es el polígono? ¿Y si tiene 27 diagonales?.

$$N^{\circ}d = (n \times (n - 3)) / 2 \quad N^{\circ}d = (n \times (n - 3)) / 2$$

$$35 = (n \times (n - 3)) / 2 \quad 27 = (n \times (n - 3)) / 2$$

$$70 = n \times (n - 3) \quad 54 = n \times (n - 3)$$

$$70 = n^2 - 3n \quad 54 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0 \quad n^2 - 3n - 54 = 0$$

$$n = -7 \text{ y } n = 10 \quad n = -6 \text{ y } n = 9$$

Sólo valen los resultados que den soluciones positivas

Es un decágono regular Es un eneágono regular

• *Circunferencia y círculo*

Una circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos están a la misma distancia de un punto interior llamado centro.

Los elementos más notables de la circunferencia son:

- El radio, que es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia
- El diámetro, que es el segmento que, pasando por el centro, une dos puntos opuestos de la circunferencia
- Cuerda, que es el segmento que une dos puntos cualquiera de la circunferencia.
- Arco, que es la parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de la misma.

Un círculo es la porción de plano encerrada por una circunferencia. La circunferencia es, por lo tanto, una línea, mientras que el círculo es una superficie.

Los elementos notables del círculo son:

- Segmento circular, que es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco correspondiente
- Sector circular, que es la superficie de círculo comprendida entre dos radios y el arco que determinan.

ACTIVIDAD 20

Dibuja una circunferencia y traza sobre ella un radio, un diámetro, una cuerda y un arco.

ACTIVIDAD 21

Dibuja un círculo y traza sobre él un segmento circular y un sector circular.

ACTIVIDAD 22

Sabiendo que la longitud de la circunferencia es $l = 2\pi r$, siendo r el radio, y como una circunferencia completa un arco de 360° , calcula la longitud de los siguientes arcos de una circunferencia de 6 cm de radio:

- 90°

$$l = (2\pi r \times 90) / 360 = (2\pi \times 6) / 4 = 3\pi \text{ cm.}$$

- 30°

$$l = (2\pi r \times 30) / 360 = (2\pi \times 6) / 12 = \pi \text{ cm.}$$

- 60°

$$l = (2\pi r \times 60) / 360 = (2\pi \times 6) / 6 = 2\pi \text{ cm.}$$

- 45°

$$l = (2\pi r \times 45) / 360 = (2\pi \times 6) / 8 = 3\pi/2 \text{ cm.}$$

ACTIVIDAD 23

Las ruedas de un coche tienen 70 cm de diámetro. Calcula cuantas vueltas dan en un viaje de 80 Km de distancia.

$$D = 70 \text{ cm} \Rightarrow r = 35 \text{ cm.}$$

$$L = 2\pi r = 2\pi \times 35 = 219,91 \text{ cm}$$

$$80 \text{ Km} \times 100000 = 8000000 \text{ cm}$$

$$8000000 / 219,91 = 36378,5 \text{ vueltas}$$

ACTIVIDAD 24

Un arco de una circunferencia de 10 metros de radio tiene una longitud de 25 m. ¿Qué amplitud tiene?

$$L = (2\pi r) \times n / 360$$

$$25 = (2\pi \times 10) \times n / 360$$

$$n = 450 / \pi = 143,23^\circ$$

ACTIVIDAD 25

¿Sabes porque las alcantarillas son circulares? Porque la circunferencia tiene anchura rígida. Es decir, las bocas de las alcantarillas tienen un diámetro ligeramente inferior al de la tapa que hace que por mucho que cambiemos de posición la tapa, esta nunca se cuele.

Con cualquier otro polígono no ocurre lo mismo. Piensa en una puerta: el marco tiene forma rectangular y por él podemos meter muchos objetos de muy distintas formas, incluso la propia puerta desmontada, girándola convenientemente.

Gires como gires nunca entra por el agujero, porque sus diagonales (diámetros) son constantes.

Todas son iguales No son iguales.

25 m

10 m