

DUALIDAD.

Cuando tenemos un PL asociado con otro PL esto se llama obtener el dual de un problema. Nuestro primer PL se conoce como primal. Si el primal es un problema de maximizar el dual será uno de minimización y viceversa. Para nuestra conveniencia las variables para maximizar son $z, x_1, x_2, \dots, x_n$, y para minimizar las variables son $w, y_1, y_2, \dots, y_m$.

Para obtener el dual de un problema de max, se requiere que todas las variables sean no negativas y que todas las restricciones sean de $\leq$ (problema de max normal).

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \\ \text{s.a. } a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m &\leq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m &\leq b_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_n \\ x_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

El dual de un problema de max normal como el anterior se define como:

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\ \text{s.a. } a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m &\geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m &\geq c_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_n &\geq c_n \\ y_i &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

Esto es cambiar de max a min y cambiar todas las X por Y y la Z por W.

OBTENER EL DUAL DE UN PROBLEMA MAX O MIN NORMAL.

Si el primal es un problema de max normal se podrá encontrar utilizando la tabla horizontalmente; el dual se obtendrá utilizando la tabla verticalmente.

Si el primal es un problema de min normal, se podrá obtener utilizando la tabla verticalmente; el dual se obtendrá utilizando la misma tabla horizontalmente.

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= 50y_1 + 20y_2 + 30y_3 + 80y_4 \\ \text{s.a. } 400y_1 + 200y_2 + 150y_3 + 500y_4 &\geq 500 \\ 3y_1 + 2y_2 &\geq 6 \\ 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 &\geq 10 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 + 5y_4 &\geq 8 \\ y_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Como el primal es un problema de min normal, podemos encontrarlo verticalmente en la tabla de abajo, y su dual horizontalmente en la misma tabla.

$$\text{Max } z = 500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4$$

$$\text{s.a. } 400x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 50$$

$$200x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 20$$

$$150x_1 + 4x_3 + x_4 \leq 30$$

$$500x_1 + 4x_3 + 5x_4 \leq 80$$

$$x_i \geq 0$$

Min w	=	50y ₁	+	20y ₂	+	30y ₃	+	80y ₄	
s.a		400y ₁	+	200y ₂	+	150y ₃	+	500y ₄	>= 500
		3y ₁	+	2y ₂					>= 6
		2y ₁	+	2y ₂	+	4y ₃	+	4y ₄	>= 10
		2y ₁	+	4y ₂	+	Y ₃	+	5y ₄	>= 8
							xi		>= 0

Min w	=	500x ₁	+	6x ₂	+	10x ₃	+	8x ₄	
s.a		400x ₁	+	3x ₂	+	2x ₃	+	2x ₄	>= 50
		200x ₁	+	2x ₂	+	2x ₃	+	4x ₄	>= 20
		150x ₁	+		+	4x ₃	+	X ₄	>= 30
		500x ₁	+		+	4x ₃	+	5x ₄	>= 80
							xi		>= 0
Min w		x ₁ >=0		x ₂ >=0		x ₃ >=0		x ₄ >=0	
		X ₁		X ₂		X ₃		X ₄	
Y ₁ >=0	Y ₁	400		3		2		2	50
Y ₂ >=0	Y ₂	200		2		2		4	20
Y ₃ >=0	Y ₃	150		0		4		1	30
Y ₄ >=0	Y ₄	500		0		4		5	80
		>=500		>=6		>=10		>=8	

$$\text{min } w (x_1 \geq 0) (x_2 \geq 0) (x_3 \geq 0) (x_4 \geq 0)$$

$$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4$$

$$(y_1 \geq 0) \ y_1 \ 400 \ 3 \ 2 \ 2 \ \leq 50$$

$$(y_2 \geq 0) \ y_2 \ 200 \ 2 \ 2 \ 4 \ \leq 20$$

$$(y_3 \geq 0) \ y_3 \ 150 \ 0 \ 4 \ 1 \ \leq 30$$

$$(y_4 \geq 0) \ y_4 \ 500 \ 0 \ 4 \ 5 \ \leq 80$$

$$\geq 500 \ \geq 6 \ \geq 10 \ \geq 8$$

OBTENER EL DUAL DE UN PROBLEMA NO NORMAL.

Un problema no normal es aquel que tiene dos tipos de restricciones ($\geq$ y $\leq$), y/o una igualdad, y/o una

variable sin restricción de signo por ejemplo:

$$\text{Max} = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 = 2$$

$$2x_1 - x_2 \Rightarrow 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \Rightarrow 0, x_2 \text{ srs}$$

PASOS PARA CONVERTIR UN PROBLEMA DE MAX NO NORMAL EN UN NORMAL:

1. Multiplique cada restricción $\Rightarrow$ por 1. Esto convertirá cada restricción $\Rightarrow$ en una restricción $\leq$. Por

ejemplo: $2x_1 + x_2 \leq -3$

2. Reemplace cada restricción en forma de igualdad por dos restricciones en forma de desigualdad. Después convierta la restricción $\Rightarrow$ en una restricción $\leq$.

$$x_1 + x_2 \Rightarrow 2 \quad x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 - x_2 \leq -2 \quad -x_1 - x_2 \leq -2$$

3. Cambie cada variable x_i srs, por $x_i = x'_i + x''_i$, en donde $x'_i \Rightarrow 0$ y $x''_i \Rightarrow 0$.

$$x \Rightarrow 2 \quad x''_2$$

Entonces nuestro PL se convierte en :

$$\text{Max} = 2x_1 + x'_2 + x''_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + x'_2 + x''_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x'_2 + x''_2 \leq -2$$

$$-2x_1 + x'_2 + x''_2 \leq -3$$

$$x_1 + x'_2 + x''_2 \leq 1$$

$$x_1, x'_2, x''_2 \Rightarrow 0$$

PASOS PARA CONVERTIR UN PROBLEMA DE MIN NO NORMAL EN UN NORMAL:

1. Convertir cada restricción $\leq$ en una restricción $\Rightarrow$ multiplicando cada restricción $\leq$ por -1 .

2. Reemplace cada restricción en forma de igualdad por una restricción $\leq$ y una restricción $\Rightarrow$. Luego transforme la restricción $\leq$ en una restricción $\Rightarrow$.

3. Cambie cada variable y_i srs, por $y_i = y'_i + y''_i$, donde $y'_i \Rightarrow 0$, $y''_i \Rightarrow 0$.

OBTENER EL DUAL DE UN PROBLEMA MAX NO NORMAL:

Una vez que llenamos la tabla de tal manera que el primal se pueda encontrar horizontalmente, tenemos que realizar algunos cambios para poder obtener el dual verticalmente:

a) Si la i -ésima restricción del primal es una restricción $\Rightarrow$, la variable correspondiente del dual y_i tendrá que satisfacer $y_i \leq 0$.

b) Si la i -ésima restricción del primal es una restricción en forma de igualdad, la variable dual y_i ahora será sin restricción de signo.

c) Si la i -ésima variable del primal es srs, la i -ésima restricción del dual será una restricción en forma de igualdad.

$$\text{min } w \quad (x_1 \Rightarrow 0) \quad x_2 \text{ srs}^*$$

$$x_1 \quad x_2$$

$y_1 \geq 1$
 $y_2 \geq -1$
 $y_3 \geq 0$
 $y_3 \leq 1$
 $y_1 \geq 2$

Min w	$x_1 \geq 0$	x_2 , SRS*	
	X1	X2	
Y1	1	1	2*
Y2	2	-1	≥ 3 *
(Y3 ≥ 0)	Y3	-1	≤ 1
	Y4	≥ 2	1

En la tabla anterior se indica con un asterisco los lugares donde hay que aplicar las reglas para determinar parte del dual.

min w ($x_1 \geq 0$) x_2 srs
 $x_1 \geq 0$
 y_1 srs $y_1 \geq 1$
 $y_2 \leq 0$ $y_2 \geq -1$
 $y_3 \geq 0$ $y_3 \leq 1$
 $y_1 \geq 2$

Min w	$x_1 \geq 0$	x_2 , SRS	
	X1	X2	
Y1 srs	Y1	1	2
(Y2 ≤ 0)	Y2	-1	≥ 3
(Y3 ≥ 0)	Y3	-1	≤ 1
	≥ 2	1	

El dual queda así:

Min z = $2y_1 + 3y_2$
 s.a. $y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$
 $y_1 \geq 0$; $y_2 - y_3 = 1$
 y_1 srs, $y_2 \leq 0$, $y_3 \geq 0$

OBTENER EL DUAL DE UN PROBLEMA MIN NO NORMAL:

Una vez que escribimos la tabla de tal forma que el primal se pueda encontrar verticalmente, ahora se obtendrá el dual horizontalmente y se tendrán que hacer algunos cambios:

- Si la i -ésima restricción del primal es una restricción $\leq$, la variable dual correspondiente x_i tendrá que satisfacer $x_i \leq 0$.
- Si la i -ésima restricción del primal es una restricción en forma de igualdad, la variable dual correspondiente x_i será srs.
- Si la i -ésima variable del primal y_i es srs, la i -ésima restricción del dual será una restricción en forma de igualdad.