

ELIPSE

Name=1; HotwordStyle=BookDefault; Se llama *elipse* al lugar geométrico de los puntos tales que **la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante.**

La línea que une los dos focos se llama **eje principal** de la elipse A A' y la mediatriz de los mismos **eje secundario P P'**.

Se llaman **vértices** de la elipse a los puntos donde ésta corta a sus ejes A ,A',B,B'

El punto medio de los dos focos se llama *centro* de la elipse y la distancia entre ellos se llama **distancia focal** .

Generalmente **el eje principal se representa por 2a y la distancia focal por 2c**. Los valores *a* y *c* se llaman *semieje principal* y *semidistancia focal* , respectivamente.

Cálculo del eje secundario

Name=2; HotwordStyle=BookDefault; Llamando *2b* al eje secundario, *P* al vértice superior, *O* al centro y *F* y *F'* a los focos de la elipse, por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{PF} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Por definición de elipse,

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

$$\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2a \Rightarrow 2\sqrt{b^2 + c^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2 + c^2} = a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

A la distancia b se le llama *semieje secundario*.

Radio vector

Las distancias desde un punto de la elipse hasta cada uno de los focos se llaman *radios vectores* correspondientes a dicho punto.

Ecuación canónica de la elipse

La ecuación de una elipse centrada en el origen y con focos en $F(c, 0)$ y $F''(-c, 0)$ es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vértices de una elipse referida a sus ejes

Los vértices de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ son los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$,

$(0, b)$ y $(0, -b)$.

• Eje principal:

El eje principal es el eje de abscisas, es decir $y = 0$. Para hallar su intersección con la elipse se resuelve el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$$

Los vértices son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$

o Eje secundario:

Se resuelve el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b$$

Los otros dos vértices son $(0, b)$ y $(0, -b)$

Reducción de la ecuación de una elipse

Dada una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, ésta puede transformarse

en otra del tipo
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1,$$

por el método que se verá en los ejercicios de aplicación. Dicha ecuación se llama *ecuación reducida* de la elipse.

Si el segundo miembro fuese 1, se tendría una elipse centrada en (x_0, y_0) . Los ejes

de la elipse son las rectas $x = x_0$ e $y = y_0$. Los vértices son $(x_0 \pm a, y_0)$ y $(x_0, y_0 \pm b)$.

En otro caso, como una suma de cuadrados es siempre positiva, se tendría que ningún punto la verifica y se habla de una elipse imaginaria.

¿ Centro de la elipse: $(1, -1)$

¿ Focos: Para hallar los focos hay que observar que éstos se hallan en una recta horizontal que contiene al centro y a distancia c del mismo. Basta pues con sumar y restar c a la abscisa del centro.

¿ Los vértices se obtienen sumando y restando a las coordenadas del centro los semiejes de la elipse:

Interseccion de conicas

Los puntos de interseccion se obtienen resolviendo el sistema.

HIPÉRBOLA

Name=1; HotwordStyle=BookDefault; Se llama *hipérbola* al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus **distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante (se representa por $2a$)**.

La recta que une los dos focos se llama eje real de la hipérbola $F F'$ y la mediatriz se llama eje imaginario de la hipérbola.

El punto donde se cortan ambos ejes (que es, evidentemente, el punto medio de los focos) se llama centro de la hipérbola.

Los puntos donde la hipérbola corta a los ejes (se verá que únicamente corta al eje real) se llaman *vértices* de la hipérbola.

Al igual que en la elipse, se llama **distancia focal** ($FF' = 2c$) a la distancia entre los dos focos y a las distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola a ambos focos se les llama *radios vectores* del punto.

A diferencia de la elipse, aquí se tiene $2c > 2a$ (por tanto $c > a$) y se puede

considerar

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

. Este valor se llama *semieje imaginario de la hipérbola*.

El cociente $e = \frac{c}{a}$ que es un número mayor que 1, se llama *excentricidad de la*

hipérbola.

Al igual que en la elipse, se considerarán en primer lugar las hipérbolas centradas en el origen de coordenadas y con focos en el eje de abscisas.

Cálculo de los radios vectores de un punto

En un punto $P(x, y)$ de una hipérbola con focos en los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ los radios vectores son:

$$\overline{PF} = |ex - a| \text{ y } \overline{PF} = |ex + a|$$

Demostración:

Name=2; HotwordStyle=BookDefault;

Los radios vectores son:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \text{ y}$$

$$\overline{PF} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Por definición de hipérbola, $\overline{PF} - \overline{PF} = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \text{ Elevando al cuadrado:}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Eliminando los términos comunes:

$$2cx = 4a^2 - 2cx + 4a \cdot$$



Despejando:

$$4a \cdot$$



$$= 2cx - 4a^2 + 2cx = 4cx - 4a^2, \text{ luego}$$

$$\overline{PF} = \frac{4cx - 4a^2}{4a} = \frac{cx - a^2}{a} = \frac{cx}{a} - \frac{a^2}{a} = ex - a$$

PF

' =

PF

$$+ 2a = ex - a + 2a = ex + a$$

Nótese que se ha utilizado que la distancia



' es mayor que



, lo cual sólo es cierto en el semiplano de la derecha. Si se hubiese tomado un punto del semiplano de la izquierda y se hubiese operado, el resultado hubiera sido similar, pero cambiando los signos. Es por eso que en el enunciado se tomó valor absoluto en los segundos miembros.

Ecuación canónica de la hipérbola

La ecuación de una hipérbola con focos en los puntos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vértices de una hipérbola

Los vértices de una hipérbola son los puntos donde ésta corta a sus ejes.

Considerando la hipérbola de ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sus ejes son los

ejes de coordenadas, cuyas ecuaciones respectivas son $y = 0$ y $x = 0$.

• Eje real

Su ecuación es $y = 0$.

Sustituyendo en la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a.$$

Los vértices son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$

o Eje imaginario

La ecuación del eje es $x = 0$.

Al sustituir queda:

$$\frac{-y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow -y^2 = b^2$$

Esta ecuación no tiene solución, ya que el primer miembro es siempre negativo y el segundo es positivo.

Así pues, la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene únicamente dos vértices, que son los

puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$.

Si se tratara de la hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, los vértices son los puntos $(0, a)$ y $(0, -a)$.

Asíntotas de una hipérbola

Si en la ecuación de la hipérbola se despeja y , resulta:

$$\frac{\frac{x^2}{a^2} - 1}{\frac{x^2}{a^2} + 1} = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} + 1$$

Pero, para valores grandes de x ,

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

se aproxima a x , siempre que a sea un número fijo. En efecto:

Name=3; HotwordStyle=BookDefault;

$$\sqrt{x^2 - a^2} - x = \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} =$$

$$= \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$$

Al hacer x suficientemente grande, el denominador aumenta indefinidamente, mientras que el numerador permanece invariable. Así la diferencia se hace tan pequeña como se quiera al crecer x .

Por tanto, la hipérbola se aproxima indefinidamente a las rectas $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Estas rectas se llaman *asíntotas de la hipérbola*.

Hipérbola con ejes paralelos a los ejes de coordenadas

Name=4; HotwordStyle=BookDefault; Si se tiene una hipérbola con centro en un punto (x_0, y_0) ,

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \text{ si el eje real es horizontal y en el caso de tener el eje real}$$

vertical será

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Los focos serán, si el eje real es horizontal $(x_0 \pm c, y_0)$ y $(x_0, y_0 \pm c)$ si es vertical.

De la misma forma los vértices son

$(x_0 \pm a, y_0)$ ó $(x_0, y_0 \pm a)$

según que el eje real sea horizontal o vertical, respectivamente.

Para hallar las asíntotas, se sustituye 1 por 0 en el segundo miembro y se extrae la raíz cuadrada.

PARÁBOLA

Name=1; HotwordStyle=BookDefault; Se llama *parábola* al lugar geométrico de los puntos del plano **que equidistan de un punto fijo, llamado *foco*, y de una recta fija llamada *directriz*.**

La distancia entre el foco y la directriz de una parábola recibe el nombre de *parámetro de la parábola* (suele denotarse por p).

Dada una parábola, se llama *eje* de la misma la recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz.

Se llama *vértice* de la parábola al punto donde ésta corta a su eje.

Para simplificar la parábola, se supondrá que el vértice es el origen de coordenadas y que el foco se encuentra en el semieje positivo de abscisas.

Ecuación canónica de la parábola

La ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco en el

punto $A\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ es

$$y = 2px$$

Demostración:

Name=2; HotwordStyle=BookDefault;

La directriz es una recta vertical de ecuación $x = \frac{p}{2}$, o sea $x - \frac{p}{2} = 0$.

Dado un punto $P(x, y)$ del plano, su distancia al foco es $d(F, P) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$.

La distancia a la directriz es $d(P, d) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$.

La condición para que el punto esté en la parábola es que ambas coincidan:

Name=3; HotwordStyle=BookDefault;

$$\sqrt{\left(x - \frac{\rho}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{\rho}{2}\right|$$

Elevando al cuadrado:

$$\left(x - \frac{\rho}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{\rho}{2}\right)^2$$

$$x^2 - \rho x + \frac{\rho^2}{4} + y^2 = x^2 + \rho x + \frac{\rho^2}{4}$$

$$-px + y^2 = px \text{ ó } y^2 = 2px$$

Hay otros tres casos elementales de parábolas:

Name=3; HotwordStyle=BookDefault;

• Si el eje es horizontal y el foco está en el semieje negativo de abscisas, la ecuación es $y^2 = -2px$.

• Si el eje es vertical y el foco está en el semieje positivo de ordenadas, la ecuación es $x^2 = 2py$.

• Si el eje es vertical y el foco está en el semieje negativo de ordenadas, la ecuación es $x^2 = -2py$.

Parábola con vértice en un punto cualquiera

Si el vértice de una parábola se encuentra en un punto (x_0, y_0) su ecuación será, según los casos:

Name=4; HotwordStyle=BookDefault;

• Eje horizontal y foco a la derecha: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

• Eje horizontal y foco a la izquierda: $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$

• Eje vertical y foco por encima: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$

• Eje vertical y foco por debajo: $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$

Intersecciones de una cónica con una recta

Name=7; HotwordStyle=BookDefault; Para calcular la intersección de una cónica con una recta se ha de resolver un sistema de ecuaciones, que dará lugar a una ecuación de segundo grado ($ax^2 + bx + c = 0$). Al resolver esta ecuación, se obtienen resultados distintos dependiendo del valor que tome el discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$):

• Si el discriminante es negativo ($b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales; sus dos soluciones son números complejos conjugados), el sistema no tiene solución. La recta no corta a la cónica y se dice que es *exterior* a ella.

• Si el discriminante es nulo ($b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales), la recta corta a la cónica en un solo punto. En este caso se dice que la recta es *tangente* a la cónica.

• Si el discriminante es positivo ($b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas), la recta tiene dos puntos comunes con la cónica. Entonces se dice que la recta es *secante* a la cónica.

CIRCUNFERENCIA (I)

Una *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia fija llamada *radio*, de un punto dado, llamado *centro*.

Ecuación de la circunferencia

Name=1; HotwordStyle=BookDefault; Considérese la circunferencia centrada en $O(a, b)$ y de radio r . La condición para que un punto $X(x, y)$ se encuentre en la misma es:

$d(X, O) = r$, es decir:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ Desarrollando los cuadrados se tiene:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Llamando $A = -2a$, $B = -2b$ y $C = a^2 + b^2 - r^2$, se tiene:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Determinación de la circunferencia

Se necesita para su determinación:

- Las coordenadas del centro $C(a, b)$ y el radio.
- Se dan tres puntos no alineados por los que pasa una circunferencia. Tenemos un sistema con tres ecuaciones.
- Dar dos puntos de la circunferencia, en este caso puede haber dos soluciones, una y no haber.

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Considérese una circunferencia cualquiera y un punto P del plano. Desde el punto P se trazan dos secantes a la circunferencia, obteniéndose los puntos A, A', B y B' .

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

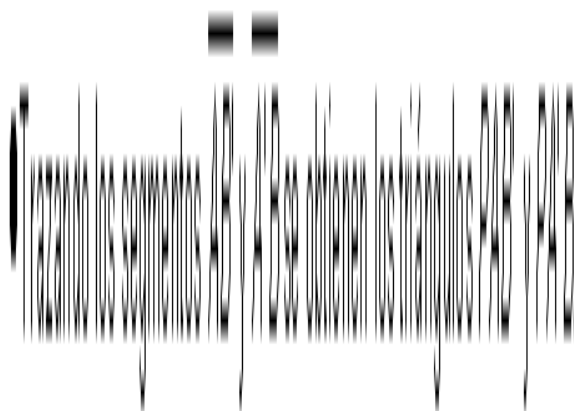
El valor común

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

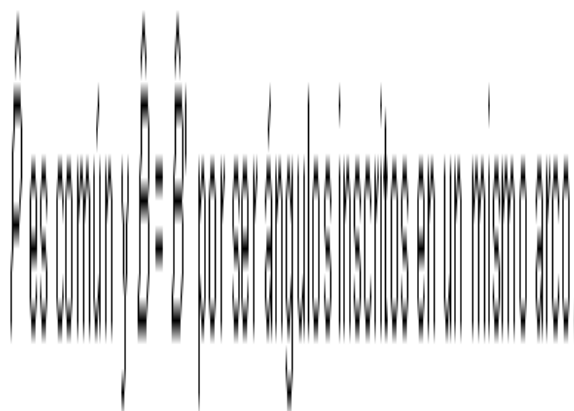
recibe el nombre de *potencia del punto P respecto de la circunferencia* dada.

Demostración:

Name=6; HotwordStyle=BookDefault;



Estos dos triángulos son semejantes porque tienen dos ángulos iguales: el ángulo



o Aplicando la proporcionalidad de los lados homólogos en los triángulos semejantes, se tiene:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PB'}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

Cálculo de la potencia de un punto respecto de una circunferencia

La potencia de un punto P respecto de una circunferencia es igual al cuadrado de la distancia del punto al centro de la circunferencia, d^2 , menos el cuadrado del radio de la circunferencia:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2$$

Expresión analítica de la potencia de un punto respecto de una circunferencia

La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$; el primer miembro se obtuvo elevando al cuadrado la distancia de un punto al centro de la circunferencia y restando el cuadrado del radio, es decir, hallando la potencia del punto respecto de la circunferencia.

Así pues, para calcular la potencia de un punto respecto de una circunferencia, basta con sustituir las coordenadas del punto en el primer miembro de la ecuación de la circunferencia.

Longitud del segmento tangente desde un punto exterior

Sea C una circunferencia, P un punto exterior a ella, r la recta tangente a C desde P y A el punto de tangencia.

La longitud del segmento



es la raíz cuadrada de la potencia de P respecto a la circunferencia.

Eje radical

Name=9; HotwordStyle=BookDefault; Se llama *eje radical de dos circunferencias* al lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas.

El eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular a la recta que une sus centros.

Cálculo analítico del eje radical de dos circunferencias

Su eje radical es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de ambas. Dichas potencias son:

La ecuación del lugar geométrico es:

$$x^2 + y^2 = Ax + By + C = x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' \quad \text{ó}$$

$$\text{ó } (A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0$$

Centro radical de tres circunferencias

Name=10; HotwordStyle=BookDefault; Se llama *centro radical* de tres circunferencias, cuyos centros no estén alineados, al punto que tiene la misma potencia respecto de las tres.

Como los centros no están alineados, si se consideran dos de los ejes radicales, éstos no serán paralelos y tendrán un único punto de intersección. Dicho punto es el centro radical de las tres circunferencias.

Construcción gráfica del eje radical de dos circunferencias

Name=11; HotwordStyle=BookDefault; Se consideran dos casos:

a) Las circunferencias se cortan en dos puntos. El eje radical es la recta que contiene a los dos puntos de intersección.

b) Las circunferencias no son secantes.

Se dibuja una circunferencia secante a ambas, de forma que su centro no esté alineado con el de éstas.

Se trazan los ejes radicales de esta nueva circunferencia con cada una de las iniciales; éstos se cortan en un punto C , centro radical de las tres circunferencias, que ha de estar en el eje radical buscado.

El eje radical es la recta perpendicular a la recta $O'O$, trazada desde C .

Intersecciones de rectas y circunferencias

Conocidas las ecuaciones de una recta y una circunferencia, calcular sus puntos de intersección consiste en plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

Las soluciones van a verificar al sistema y pueden tener:

- Dos soluciones **Secantes**
- Una **Tangentes**
- Ninguna **Exteriores**

Según el signo del discriminante $b^2 - 4ac$

$$b^2 - 4ac > 0 \quad b^2 - 4ac = 0 \quad b^2 - 4ac < 0$$

Secantes Tangentes Exteriores

El problema se resuelve de forma análoga si se pretende conocer la intersección de dos circunferencias.

R