

Hallar el ecuación reducida de la elipse sabiendo que tiene por focos:

- **F(2,0) , F' (-2,0) y suma de distancias 5**

Calculamos los parámetros de la elipse:

2a = 5, d donde a es igual a 2,5, y de aquí $a^2 = 6,25$

$$c = 2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6,25 - 4 = 2,25$$

Por lo tanto, la ecuación reducida es: $\frac{x^2}{6,25} + \frac{y^2}{2,25} = 1$

- **F(0,2) F'(0,-2) y suma de distancias 5**

Calculamos los parámetros de la elipse:

2a = 5, d donde a es igual a 2,5, y de aquí $a^2 = 6,25$

$$c = 2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6,25 - 4 = 2,25$$

Por lo tanto, la ecuación reducida es: $\frac{x^2}{6,25} + \frac{y^2}{2,25} = 1$

Halla la ecuación reducida de la elipse conociendo:

- **a(10,0) a'(-10,0) y la excentricidad es E(0,2)**

Calculamos los parámetros de la elipse:

a = 10 de donde $a^2 = 100$

$$0,2 = \frac{c}{10}$$

de donde $c = 2$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 4 = 96$$

Por lo tanto la ecuación reducida es : $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{96} = 1$

- **B (0,4) B'(0, -4) y excentricidad e = (0,5)**

Calculamos los parámetros de la elipse:

$b = 4$ de donde $b^2 = 16$

$$0,5 = \frac{c}{a}$$

de donde $c = 0,5 a$

$$16 = a^2 - 0,25 a^2 = 0,75 a^2$$

$$a^2 = 64 / 3$$

Por lo tanto la ecuación reducida es : $\frac{3x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$

Hallar la ecuación de la elipse conociendo 2 puntos

• $C(0,0)$ $F(0,2)$ $a = 4$

Calculamos los parámetros de la elipse:

$a = 4$ de donde $a^2 = 16$

$c = 2$ de donde $c^2 = 4$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$$

La ecuación reducida de la elipse vertical es $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

• $C(0,0)$ $F(-3,0)$ $a = 5$

Calculamos los parámetros de la elipse

$a = 5$ de donde $a^2 = 25$

$c = 3$ de donde $c^2 = 9$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$

La ecuación reducida de la elipse es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

• $C(0,2)$ $F(0,0)$ $a = 3$

El centro C es el punto medio del segmento que determinan los focos, luego las coordenadas del F' son $(0,4)$

Aplicando la definición de elipse tenemos :

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 6$$

Desarrollando y racionalizando se obtiene $9x^2 + 5y^2 - 20y - 25 = 0$

• $C(-3,0)$ $F(-3,-2)$ $a = 4$

El centro C es el punto medio del segmento que determina los focos, luego las coordenadas del $F'(-3,2)$

Aplicando la definición de elipse, tenemos

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = 8$$

Desarrollando obtenemos $25x^2 + 192y^2 + 1537x + 208y + 727 = 0$

• $C(2,2)$ $F(-1,2)$ $a = \sqrt{10}$

El centro C es el punto medio del segmento que determina los focos, luego las coordenadas del $F'(5,2)$

Aplicando la definición de elipse, tenemos

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{10}$$

Desarrollando obtenemos $x^2 + 10y^2 - 4x - 40y + 34 = 0$

También podemos hacerlo trasladando los ejes. Los parámetros son:

$$A^2 = 10$$

$$C^2 = 9$$

De donde $B = 1$

$$\text{Por tanto: } \frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

Si reducimos a común denominador y efectuamos las operaciones coinciden con la ecuación de arriba.

Hallar la ecuación reducida de la elipse que tiene :

• **un vértice en $a(6,0)$ y su distancia focal es 10**

Calculamos los parámetros de la elipse

$$a = 6 \text{ de donde } a^2 = 36$$

$$c = 5 \text{ de donde } c^2 = 25$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 25 = 11$$

La ecuación reducida es $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$

- **Un vértice en B (0,4) y su distancia focal es 10**

Calculamos los parámetros de la elipse

b = 4 de donde $b^2 = 16$

c = 5 de donde $c^2 = 25$

$a^2 + b^2 + c^2 = 16 + 25 = 41$

La ecuación reducida es $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$

El problema n° 20 se hace por derivadas.

Hallar los semiejes, semidistancia focal y excentricidad de la elipse cuya ecuación es :

- **$x^2 + y^2 = 9$**

Esta ecuación podemos escribirla de forma reducida $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$

Por lo tanto $a^2 = b^2 = 9$

Luego a y b es $= \sqrt{9}$
 $= 3$

$a^2 = b^2 + c^2$

$9 = 9 + c^2$

Luego $c = 0$

Si c es 0 su excentricidad es 0

Por lo tanto es una circunferencia

- **$16x^2 + 9y^2 = 144$**

Seguimos los mismos pasos de la anterior

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Es una elipse vertical, por tanto :

$b^2 = 16$ luego $b = \sqrt{16}$

$$= 4$$

$$a^2 = 9 \text{ luego } a = \sqrt{9} \\ = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$9 = 16 + c^2$$

$$c^2 = 7$$

$$c = \sqrt{7}$$

$$\text{Como la excentricidad es } c/a \text{ esto es } = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Hallar la ecuación reducida de la hipérbola sabiendo que tiene por focos:

- F (3,0) F'(-3,0) y diferencia de distancias 4

Calculamos por parámetros de la hipérbola: $2a = 4$

$$a = 2$$

$$a^2 = 4$$

$$c = 3$$

$$c^2 = 9$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\text{Ecuación reducida } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

B) F (0,6) F'(0,-6) y diferencia de distancias 2

$$2a = 2$$

$$a^2 = 1$$

$$c = 6$$

$$c^2 = 36$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 1 = 35$$

$$\text{Ecuación reducida } \frac{x^2}{35} - \frac{y^2}{1} = 1$$

Hallar la ecuación de la hipérbola sabiendo que tiene por focos

- **F (1,3) F'(4,2) y diferencia de distancias 6**

Aplicando la definición e la hipérbola

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 6$$

Desarrollando resulta $27x^2 + 35y^2 + 6xy - 150x - 190y + 191 = 0$

- **F (0,0) F'(0,8) y diferencia de distancias 6**

Aplicando la definición e la hipérbola

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-8)^2} = 6$$

Desarrollando resulta $9x^2 + 7y^2 + 56y - 49 = 0$

Hallar la ecuación reducida de la hipérbola sabiendo q tiene por vértices :

- **a (10,0) a'(-10,0) e = 2**

Calculamos por parámetros de la hipérbola: $a = 10$

$$a^2 = 100$$

$$2 = \frac{c}{10}$$

$$c = 20$$

$$c^2 = 400$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 400 - 100 = 300$$

$$\text{Ecuación reducida } \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{300} = 1$$

- **B (0,4) B'(0,-4) e = 2**

Calculamos los parámetros de la hipérbola:

$$b = 4$$

$$b^2 = 16$$

$$2 = \frac{c}{a}$$

$$c = a$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

Sustituyendo nos queda $a^2 = 16 / 3$

$$\text{Ecuación reducida } \frac{3x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Hallar la ecuación reducida de la hipérbola sabiendo que:

- **Semieje mayor es 3 y la semidistancia focal 5**

Calculamos los parámetros de la hipérbola:

$$a = 3$$

$$a^2 = 9$$

$$c = 5$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\text{Ecuación reducida } \frac{3x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

- **El semieje menor es 6 y la semidistancia focal es 10**

Los parámetros de la hipérbola son;

$$b = 6$$

$$b^2 = 36$$

$$c = 10$$

$$a^2 = b^2 - c^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\text{La ecuación reducida es : } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

Hallar la ecuación de la tangente y la normal a :

- **$36x^2 - 12y^2 = 216$ en el punto P (3, -3)**

Se hace por derivadas

Hallar los semiejes, semidistancia focal y excentricidad de la hipérbola cuya ecuación es :

- **$x^2 - y^2 = 9$**

La ecuación la podemos escribir en la forma reducida $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

:

Por tanto $a^2 = b^2 = 9$, luego a y b es la raíz cuadrada de 9 es decir $a = b = 3$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ sustituimos y tenemos $9 + 9 = 18$ luego $c = \sqrt{18}$
 $= 3\sqrt{2}$

$$E = c / a = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

$$\bullet 16x^2 - 9y^2 = 144$$

La ecuación la podemos escribir en la forma reducida $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

:

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$b^2 = 16$$

$$b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$$

$$c = 5$$

$$E = c / a = \frac{5}{3}$$

Calcular los parámetros y vértices de las siguientes hipérbolas equiláteras

$$\bullet xy = 2$$

La ecuación de la hipérbola referida a sus asintotas es $xy = a^2 / 2$

a partir de la definición de hipérbola obtenemos:

$$\text{Parámetros } a^2 = 2xy$$

$$a = B$$

$$C = a\sqrt{2}$$

$$\text{Focos } F'(-2, -2) \quad F(2, 2)$$

Vértices A ($\sqrt{2}$,
 $\sqrt{2}$,
) A' ($-\sqrt{2}$,
 $-\sqrt{2}$,
)

B ($-\sqrt{2}$,
 $\sqrt{2}$,
) B' ($\sqrt{2}$,
 $-\sqrt{2}$,
))

- $xy = 8$

Parámetros $a^2 = 2xy = 16$

$a = b = 4$

$c = 4\sqrt{2}$

Focos F' ($-4, -4$) F(4,4)

Vértices A (2,2) A' ($-2, -2$)

B ($-2, 2$) B' (2, -2)

- $xy = 4$

Parámetros $a^2 = 2xy = 8$

$a = b = \sqrt{8}$

$c = 4$

Focos F' ($-\sqrt{8}$,
 $-\sqrt{8}$,
) F ($\sqrt{8}$,
 $\sqrt{8}$,
)

Vértices A ($\sqrt[4]{8}$,
 $\sqrt[4]{8}$,
) A' ($-\sqrt[4]{8}$,
 $-\sqrt[4]{8}$,
)

$$B \left(-\sqrt[4]{8}, \sqrt[4]{8} \right) \\ B' \left(\sqrt[4]{8}, -\sqrt[4]{8} \right)$$

$$\bullet xy = \sqrt{10}$$

$$\text{Parámetros } a^2 = 2xy = 20$$

$$a = b = \sqrt{20}$$

$$c = \sqrt{40}$$

$$\text{Focos } F' \left(-\sqrt{20}, -\sqrt{20} \right) \\ F \left(\sqrt{20}, \sqrt{20} \right)$$

$$\text{Vértices } A \left(\sqrt[4]{20}, \sqrt[4]{20} \right) \\ A' \left(-\sqrt[4]{20}, -\sqrt[4]{20} \right)$$

$$B \left(-\sqrt[4]{20}, \sqrt[4]{20} \right) \\ B' \left(\sqrt[4]{20}, -\sqrt[4]{20} \right)$$

Representar las parábolas

Están en hoja adjunta.

Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $x + 4 = 0$ y del punto $P(3,0)$.

Sea $x(xy)$ un punto cualquiera de lugar geométrico que nos han pedido

$$\text{Entonces } d(x, r) = d(x, p)$$

$$d(x, r) = \\ x + 4$$

$$d(x, p) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$$

$$\text{Igualamos las distancias } x + 4 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$$

$$\text{Racionalizamos y nos queda } x^2 + 8x + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

Simplificamos, realizamos operaciones y nos queda que $y^2 = 14x + 7$, también podemos poner la formula de la siguiente forma $y^2 = 2 * 7 (x + \frac{1}{2})$

), porque la parábola es de la forma $y^2 = 2p (x - x_0)$.

P es la distancia del foco a la directriz $p = 7$, y x_0 es la distancia del vértice $V(-\frac{1}{2}, 0)$

Hallar la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $y + 5 = 0$ y por foco el punto $p(0,5)$

Solución: El vértice es el origen Y, la parábola tiene de parámetro $p = 10$, su ecuación es $x^2 = 2py$, es decir, $x^2 = 20y$

Halla el valor del parámetro p de modo que la parábola de ecuación $y^2 = 2px$ pase por el punto $p(3,-1)$

Solución: Para que esto se cumpla, tenemos que sustituir los valores en la ecuación

$$(-1)^2 = 2p * 3$$

$$1 = 6p$$

$$p = \frac{1}{6}$$

Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al de abscisas sabiendo que su vértice es el punto $V(1, -2)$ y que pasa por el punto $P(4,1)$.

Solución: La ecuación de la parábola será de la forma $(y + 2)^2 = 2p (x - 1)$.

Al pasar por el punto p lo sustituimos en la ecuación y nos queda $(1 + 2)^2 = 2p (4 - 1)$

$$9 = 6p$$

$$p = \frac{3}{2}$$

La ecuación de la parábola, es $(y + 2)^2 = 2 * \frac{3}{2}$

$$(x - 1)$$

$$(y + 2)^2 = 3(x - 1)$$

Hallar las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes de la tangente a la parábola $y = x^2 + 7x - 10$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución: Sustituimos $x = 3$ en la ecuación y nos da que $y = 9 + 21 - 10 = 20$, luego el punto será $(3,20)$.

Para lo de más se necesitarían derivadas.

Sea P un punto del plano que dista 15 m del centro de una circunferencia de radio 9 m .por p trazamos una secante a la circunferencia que corta esta en los puntos a y B. Calcular AB sabiendo que PB mide 16m.

$$PA \cdot PB = d^2 - r^2$$

$$(16 - AB) \cdot 16 = 15^2 - 9^2$$

$$256 - 16 AB = 225 - 81$$

$$256 + 144 = 16 AB$$

$$AB = 400/16$$

En uno de los lados de un ángulo, y a partir del vértice tomamos dos longitudes $OA = 6$ m y $Ob = 8$ m y en el otro lado la longitud $OC = 4$ m . Si hacemos pasar una circunferencia por los tres puntos A,B,C, ¿Cuánto medirá el segmento OD, siendo D el punto en el que corta esa circunferencia al lado en que esta C

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

$$6 \cdot 8 = 4 \cdot OD$$

$$OD = 48/4$$

$$OD = 12$$

Los puntos $a(-2,0)$ $b(2,0)$ son vértices de un triangulo ABC cuyo vértice C recorre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6y = 0$. Hallar la ecuación del lugar geométrico del baricentro del triangulo ABC al variar C sobre la circunferencia dada

La circunferencia tiene como centro el punto $(0,3)$,

Como el baricentro se encuentra a $1/3$ del lado AB y a $2/3$ del vértice C, a medida que el punto c recorre la circunferencia, el baricentro recorre una circunferencia de centro O y razón $1/3$ Por tanto el centro está en el punto $C' (0,1)$ y el radio será $r = \frac{1}{3} * 3 = 1$

, luego el lugar geométrico pedido , es la circunferencia de ecuación $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

La máxima distancia de la Tierra al Sol es 94,56 millones de millas y su distancia mínima es 91,45 millones de millas.¿Cual es la excentricidad de la orbita y cuales son los diámetros mayor y menor ¿

El sol ocupa uno de los focos

Calculamos los parámetros $2a = 94,56 + 91,45$

$$2a = 186,01$$

$$a = 93,005$$

$$2c = 94,56 - 91,45$$

$$2c = 3,11$$

$$c = 1,555$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 8649,93 - 2,42$$

$$b^2 = 8647,51$$

$$b = 92,97$$

$$2b = 185,94$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1,555}{93,005} = 0,017$$

La órbita del cometa Kohoutek es una elipse con una excentricidad $e = 0,999925$ y con el Sol en uno de sus focos. Si su distancia mínima al Sol es $0,13$ UA ¿Cuál es su máxima distancia al sol ¿

Del enunciado obtenemos los siguiente sistemas de ecuaciones

$$\frac{c}{a} = 0,999925$$

$$a - c = 0,13$$

De este sistema sacamos que $c = 0,999925 a$, y que $0,000075 a = 0,13$ lo cual deducimos que $a = 1733,33$ y $c = 1733,20$

La distancia máxima es $a + c = 1733,33 + 1733,20 = 3476,53$ UA

La luna recorre una trayectoria elíptica donde la Tierra esta en uno de los focos. Si la distancia máxima de la Tierra a la luna es de 405500 Km y la mínima distancia es de 363300 Km. ¿Cuál es la excentricidad de su órbita,?

$$T a' = 405500 \text{ Km}$$

$$T a = 363300 \text{ Km}$$

$$a' T' + T' O + O T = 405500$$

$$a' T' + 2 O T = 405500$$

Sustituimos y obtenemos

$$363600 + 2 O T = 405500$$

$$2 O T = 405500 - 363300$$

$$O T = \frac{42200}{2}$$

$$O T = 21100 \text{ Km.}$$

$$\text{Entonces tenemos que } a = 21100 + 30063300 = 384400 \text{ Km.}$$

$$C = 21100$$

$$E = C / a = 0,0515$$

Hallar la tangente del ángulo bajo el cual se cortan las parábolas de las ecuaciones $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$

Calculamos el punto de corte de esas parábolas

$$Y^2 = 2x$$

$$x^2 = 2y$$

Resolviendo tenemos:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = 2x$$

$$\frac{x^4}{4} = 2x$$

$$x^4 = 8x$$

$$x^4 - 8x = 0$$

Sacamos factor común x y tenemos

$$x (x^3 - 8) = 0$$

Luego las soluciones son:

$$x = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Por tanto para $x = 0$, $y = 0$, luego $O(0,0)$

Para $x = 2$, $y = 2$ luego a $(2,2)$

Se necesita hacer derivadas para poder solucionarlo

Dada la recta $3x + y - m = 0$ y la parábola $y = x^2 - 7x + 12$, a fin de que la recta sea tangente a la curva.

Para que la recta sea tangente a la parábola, a ep tener 1 solo punto de corte, para ello resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$Y = m - 3x$$

$$Y = x^2 - 7x + 12$$

$$\text{Operando nos queda, } x^2 - 4x + 12 - m = 0$$

Hacemos el discriminante $= 0$ para que la ecuación de 2° grado solo tenga una sola solución.

$$(4)^2 - 4(12 - m) = 0$$

$$16 - 48 + 4m = 0$$

$$m = 8$$

Calcular las coordenadas de los puntos de la parábola $y = x^2 + x + 1$ que distan 3 unidades del eje de las abscisas,

Sea $P(x, x^2 + x + 1)$ un punto genérico de la parábola

La distancia de P al eje de abscisas es la ecuación, entonces, la igualamos a la distancia que es 3, operamos y nos queda la ecuación de la siguiente forma:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Resolvemos esta ecuación y los valores obtenidos para x son $x = -2$ y $x = 1$

Para $x = -2$ lo sustituimos en la ecuación y nos queda $(-2)^2 + (-2) + 1 = 3$

Luego el punto a $(-2,3)$ lo mismo hacemos para $x = 1$ y nos queda $1^2 + 1 + 1 = 3$, luego el punto $B(1,3)$

Hallar los puntos de la parábola $x = y^2 - 5y + 6$ que equidistan de los puntos $(-3,-2)$ y $(7,4)$

Un punto cualquiera de la parábola tiene de coordenadas $(y^2 - 5y + 6, y)$ como tenemos los puntos. Hallamos distancia entre P y A y P y B .

$$d(P,A) = \sqrt{(y^2 - 5y + 6 + 3)^2 + (y + 2)^2}$$

$$d(P,B) = \sqrt{(y^2 - 5y + 6 - 7)^2 + (y - 4)^2}$$

Como ambas distancias son iguales eliminamos raíces y

$$(y^2 - 5y + 9)^2 + (y + 2)^2 = (y^2 - 5y - 1)^2 + (y - 4)^2$$

Operando nos queda $5y^2 - 22y + 17 = 0$.

Resolvemos la ecuación de 2º Grado y los valores obtenidos para y son 1 y $\frac{17}{5}$

Sustituyendo cada uno de los valores obtenidos en $y^2 - 5y + 6$ obtenemos los siguientes puntos.

Para $y = 1$ $x = 2$

Para $y = \frac{17}{5}$

$x = \frac{14}{25}$

Luego los puntos pedidos son:

$(2,1)$ y $(\frac{14}{25}, \frac{17}{5})$

$\frac{17}{5}$
)