Algebra & Geometría Analítica

MATRICES

Definición:

Una matriz es una tabla rectangular de números o elementos de un anillo .

Una matriz se representa normalmente entre paréntesis o corchetes:

En las matrices anteriores, a, b y c son números cualesquiera.. Las líneas horizontales, denominadas filas, se numeran de arriba a abajo; las líneas verticales, o columnas, se numeran de izquierda a derecha. Utilizando esta notación, el elemento de la segunda fila y tercera columna de M1 es −1. Una fila o columna genérica se denomina línea.

El tamaño de una matriz está dado por el número de filas y el de columnas en este orden, así M1, M2, M3 y M4 son de tamaño 3 3, 3 3, 3 2 y 2 3 respectivamente. Los elementos de una matriz general de tamaño m n se representan normalmente utilizando un doble subíndice; el primer subíndice, i, indica el número de fila y el segundo, j, el número de columna. Así pues, el elemento a23 está en la segunda fila, tercera columna. La matriz general se puede representar de forma abreviada como A = (aij), en donde los posibles valores de los índices i = 1, 2, , m y j = 1, 2, , n se han de dar explícitamente si no se sobrentienden.

Matrices Cuadradas: Si m = n, la matriz es cuadrada y el número de filas (o columnas) es el orden de la matriz.

Dos matrices A = (aij) y B = (bij), son iguales si y sólo si son de igual tamaño y si para todo i y j, aij = bij.

Si A = (aij) es una matriz cuadrada, los elementos a11, a22, a33, forman la diagonal principal de la matriz.

La suma de dos matrices sólo está definida si ambas tienen el mismo tamaño.

Si A = (aij) y B = (bij) tienen igual tamaño, entonces la suma C = A + B se define como la matriz (cij), en la que cij = aij + bij, es decir, para sumar dos matrices de igual tamaño basta con sumar los elementos correspondientes.

Así, para las matrices mencionadas anteriormente

El conjunto de todas las matrices de un determinado tamaño tiene las propiedades uniforme, asociativa y conmutativa de la adición. Además hay una matriz única O tal que para cualquier matriz A, se cumple A + O = O + A = A y una matriz única B tal que A + B = B + A = O.

El producto AB de dos matrices, A y B, está definido sólo si el número de columnas del factor izquierdo, A es igual al número de filas del factor derecho, B; si A = (aij) es de tamaño m n y B = (bjk) es de tamaño n p, el producto AB = C = (cik) es de tamaño m p,

El elemento de la fila i y la columna k del producto es la suma de los productos de cada uno de los elementos de la fila i del factor izquierdo multiplicado por el correspondiente elemento de la columna k del factor derecho.

El producto entre matrices no es conmutativo. Es decir AB ^{1} BA

Propiedades de las matrices

Suma y multiplicación por un escalar

1. A+0=A (El cero representa una matriz neutra del mismo orden que A)

2. 0.A =A.0=0 (El cero en los dos primeros términos representa un escalar, mientras que en el último término representa una matriz del mismo orden que A)

3. A+B=B+A Ley conmutativa para la suma de matrices

4. (A+B)+C= A+ (B+C) Ley asociativa para la suma de matrices.

5. a (A+B) = aA+ aB Ley distributiva para la multiplicación por un escalar.

6. 1.A=A

7. (a+b) A = a A+ bA

Multiplicación entre matrices

Ley asociativa para la multiplicación de matrices.

Sea A = una matriz de orden m x n y B= de orden n x p, y C =

de orden p x q , entonces

A(BC) =(AB)C y el resultado es una matriz de m x q.

Leyes distributivas para la multiplicación de matrices:

1. A(B+C)= AB+AC

2. (A+B) C= AC+BC

Matrices espaciales

La matriz diagonal es una matriz cuadrada, en la que todos sus elementos son nulos, excepto la diagonal principal.

La matriz escalar es una matriz diagonal que tiene los elementos de la diagonal iguales.

La matriz cero es aquélla en la que todos los elementos son 0.

La matriz identidad Im de orden m, es una matriz cuadrada de orden m en la cual todos los elementos son cero excepto los de la diagonal principal, que son 1. Una propiedad de esta matriz es que es el neutro multiplicativo de cualquier matriz; es decir, multiplicando por derecha o izquierda cualquier matriz por la matriz identidad, se obtiene la misma matriz.

La Matriz Traspuesta AT de una matriz A es otra matriz en la cual la fila i es la columna i de A, y la columna j es la fila j de A. Por ejemplo, tomando la matriz M3 anterior,

es la matriz traspuesta de M3.

Propiedades de las matrices traspuestas:

$(A+B)^t = A^t + B^t$ La traspuesta de la suma es igual a la suma de las traspuestas.

$(A^t)^t = A$ La traspuesta de la traspuesta es igual a la matriz origen.

$(aA)^t = a\, A^t$ Un escalar por una matriz traspuestos es igual a la matriz traspueta por el escalar.

$(A.B)^t = B^t . A^t$ La praspuesta del producto es igual al producto de las trspuestas en orden inverso.

La Matriz Simétrica es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos iguales con respecto a la diagonal principal. Es decir:

S es simétrica si y solo sí $s_{ij} = s_{ji}$.

Otra definición S es simetrica si $S = S^T$

La matriz antisimétrica es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos iguasles con respecto a la diagonal principal pero cambiados de signo y además la diagonal principal tiene solo 0.

Otra definición : A es antisimétrica si $A^T = -A$.

Matriz Inversa : Una matriz A, tiene inversa ó es invertible si existe una matriz B tal que AB =BA = I (matriz identidad). La matriz B es la matriz inversa de A y se simboliza A^{-1}.

Propiedades:

1. La matriz inversa si existe es única.

2. $(AB)^{-1}= B^{-1} A^{-1}$

3. Sea A cuadrada, A tiene inversa sí y solo sí el determinante de A es distinto de cero, en este caso la matriz A se dice no singular.

Operaciones Elementales

Llamamos operaciones elementales sobre las filas o columnas de una matriz a las siguientes:

1. Intercambio de dos filas o columnas entre sí.

2. Adición de una fila o columna a otra.

3. Multiplicación de una fila o columna por un escalar.

Matriz Elemental

Es una matriz que se obtiene de realizar alguna de las operaciones

elementales sobre las filas o columnas de la matriz identidad.

E: matriz elemental e: operación elemental

E¡ = e¡(I)

Matrices equivalentes. Dos matrices son equivalentes si una se obtiene de

la otra al realizar un número finito de operaciones elementales.

e1= F3 + (−2) F1 e2 = F2 + (−4)F1

Para cualquier matriz A realizar una e sobre A es lo mismo que multiplicar A

por una matriz elemental.

e(A) = E.A

Teorema: Sea A una matriz cuadrada de orden n x n A es inversible sí y solo

sí A es equivalente por filas a la matriz identidad

A @ I Û A es el producto de matrices elementales

Método de Gauss− Jordan para determinar la matriz inversa.

Sea A cuadrada y no singular, realizando operaciones elementales

exclusivamente sobre las filas de A podemos obtener A−1.

(A/I) n x 2n Tomamos la matriz A y la ampliamos con la

matriz identidad del mismo orden

Realizamos un número finito de operaciones elementales sobre las filas de

(A½I) hasta transformar la matriz A en la matriz identidad , entonces la

matriz que acompaña a I es la inversa de A.

Teorema: Si A es una matriz cuadrada inversible y un número finito de

operaciones elementales sobre las filas de A, la transforman en la

identidad, entonces las mismas operaciones son las filas de la identidad, la

transforman en la inversa de A.

Rango o características de una matriz

Es el número máximo de vectores canónicos *distintos que se pueden lograr en

las

filas o columnas de una matriz

Método de Gauss− Jordan para determinar el rango

Para determinar el rango de una matriz A de m x n se realizan operaciones

elementales sobre las filas de la matriz para lograr el número máximo de

vectores canónicos distintos entre sí.

Forma escalonada de la matriz.

Una matriz se encuentra en forma escalonada sí las filas nulas son las

últimas y las filas anteriores ceros en orden decreciente.

Rango de una matriz es igual al número de filas no nulas que tiene la

matriz después de llevarla a la forma escalonda.

Determinantes

Se representa como un número de arreglos dispuestos en igual número de filas

que de columnas. Se encierran entre barras . Un determinante tiene

resultado.

Definición 1: Sea A n x n matriz cuadrada entonces existe un único número

asociado a la matriz A, que llamamos determinante de a y se simboliza ½A½.

Definición 2: a) Dada la matriz A mxn llamamos menor complementario del elemento (ij) de A al determinante de orden n−1 que s e obtiene al suprimir

la fila "i" y la columna "j"de A. El menor complementario se simboliza con

el determinante Mij

b) Llamamos adjunto o complemento algebraico o cofactor del elemento (ij) de

A y denotamos

i+j

Aij =(−1) Mij.

Definición 3: a) Dada la matriz A 1 x 1 = a el determinante de A es el

escalar que representa.

b) Dada al matriz A de orden n x n ½A½ es igual a la suma de los productos

de los elementos de la primera fila por los adjuntos correspondientes.

n

½A½ = Z aik . Aik

k=1

½A½ = a11. A11 + a12. A12+ a1n A1n

Definición más general: Para encontrar el valor de un determinante se puede

trabajar desarrollando el determinante por cualquier fila o columna

½A½ = suma de los productos de los elementos de una fila o columna por los

adjuntos correspondientes.

Propiedad: el valor de un determinante no cambia si se dos filas o columnas

entre sí; es decir si reemplazo una fila o columna por la suma de los

elementos esa fila o columna y otra fila o columna cualquiera , el valor

del determinante no cambia.

2º propiedad: El valor de un determinante cambia si se multiplica una fila o

columna por una constante

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineal (cuyas incógnitas están elevadas a la

primera potencia) es por ejemplo:

A11x1+a12x2+.....+a1nxn=b1

A21x1+a22x2+.....+a2nxn=b2

Am1x1+am2x2+.....+amnxn=bm

Este es un sistema de m ecuaciones con n incógnitas; las constantes Aij son

los coeficientes de las incógnitas.

(a11 a12 a1n)

Am x n = (a21 a22 a2n) =matriz de

los coeficientes de las incógnitas

(am1 am2 amn)

(x1)

X= (x2) =Vector de las incógnitas

m x 1 (x3)

(b1)

B = (b2) Vector o matriz de

los términos independientes

n x 1 (bn)

Este representa un sistema no homogéneo, ya que tiene la forma A m x n

. X n x 1 =B m x 1

UN sistema homogéneo esta representado por la ecuación matricial de la forma

A m x n . X n x 1 = 0 (matriz).

Un sistema cuadrado es aquél que tiene la matriz A cuadrada, es decir

tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. Este tipo de sistemas

pueden resolverse:

A −1 . A . X = A−1 . B

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$

En un sistema del tipo que tratamos recién, si el determinante de la

matriz A es distinto de 0, entonces existe la matriz inversa (A^{-1}).

La matriz inversa también puede lograrse mediante :

t

A −1 = A c

¦ A¦

Regla de Cramer

Dado un sistema como el anterior, si el determinante de la matriz de los

coeficientes es distinta de cero; el sistema tiene solución única y esta se

calcula por ejemplo sea la matriz:

(1 2 −3) B=

(1 3 −2) (pero vertical)

A3 x 3 = (2 −1 5)

(4 1 3) Sea el

determinante de A = 2 entonces:

1 2 −3

X= 3 −1 5

−2 1 3

2

Es decir , reemplazando la columna de la incógnita por la de los resultados

en el determinante y luego al resultado de ese determinante dividirlo en el

determinante de la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones.

Teorema de Rouché −Frobenuis

Dado el sistema $A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1}$ tiene solución si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

r(A) =r(A¦ B) entonces el sistema se dice que es compatible

Si el rango de a es igual al rango de B y además es igual al número de incógnitas el sistema tiene solución única y se dice que compatible determinado.

Si el rango de A es igual al rango de A ampliada B y es menor que el número de incógnitas. entonces el sistema tiene infinitas soluciones y se dice compatible indeterminado; en este caso las soluciones se encuentran dejando en el primer miembro tantas incógnitas como el valor del rango y pasando al segundo miembro las restantes.

Ejemplo:

4 ec. y 4 incg. r (A)=2

2 incg.=............

Si el rango de A es distinto de la matriz ampliada el sistema no tiene solución y se le llama incompatible.

Método de Gauss−−−Jordan.

Mediante operaciones elementales en las matrices y aplicando propiedades se tratan de encontrar la mayor cantidad de vectores canónicos de la matriz ampliada, una vez logrados se ordena en forma de sistema nuevamente y se resuelve.

Método de eliminación Gaussiana

El método de eliminación de Gauss es aplicable para sistemas de m x n; y consiste en la matriz ampliada si el coeficiente de la primera incógnita es distinta de cero se deja la primera ecuación como está y se elimina dicha incógnita de las restantes ecuaciones, luego se observa la segunda ecuación del sistema , si el coeficiente de la segunda es distinto de cero se deja la segunda ecuación como esta y asi sucesivamente hasta terminar con todas las ecuaciones ; es decir, triangular la matriz a cero.

Sistemas de ecuaciones lineales m x n homogéneo.

A mxn · X nx1 = 0 mx1 Para un sistema homogéneo siempre el rango de A es igual al rango de la matriz ampliada.

Este sistema tiene solución :

· Si el rango de a es igual al número de incógnitas, entonces la solución es única . Solución trivial X¡=0 para todo ¡= 1....n.

· Si el rango de A es menor que el número de incógnitas, entonces tiene infinitas soluciones.

Vectores en el plano

Un vector es un segmento de recta ordenado la punta de la flecha es el extremo y el otro extremo se llama origen. Es un ente matemático caracterizado por módulo, dirección, y sentido.

Modulo: longitud del segmento que termina en la flecha.

Sentido: Esta dado por el extremo de la flecha

Dirección: Esta dado por la recta que soporta al vector.

Los vectores se denotan por ü (tomar como que el acento es una flecha o guión sobre la letra) y es igual a otro vector si tienen el mismo sentido, el mismo módulo y la misma dirección. Además si son vectores iguales son paralelos.

Opuesto de un vector: el opuesto de un vector ü es −ü, tiene la misma dirección, el mismo módulo y distinto sentido.

Suma de vectores: la suma de vectores es sean las vectores ü y ¨v las suma de ellos es juntando el extremo de ü con el origen de ¨v se puede formar un paralelogramo haciendo las paralelas a cada uno de los vectores en el extremo del otro vector, la suma es la diagonal que parte desde el origen de ü hasta el extremo de ¨v.

Diferencia de vectores: Es la suma de un vector y el opuesto de otro.

Vector Unitario. Es el vector que tiene módulo 1.Cuando se usa para determinar la dirección en el espacio se le llama versor.

Multiplicación de un vector por un escalar.

Sea a una constante real; el producto se define de la siguiente manera. Si el escalar a > 1el módulo del vector factor va a aumentar tantas veces como indique el escalar. Si 0 < a < 1 , entonces reduce su valor. Y si a < 0 entonces cambia el sentido del vector.

Producto escalar(·)

ü · ¨v = número que se calcula haciendo el producto de los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman esos vectores

Proyección de un escalar sobre otro. La proyección de un vector ü sobre otro ¨¨v , es también un número que se calcula haciendo el producto del módulo de ¨v por el coseno del ángulo a.

Producto Vectorial (x)

El producto vectorial entre dos factores da como resultado un vector, y se calcula de la siguiente manera.

Dados dos vectores: ü y ¨v.

½ü x ¨v½ = ½ü½. ½¨v½. Sen a

El producto vectorial es perpendicular al plano de ü y de ¨v y el sentido se determina por la regla de la mano derecha.

La interpretación geométrica del módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo.

Introducción de un sistema de referencia

Expresión analítica del vector

Consideremos sobre el eje x el versor ï y sobre el eje y, el versor ¨j

¨P = xï + y¨j Es la ecuación canónica o cartesiana del vector.

El módulo de un vector se determina por la raiz cuadrada de la suma de los coeficientes de los versores ï y ¨j al cuadrado. LA dirección de un vector la determina el ángulo a (la tangente de a= y/x, por lo tanto a = arco tg y/x) y el sentido lo dá el extremo de la flecha.

X = ½¨p½ cos a

Y= sen a ½¨p½

Vectores en el espacio

El espacio tridimensional se divide en tres regiones