

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Aplicaciones a la Biología:

Uno de los campos más fascinante del conocimiento al cual los métodos matemáticos han sido aplicados es el de la Biología. La posibilidad de que las matemáticas pudieran aun ser aplicadas exitosamente al estudio de varios procesos naturales de los seres vivos desde los microorganismos más elementales hasta la misma humanidad sorprende a la imaginación.

Crecimiento Biológico:

Un problema fundamental en la biología es el crecimiento, sea este el crecimiento de una célula, un organismo, un ser humano, una planta o una población. La ecuación diferencial fundamental era:

$$dy / dt = y$$

con solución

$$y = ce$$

Donde c es una constante arbitraria. De esto vemos que el crecimiento ocurre si > 0 mientras que el decaimiento (o encogimiento) ocurre si < 0 .

Un defecto obvio de dicha ecuación diferencial anteriormente planteada y de su solución correspondiente es que si > 0 entonces tenemos que $y \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$, así que a medida que el tiempo transcurre el crecimiento es limitado. Esto está en conflicto con la realidad, ya que después de transcurrir cierto tiempo sabemos que una célula o individuo deja de crecer, habiendo conseguido el tamaño máximo.

Formulación Matemática:

Supongamos que y denota la altura de un ser humano (aunque como ya se ha mencionado, esto también puede referirse a otras cosas tales como el tamaño de las células). Tendríamos entonces:

$$dy / dx = F(y) \quad y = Y_0 \text{ para } t=0$$

Donde Y_0 representa la altura en algún tiempo especificado $t = 0$, y donde F es una función apropiada pero aun desconocida. Puesto que la función lineal $F(y) = y$ no es apropiada, ensayemos como una aproximación de orden superior dada por la función cuadrática $F(y) = y - y^2$, $y = Y_0$ para $t = 0$.

Puesto que la ecuación $F(y) = y - y^2$ es de variables separables, tenemos

$$dy / (y - y^2) = dt \quad \text{ó} \quad dy / y(1 - y) = dt$$

$$\text{esto es, } \int [1/y + 1/(1 - y)] dy = t + c$$

$$= \ln y - \ln(1 - y) = t + c$$

Usando la condición y resolviendo en $y = Y_0$ en $t = 0$ se obtiene que:

$$Y = \frac{Y_0 e^t}{1 - Y_0(e^t - 1)}$$

$$1 + [/ / Y_0 - 1] e$$

Si tomamos el limite de la ecuación anterior tenemos que: Cuando $t \rightarrow \infty$, vemos, ya que $e^{-t} > 0$, que:

$$Y_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} Y = Y_1 / (Y_1 - Y_0)$$

$t \rightarrow \infty$

Por simple álgebra encontramos:

$$Y_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} Y = \frac{Y_1(Y_0 - Y_1)}{Y_1 - Y_0}$$

$$t \rightarrow \infty \quad Y_1^2 - Y_0 Y_2$$

Ejemplo:

Las alturas promedios de los niños varones de varias edades se muestran en la siguiente tabla. Use estos datos para predecir la altura media de varones adultos con pleno crecimiento.

Edad	Altura (pul)
Nacimiento	19.4
1 año	31.3
2 años	34.5
3 años	37.2
4 años	40.3
5 años	43.9
6 años	48.1
7 años	52.5
8 años	56.8

solución: Para cubrir en conjunto completo de datos dado en la tabla, sea $t = 0, 1, 2$ las edades al nacimiento, 4 años y 8 años, respectivamente. Así tenemos que $Y_0 = 19.4$ $Y_1 = 40.3$ $Y_2 = 56.8$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación de $Y_{\max}$ se obtiene el valor de 66.9 pul. o 5 pies con 7 pul. como la altura media máxima requerida.

Problemas de Epidemiología:

Un problema importante de la biología y de la medicina trata de la ocurrencia, propagación y control de una enfermedad contagiosa, esto es, una enfermedad que puede transmitirse de un individuo a otro. La ciencia que estudia este problema se llama *epidemiología*, y si un porcentaje grande no común de una población adquiere la enfermedad, decimos que hay una *epidemia*.

Los problemas que contemplan la propagación de una enfermedad pueden ser algo complicados; para ello presentar un modelo matemático sencillo para la propagación de una enfermedad, tenemos que asumir que tenemos una población grande pero finita. Supongamos entonces que nos restringimos a los estudiantes de un colegio o universidad grande quienes permanecen en los predios universitarios por un periodo relativamente largo y que no se tiene acceso a otras comunidades. Supondremos que hay solo dos tipos de estudiantes, unos que tienen la enfermedad contagiosa, llamados infectados, y otros que no tienen la enfermedad, esto es, no infectado, pero que son capaces de adquirirla al primer contacto con un estudiante infectado. Deseamos

obtener una formula para el numero de estudiantes infectados en cualquier tiempo, dado que inicialmente hay un numero especificado de estudiantes infectados.

Formulación Matemática:

Supónganse que en cualquier tiempo t hay N_i estudiantes infectados y N_u estudiantes no infectados. Entonces si N es el numero total de estudiantes, asumido constante, tenemos

$$N = N_i + N_u$$

La tasa de cambio en el numero de estudiantes infectados esta dada entonces por la derivada dN_i / dt . Esta derivada debería depender de alguna manera de N_i y así de N_u en virtud de la formula $N = N_i + N_u$.

Asumiendo que dN_i / dt , como una aproximación, es una función cuadrática de N , tenemos entonces que:

$$dN_i / dt = A_0 + A_1N_i + A_2N_i^2$$

Donde A_0 , A_1 , A_2 son constantes. Ahora esperaríamos que la tasa de cambio de N_i , esto es, dN_i / dt sea cero donde $N_i = 0$, esto es, no hay estudiantes infectados, y donde $N_i = N$, esto es, todos los estudiantes estén infectados. Entonces de la ultima formulación hecha tenemos que: $A_0 = 0$ y $A_1N + A_2N^2 = 0$ ó $A_2 = -A_1/N$

Así que de: $dN_i / dt = A_0 + A_1N_i + A_2N_i^2$ se convierte en: $dN_i / dt = kN_i (N - N_i)$. Donde $k = A_1/N$ es una constante. Las condiciones iniciales en $t = 0$, hay N_0 estudiantes infectados, entonces: $N_i = N_0$ en $T = 0$. De todo esto podemos deducir que:

$$N_i = \frac{N}{1 + (N/N_0 - 1)e^{-kt}}$$

$$1 + (N/N_0 - 1)e^{-kt}$$

Aplicaciones a la Economía:

En años recientes ha habido un interés creciente por la aplicación de las matemáticas a la economía. Sin embargo, puesto que la economía involucra mucho factores impredecibles, tales como decisiones psicológicas o políticas, la formulación matemática de sus problemas es difícil. Se debería hacer énfasis que, como en los problemas de ciencia e ingeniería, cualquier resultado obtenido teóricamente debe finalmente ser probado a la luz de la realidad.

Oferta y Demanda

Suponga que tenemos un bien tal como trigo o petróleo. Sea p el precio de este bien por alguna unidad especificada (por ejemplo un barril de petróleo) en cualquier tiempo t . Entonces podemos pensar que p es una función de t así que $p(t)$ es el precio en el tiempo t .

El numero de unidades del bien que desean los consumidores por unidad de tiempo en cualquier tiempo t se llama la demanda y se denota por $D(t)$, o brevemente D . Esta demanda puede depender no solo del precio p en cualquier tiempo t , esto es, $p(t)$, sino también de la dirección en la cual los consumidores creen que tomaran los precios, esto es, la tasa de cambio del precio o derivada $p'(t)$. Por ejemplo, si los precios están altos en tiempo t pero los consumidores creen que pueden subir, la demanda tiende a incrementar. En símbolos esta dependencia de D en $p(t)$ y $p'(t)$ puede escribirse:

$$D = (p(t), p'(t))$$

Llamamos la función de demanda.

Similarmente, el numero de unidades del bien que los productores tienen disponible por unidad de tiempo en cualquier tiempo t se llama oferta y se denota por $S(t)$, o brevemente S . Como en el caso de la demanda, S también depende de $p(t)$ y $p'(t)$. Por ejemplo, si los precios están altos en tiempo t pero los productores creen que estos pueden subir mas, la oferta disponible tiende a incrementar anticipándose a precios más altos. En símbolo esta dependencia de S en $p(t)$ y $p'(t)$ puede escribirse:

$$S = g(p(t), p'(t))$$

Llamamos g a la función oferta.

Principio económico de la oferta y la demanda:

El precio de un bien en cualquier tiempo t , esto es, $p(t)$, esta determinada por la condición de que la demanda en t sea igual a la oferta en t , en forma matemática esto quiere decir:

$$(p(t), p'(t)) = g(p(t), p'(t))$$

Las formas que debería tener y g son las siguientes:

$$D = (p(t), p'(t)) = A_1 p(t) + A_2 p'(t) + A_3$$

$$S = g(p(t), p'(t)) = B_1 p(t) + B_2 p'(t) + B_3$$

donde A 's y B 's son constantes, en ese caso la formula matemática se transforma a la siguiente expresión:

$$A_1 p(t) + A_2 p'(t) + A_3 = B_1 p(t) + B_2 p'(t) + B_3$$

$$(A_2 - B_2)p'(t) + (A_1 - B_1)p(t) = B_3 - A_3$$

Asumamos que $A_1 > B_1$, $A_2 > B_2$ y $A_3 > B_3$. Entonces podríamos escribir la formula como:

$$p'(t) + (A_1 - B_1 / A_2 - B_2)p(t) = (B_3 - A_3 / A_2 - B_2)$$

Resolviendo esta ecuación lineal de primer orden sujeta a $p = P_0$ en $t = 0$ da como resultado:

$$p(t) = (B_3 - A_3 / A_1 - B_1) + [P_0 - (B_3 - A_3 / A_1 - B_1)]e$$

Caso I: Si $P_0 = (B_3 - A_3) / (A_1 - B_1)$ y $p(t) = P_0$ entonces, los precios permanecen constantes en todo tiempo.

Caso II: Si $(A_1 - B_1) / (A_2 - B_2) > 0$ entonces se tendría una estabilidad de precios.

Caso III: Si $(A_1 - B_1) / (A_2 - B_2) < 0$. en este caso vemos que de la ecuación $p(t) = (B_3 - A_3 / A_1 - B_1) + [P_0 - (B_3 - A_3 / A_1 - B_1)]e$ que el precio $p(t)$ crece indefinidamente a medida que t crece, asumiendo que $P_0 > (B_3 - A_3) / (A_1 - B_1)$, esto es, tenemos inflación continuada o *inestabilidad de precio*. Este proceso puede continuar hasta que los factores económicos cambien, lo cual puede resultar en un cambio a la ecuación $(A_2 - B_2)p'(t) + (A_1 - B_1)p(t) = B_3 - A_3$.

Ejemplo:

La demanda y oferta de un cierto bien están en miles de unidades por $D = 48 - 2p(t) + 3p'(t)$, $S = 30 + p(t) +$

$4p'(t)$, respectivamente. Si en $t=0$ el precio del bien es 10 unidades, encuentre (a) El precio en cualquier tiempo $t > 0$ y (b) Si hay estabilidad o inestabilidad de precio.

Solución: El precio $p(t)$ esta determinado al igualar la oferta con la demanda, esto es,

$$48 - 2p(t) + 3p'(t) = 30 + p(t) + 4p'(t) = p'(t) + 3p(t) = 18$$

Resolviendo la ecuación del primer orden lineal sujeta a $p = 10$ en $t = 0$ da como resultado: $p(t) = 6 + 4e$

De este resultado vemos que, si $t \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 6$. Por tanto tenemos *estabilidad de precio*, y el precio de equilibrio es de 6 unidades.

Inventarios:

Si la oferta es mayor a la demanda, entonces los productores tiene una cierta cantidad de bien en su posesión, la cual se llama inventario del bien, el cual esperan vender. Por otro lado, si la demanda es mayor que la oferta, entonces los productores deben adquirir inventario.

Formulación Matemática:

Sea $q(t)$ la cantidad o numero de unidades de un bien C disponible en tiempo t. Entonces $q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta q$ es la cantidad disponible en tiempo $t + \Delta t$. Así tenemos que:

Cantidad acumulada en intervalo t a $t + \Delta t = \Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$.

S = numero de unidades de C ofrecidas de tiempo por los productores en tiempo t.

D = numero de unidades de C demandadas por unidad de tiempo por los consumidores en tiempo t.

Entonces el numero de unidades ofrecidas por los productores y demandas por los consumidores entre t y $t + \Delta t$ están dados aproximadamente por $S\Delta t$ y $D\Delta t$ respectivamente, donde los resultados son precisos excepto por términos que involucran $(\Delta t)^2$ y mayores.

Así, cantidad acumulada en el intervalo t a $t + \Delta t$ es igual a:

$S\Delta t - D\Delta t + \text{términos con } (\Delta t)^2 \text{ o mayores.}$

Así $\Delta q / \Delta t = S - D + \text{términos con } (\Delta t) \text{ o mayores.}$

tomando el limite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $dq/dt = S - D$.

De esta ultima ecuación podremos decir que servirá de base para el posterior análisis sobre precios. Como una ilustración, supongamos que un productor desea proteger sus utilidades al requerir que la tasa a la cual incrementara el precio sea proporcional a la tasa a la cual declina el inventario. En ese caso tenemos que:

$$dp/dt = -k \quad dq/dt$$

Donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad que se asume conocida, de modo que usando la ecuación $dp/dt = -k(S - D)$. Puesto que S y D se pueden expresar en términos de p , la ecuación $dp/dt = -k(S - D)$ es una ecuación diferencial para p .

Ejemplo:

Suponga que la oferta y la demanda están dadas en términos de precios p por $S = 60 + 2P$, $D = 120 - 3P$, respectivamente, la constante de proporcionalidad es $k = 4$. Escriba la ecuación diferencial para p y determine el precio en cualquier tiempo $t > 0$ asumiendo que $p = 8$ en $t = 0$

solución: de la formula $dp/dt = -k(q/dt)$ la ecuación diferencial requerida para p es: $dp/dt = -4(60 + 2P - 120 + 3p)$ o $dp/dt + 20p = 240$

resolviendo esta ultima ecuación diferencial tenemos que $p = 12 + ce$

usando $p = 8$ en $t = 0$ da $c = -4$ y así $p = 12 - 4e$

Aplicaciones a la Química:

Hay muchas aplicaciones de ecuaciones diferenciales a los procesos químicos. Algunas de estas serán indicadas en los siguientes ejemplos.

Ejemplo:

Un tanque esta lleno con 10 galones (abreviación *gal*) de agua salada en la cual están disueltos 5lb de sal. Si el agua salada esta conteniendo 3lb de sal por gal que entra al tanque a 2 gal por minuto y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.

- Encontrar la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo.
- ¿Cuanta sal está presente después de 10min?
- ¿Cuanta sal está presente después de un tiempo largo?

Formulación Matemática:

Sea A el numero de libras de sal en el tanque después de t minutos. Luego dA / dt es la tasa de cambio de esta cantidad de sal en el tiempo y esta dada por:

$dA / dt = \text{tasa de cantidad ganada} - \text{tasa de cantidad perdida}$

Puesto que entran 2gal/min. conteniendo 3lb/gal de sal tenemos que la cantidad de sal que entra por minuto es:

$2\text{gal} / \text{min.} \times 3 \text{ lb./gal} = \underline{6 \text{ lb./min.}}$ Lo cual es la tasa a la cual se gana sal. Puesto que siempre hay 10 gal en el tanque y debido a que hay A libras de sal en cualquier tiempo t , la concentración de sal al tiempo t es A libras por 10gal. La cantidad de sal que sale por minuto es, por tanto,

$A \text{ lb} / 10\text{gal} \times 2\text{gal} / \text{min.} = 2A \text{ lb.} / 10\text{min.} = \underline{A \text{ lb./} 5\text{min.}}$

de: $(dA / dt), (6 \text{ lb./min.})$ y $(A \text{ lb./} 5\text{min})$ tenemos que: $\underline{dA / dt = 6 - A/5.}$

Puesto que inicialmente hay 5lb. de sal, tenemos que $A = 5$ en $t = 0$. Así, la formulación matemática completa es:

$dA / dt = 6 - A/5$ $A = 5$ en $t = 0$

solución:

Usando el método de separación de variables, tenemos:

$$\ln(dA / 30 - A) = \ln(dt / 5) \text{ ó } -\ln(30 - A) = t / 5 + c$$

Puesto que $A = 5$ en $t = 0$, $c = -\ln 25$. Así,

$$-\ln(30 - A) = t/5 - \ln 25 = \ln[(30 - A)/25] = A = 30 - 25 e^{-t/5}$$

La cual es la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t .

Al final de los 10min. la cantidad de sal es $A = 30 - 25 e^{-2} = 26.6$ lb.

Después de un tiempo largo, esto es, cuando $t \rightarrow \infty$, vemos que $A \rightarrow 30$ lb., Esto también podría ser visto desde la ecuación diferencial haciendo $dA / dt = 0$, puesto que también A es una constante cuando se alcanza el equilibrio.

Mezclas químicas:

Ejemplo:

Dos químicos, A y B, reaccionan para formar otro químico C. Se encuentra que la tasa a la cual C se forma varía con las cantidades instantáneas de los químicos A y B presentes. La formación requiere 2lb. de A por cada libra de B. Si 10lb. de A y 20lb. de B están presentes inicialmente, y si 6lb. de C se forman en 20min. ; Encontrar la cantidad del químico C en cualquier tiempo.

Formulación Matemática:

Sea x la cantidad en libras de C formadas en el tiempo t en horas. Luego dx / dt es la tasa de su formación para formar x lb. de C, necesitamos $(2x / 3)$ lb. de A y $(x / 3)$ lb. de B, puesto que se necesita que el químico A sea el doble de B. Por tanto, la cantidad de A presente al tiempo t cuando se forman x lb. de C es $10 - 2x/3$, y la cantidad de B en este tiempo es $20 - x/3$. Por tanto:

$dx / dt = K [10 - (2x/3)] * [20 - (x/3)]$; Donde K es la constante de la proporcionalidad. Esta ecuación puede escribirse de la siguiente manera: $dx / dt = k[(15 - x) (60 - x)]$ donde k es otra constante. Hay dos condiciones. Puesto que el químico C inicialmente no está presente, tenemos $x = 0$ en $t = 0$. También $x = 6$ en $t = 1/3$. Necesitamos dos condiciones, una para determinar k , y la otra para determinar la constante arbitraria de la solución de la ecuación diferencial.

La formulación completa es:

$$dx / dt = k[(15 - x) (60 - x)] \quad x = 0 \text{ en } t = 0 ; \quad x = 6 \text{ en } t = 1/3$$

solución:

La separación de variables produce:

$$\ln dx / [(15 - x) (60 - x)] = \ln k dt = kt + C_1$$

$$\text{Ahora } \ln dx / [(15 - x) (60 - x)] = \ln 1/45 [(1/15 - x) - (1/60 - x)] dx$$

$$= 1/45 \ln [(60 - x) / (15 - x)]; \text{ así podemos mostrar que:}$$

$$60 - x / 15 - x = C e^{kt}$$

Puesto que $x = 0$ en $t = 0$, encontramos $c = 4$. Así

$$(60 - x) / (15 - x) = 4e$$

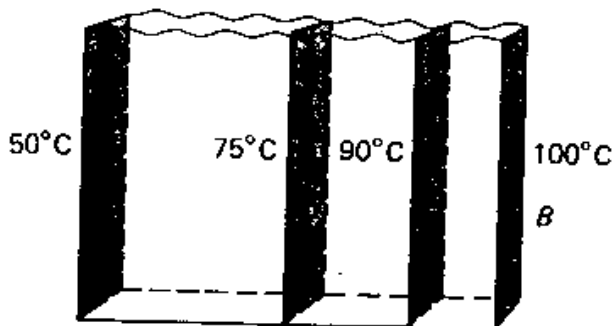
Puesto que $x = 6$ en $t = 1/3$, tenemos $e = 3/2$. Así, $[(60 - x) / (15 - x)] = 4(e)^{3t} = 4(3/2)^{3t}$ ó $x = \underline{15 [1 - (2/3)^{3t}]}$

$$1 - (1/4)(2/3)^{3t}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 15$ lb.

Aplicaciones a flujo de calor en estado estacionario

Considere una pieza de material de longitud indefinida acotada por dos planos paralelos A y B, como muestra la figura a.1. Asuma que el material es uniforme en todas sus propiedades, por ejemplo, calor específico, densidad, etc. Supóngase que los planos A y B se mantienen a 50°C y 100°C , respectivamente. Todo punto en la región entre A y B alcanza cierta temperatura que no cambia posteriormente. Así todos los puntos en el plano C en la mitad entre A y B estarán a 75°C ; el plano E a 90°C . Cuando la temperatura en cada punto de un cuerpo no varía con el tiempo, decimos que prevalecen las *condiciones de estado estacionario* o que tenemos un *flujo de calor en estado estacionario*.



Ejemplo:

Un tubo largo de acero de conductividad térmica $k = 0.15$ unidades cgs, tiene un radio interior de 10 cm y un radio exterior de 20 cm. La superficie interna se mantiene a 20°C y la superficie exterior se mantiene a 50°C . (a) Encuentre la temperatura como una función de la distancia r del eje como de los cilindros concéntricos. (b) Encuentre la temperatura cuando $r = 15$ cm y (c) ¿Cuanto calor se pierde por minuto en la parte del tubo de 20m de largo?

Formulación Matemática:

Sabemos que las superficies isotérmicas son cilindros concéntricos con los cilindros dados. El área de tal superficie con radio r y longitud l es $2\pi rl$. La distancia dn en este caso dr . Así, la ecuación $q = -KA dU/dn$ puede escribirse como: $q = -K(2\pi rl) dU/dr$.

Puesto que $K = 0.15$, $l = 20$ m = 2000 cm, tenemos que:

$$q = -600 r dU/dr.$$

De esta última ecuación, q es por supuesto una constante. Las condiciones son $U = 200^\circ\text{C}$ en $r = 10$, $U = 50^\circ\text{C}$ en $r = 20$

solución:

Separando las variables en $q = -600 r \, dU/dr$, e integrando se obtiene:

$$-600 U = q \ln r + c$$

Usando las condiciones $U = 200^\circ\text{C}$ en $r = 10$, $U = 50^\circ\text{C}$ en $r = 20$ tenemos $-600 (200) = q \ln 10 + c$, $-600 (50) = q \ln 20 + c$ de donde obtenemos $q = 408.000$, $c = 1.317.000$. Por tanto, de $-600 U = q \ln r + c$ encontramos que $U = 699 - 216 \ln r$.

Si $r = 15$, encontramos por sustitución que $U = 114^\circ\text{C}$. Del valor anterior de q , el cual está en calorías por segundo, es claro que la respuesta a la parte (c) es $Q = 408.000 \times 60 \text{ cal/min.} = 24.480.000 \text{ cal/min.}$

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Aplicaciones a la física:

Movimiento Armónico Simple:

La Ley de Hooke:

Supongamos que un cuerpo de masa M está sujeto al extremo de un resorte flexible suspendido de un soporte rígido (por ejemplo un techo), como se muestra en la figura 5.1b. Cuando M se reemplaza por un cuerpo diferente M_i , el alargamiento del resorte será, por supuesto, distinto.

Por la Ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza de restitución F opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a su magnitud s . Dicho en términos simples, $F = ks$, en donde k es una constante de proporcionalidad. Aunque cuerpos de distinto peso producen distintos alargamientos del resorte, tal elemento elástico está esencialmente caracterizado por el número k . Por ejemplo, si un cuerpo que pesa 10 lb. alarga el resorte en $1/2$ pie, entonces,

$$10 = k (1/2) \text{ implica que } k = 20 \text{ lb./pie.}$$

Luego, necesariamente una masa que pesa 8 lb. alarga el mismo resorte en $2/5$ pie.

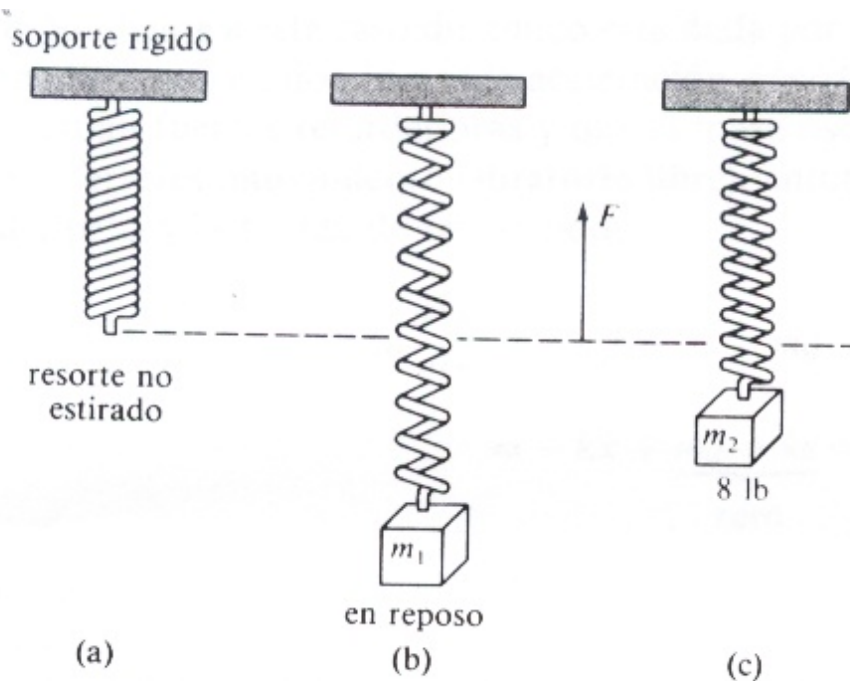


Figura 5.1

Segunda Ley de Newton:

Después que una masa M se sujeta a un resorte, aquella lo alargara en una magnitud s y alcanzara la posición de equilibrio en la cual su peso W es equilibrado por la fuerza de restitución ks . El peso es definido por:

$$W = m \cdot g$$

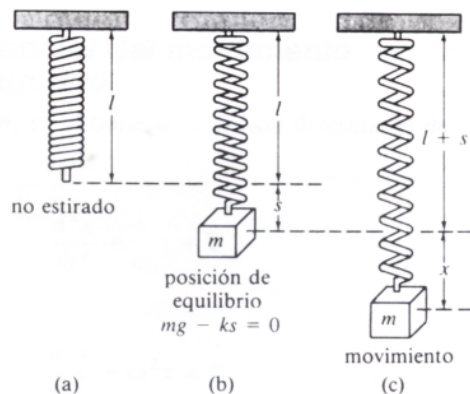


Figura 5.2

En donde la masa puede medirse en Kilogramos, gramos o geolibras (slugs) y $g = 9.8 \text{ mt/s}^2$, 980 cm/s^2 o 32 pie/s^2 , respectivamente. Tal como se indica la figura 5.2b, la condición de equilibrio es $m \cdot g = ks$ o bien $m \cdot g - ks = 0$. Si ahora la masa se desplaza de su posición de equilibrio en una magnitud x y después se suelta, la fuerza neta F correspondiente a este caso dinámico está dada por la **segunda ley del movimiento de Newton**, $F = ma$, en donde a es la aceleración d^2w/dt^2 . Suponiendo que sobre el sistema no actúan fuerzas exteriores (movimiento vibratorio libre), entonces podemos igualar F a la resultante del peso y la fuerza de restitución:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg$$

$$= -kx + mg - ks = -kx$$

cero

Ecuación Diferencial Del Movimiento Libre no Amortiguado:

Dividiendo la ultima ecuación planteada entre la masa m, se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden:

$$d^2x/dt^2 + k/m x = 0$$

$$\text{o bien } d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$$

En donde $\omega^2 = k/m$. Se dice que la ecuación $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$ describe el **movimiento armónico simple** o **movimiento vibratorio no amortiguado**. Hay dos condiciones iniciales obvias asociadas con dicha ecuación:

$$x(0) = x_0, \quad dx/dt|_{t=0} = v_0$$

$$t = 0$$

Que representa la magnitud del desplazamiento inicial y la velocidad inicial, respectivamente. Por ejemplo si $x_0 > 0$ y $v_0 < 0$, se trata de una masa que parte de un punto *abajo de* la posición de equilibrio y a la cual se ha comunicado una velocidad dirigida *hacia arriba*. Si $x_0 < 0$ y $v_0 > 0$, se trata de una masa en *reposo* que se suelta desde un punto que está $|x_0|$ unidades *arriba* de la posición de equilibrio. Los demás casos son análogos.

Solución y ecuación de movimiento:

Para resolver la ecuación $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$ observemos que las soluciones de la ecuación auxiliar $M^2 - \omega^2 = 0$ son los números complejo $M = i\omega$ y $M = -i\omega$. De esta forma se obtiene una solución general: $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$.

El **periodo** de las vibraciones libres descritas por la ultima ecuación general planteada es $T = 2\pi/\omega$ y la **frecuencia** es $f = 1/T = \omega/2\pi$. Por ejemplo, para $x(t) = 2 \cos 3t - 4 \sin 3t$ el periodo es $2\pi/3$ y la frecuencia es $3/2\pi$. El primer numero indica que hay 3 ciclos de la grafica de cada 2π unidades; en otras palabras, la masa realiza $3/2$ oscilaciones completas por unidad de tiempo. Además, se puede demostrar que el periodo $2\pi/\omega$ es el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos de $x(t)$. Finalmente, una vez que hemos determinado las constantes C_1 y C_2 en $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ mediante las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \quad dx/dt|_{t=0} = v_0$$

$$t = 0$$

, Decimos que la solución particular resultante es la **ecuación de movimiento**.

Ejemplo:

Resolver e interpretar el problema de valor inicial:

$$d^2x/dt^2 + 16x = 0$$

$$x(0) = 10, \quad dx/dt|_{t=0} = 0$$

$$x'(0) = 0$$

solución:

Una formulación equivalente del problema es: se estira hacia abajo de un cuerpo que pende de un resorte hasta que esté 10 unidades bajo la posición de equilibrio y luego se le retiene hasta $t = 0$; se le suelta a continuación de manera que parta de un estado de reposo. Aplicando las condiciones iniciales a la solución:

$$x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t.$$

$$\text{Resulta } x(0) = 10 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$$

de modo que $C_1 = 10$ y por lo tanto

$$x(t) = 10 \cos 4t + C_2 \sin 4t.$$

$$dx/dt = -40 \sin 4t + 4C_2 \cos 4t$$

$$dx/dt|_{t=0} = 0 = 4C_2 \cdot 1$$

$$x'(0) = 0$$

La última ecuación implica que $C_2 = 0$ y por lo tanto la ecuación de movimiento es $x(t) = 10 \cos 4t$.

La solución muestra claramente que una vez que el sistema se pone en movimiento, permanece en tal estado, con la masa deslazándose alternadamente 10 unidades hacia cada lado de la posición de equilibrio $x = 0$. El periodo de oscilación es $2\pi/4 = \pi/2$ segundos.

Ejemplo:

Un cuerpo que pesa 2lb. se estira un resorte 6plg. Dicho cuerpo se suelta en $t = 0$ desde un punto que está 8plg bajo la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de $4/3$ pie/seg. Determine la función $x(t)$ que describe el movimiento libre resultante.

solución:

Puesto que estamos usando el sistema de unidades inglesas gravitatorias, las magnitudes dadas en pulgadas deben expresarse en pies: 6plg = $6/12 = 1/2$ pie, 8plg = $8/12 = 2/3$ pie. Además, debemos convertir las unidades de peso en unidades de masa. $M = W/g$

Tenemos $M = 2/32 = 1/16$ slug; Además, por la Ley de Hooke se tiene: $2 = k(1/2)$ lo que implica que $k = 4$ lb/pie.

Por consiguiente, se tiene: $1/16 \, d^2x/dt^2 = -4x$ y $d^2x/dt^2 + 64x = 0$.

El desplazamiento y la velocidad iniciales están dados por :

$$x(0) = 2/3, \, dx/dt|_{t=0} = -4/3$$

$$x'(0) = -4/3$$

En donde el signo negativo que aparece en la última condición en consecuencia de que a la masa se le da una

velocidad inicial con dirección negativa, esto es, dirigida hacia arriba.

Ahora bien, $\omega^2 = 64$, o sea $\omega = 8$, de modo que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t.$$

Aplicando las condiciones iniciales a esta ecuación tenemos que:

$$x(0) = 2/3 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 \quad (C_1 = 2/3)$$

$$x(t) = 2/3 \cos 8t + 8C_2 \cos 8t$$

$$x'(t) = -16/3 \sin 8t + 8C_2 \cos 8t$$

$$x'(0) = -4/3 = -16/3 \cdot 0 + 8C_2 \cdot 1, \quad (C_2 = -1/6)$$

Luego $C_2 = -1/6$. Por consiguiente, la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = 2/3 \cos 8t - 1/6 \sin 8t.$$

Movimiento Vibratorio Amortiguado:

El estudio del movimiento armónico libre es un tanto irreal puesto que el movimiento descrito por la ecuación $-kx + mg - ks = -kx$ supone que no actúan fuerzas retardadas sobre la masa en movimiento. A menos que la masa esté suspendida en un vacío perfecto, por lo menos habrá una fuerza opuesta debida al medio que la rodea. Por ejemplo, como muestra la figura 5.8, la masa m podría estar suspendida en un medio viscoso o conectada a un mecanismo de amortiguación.

Ecuación diferencial del movimiento con amortiguación:

En los estudios de mecánica se supone que las fuerzas de amortiguación que actúan sobre un cuerpo son proporcionales a una potencia de la velocidad instantánea. En particular, supondremos en el estudio que sigue que esta Fuerza está dada por un múltiplo constante de dx/dt . Cuando no actúan otras fuerzas exteriores sobre el sistema, se tiene, por la segunda ley de Newton, que:

$$m \, d^2x/dt^2 = -kx - \gamma \, dx/dt$$

En donde γ es una *constante de amortiguación* positiva y el signo negativo se debe a que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta al movimiento.

Dividiendo $m \, d^2x/dt^2 = -kx - \gamma \, dx/dt$ entre la masa m se obtiene la ecuación diferencial del **movimiento vibratorio amortiguado libre**.

$$d^2x/dt^2 + \gamma/m \, dx/dt + (k/m)x = 0$$

$$\text{o bien } d^2x/dt^2 + 2 \gamma/m \, dx/dt + \omega^2 x = 0$$

En la ecuación $d^2x/dt^2 + \gamma/m \, dx/dt + (k/m)x = 0$ identificamos $2 \gamma/m = \gamma$, $\omega^2 = k/m$.

El símbolo γ se usa sólo por conveniencia algebraica ya que la ecuación auxiliar es $m^2 + 2 \gamma m + \omega^2 = 0$ y por lo tanto las correspondientes raíces son:

$$m_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 2k}, m_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2k}.$$

Según el signo algebraico de $\gamma^2 - 2k$, podemos distinguir tres casos posibles. Puesto que cada solución contendrá el *factor de amortiguación e*, siendo $\gamma > 0$, los desplazamientos de la masa volverán insignificantes para valores grandes del tiempo.

Caso I:

$\gamma^2 - 2k > 0$. En esta situación decimos que el sistema está **sobreamortiguado**, puesto que el coeficiente de amortiguación es grande comparado con la constante k del resorte. La correspondiente solución de $d^2x/dt^2 + 2\gamma dx/dt + 2kx = 0$ es $x(t) = C_1e^{m_1 t} + C_2e^{m_2 t}$

o bien:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - 2k} t} + C_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - 2k} t}).$$

Caso II:

$\gamma^2 - 2k = 0$. Decimos que el sistema está **críticamente amortiguado** ya que una pequeña disminución de la fuerza de amortiguación produciría un movimiento oscilatorio. La solución general será:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 + C_2 t)$$

Caso III:

$\gamma^2 - 2k < 0$. En este caso se dice que el sistema está **subamortiguado**, ya que el coeficiente de amortiguación es pequeño comparado con la constante del resorte. Las raíces m_1 y m_2 son ahora complejas. $m = -\gamma + i\sqrt{2k - \gamma^2}$ y $m = -\gamma - i\sqrt{2k - \gamma^2}$

y por lo tanto la solución general es:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 \cos(\sqrt{2k - \gamma^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{2k - \gamma^2} t)]$$

Ejemplo:

Un cuerpo que pesa 8lb. estira un resorte 2 pie. Suponiendo que una fuerza de amortiguación numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea actúa sobre el sistema y que el peso se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 3pie/s, determinar la ecuación del movimiento.

solución:

Por la ley de Hooke tenemos:

$$8 = k(2), k = 4\text{lb/pie}$$

$$\text{y por } m = W/g$$

$$m = 8/32 = 1/4\text{slug}.$$

En consecuencia, la ecuación diferencial del movimiento es:

$$1/4 d^2x/dt^2 = -4x - 2 dx/dt \text{ ó bien } d^2x/dt^2 + 8 dx/dt + 16x = 0$$

Las condiciones iniciales son:

$$x(0) = 0, \quad dx/dt|_{t=0} = -3$$

$$t = 0$$

Ahora bien, la ecuación auxiliar de $d^2x/dt^2 + 8 dx/dt + 16x = 0$ es:

$$m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$$

De modo que m_1 y $m_2 = -4$. Por lo tanto, el sistema está críticamente amortiguado y: $x(t) = -3te$ es la ecuación de movimiento.

Movimiento Vibratorio forzado con amortiguación:

Supongamos que se considera una fuerza $f(t)$ que actúa sobre una masa oscilante sujeta a un resorte. Por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza impulsora que causa un movimiento oscilatorio vertical del soporte del resorte. Al incluir $f(t)$ en la formulación de la segunda Ley de Newton resulta:

$$m \, d^2x/dt^2 = -kx - \gamma \, dx/dt + f(t).$$

$$[d^2x/dt^2 + \gamma \, dx/dt + (k/m)x = f(t)/m] = d^2x/dt^2 + 2 \, dx/dt + 2x = F(t)$$

En donde $F(t) = f(t)/m$ y, $2 = \gamma/m$, $2 = k/m$. Para resolver la última ecuación no homogénea podemos usar indistintamente el método de variación de parámetros o el de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo:

Interpretar y resolver el siguiente problema de valor inicial

$$1/5 \, d^2x/dt^2 + 1.2 \, dx/dt + 2x = 5 \cos 4t$$

$$x(0) = 1/2, \quad dx/dt|_{t=0} = 0.$$

$$t = 0$$

solucion:

Podemos interpretar el problema como una representación de un sistema oscilatorio que consiste en una masa ($m = 1/5$ Kg) sujeta a un resorte ($k = 2$ N/m). La masa se suelta, a partir del reposo, desde un punto que está $1/2$ unidad (metro) bajo la posición de equilibrio: El movimiento es amortiguado ($\gamma = 1.2$) y es impulsado por una fuerza externa periódica ($T = \pi/2$ segundos) a partir del instante $t = 0$. Intuitivamente, esperamos que aun con amortiguación el sistema se mantenga en movimiento hasta que el instante en que la función forzante se corte, en cuyo caso las amplitudes disminuirían gradualmente. Sin embargo, por la forma en que el problema está dado, se tiene $f(t) = 5 \cos 4t$ permanecerá en acción indefinidamente.

Primero multiplicamos $1/5 \, d^2x/dt^2 + 1.2 \, dx/dt + 2x = 5 \cos 4t$ por 5 y resolvemos la ecuación homogénea $d^2x/dt^2 + 6 \, dx/dt + 10x = 0$ Por los métodos usuales.

Como $m_1 = -3 + i$, $m_2 = -3 - i$ se tiene que:

$$x_c(t) = e^{-(3+i)t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados, postulamos una solución particular de la forma $x_p(t) = A \cos 4t + B \sin 4t$. En tal caso:

$$x_p' = -4A \sin 4t + 4B \cos 4t.$$

$$x_p'' = -16A \cos 4t - 16B \sin 4t.$$

$$\text{De modo que } x_p'' + 6x_p' + 10x_p = -16A \cos 4t - 16B \sin 4t - 24^a \sin 4t$$

$$= 24B \cos 4t + 10A \cos 4t + 10B \sin 4t$$

$$= (-6A + 24B) \cos 4t + (-24A - 6B) \sin 4t$$

$$= 25 \cos 4t$$

Del sistema de ecuaciones que resulta $-6A + 24B = 25$ y $-24A - 6B = 0$ da $A = -25/102$ y $B = 50/51$. Se tiene pues:

$$x(t) = e (C_1 \cos t + C_2 \sin t) - 25/102 \cos 4t + 50/51 \sin 4t$$

Si en la ecuación anterior hacemos $t = 0$ inmediatamente resulta $C_1 = 38/51$. Derivando la expresión y haciendo $t = 0$ encontramos que $C_2 = -86/51$. Por lo tanto, la ecuación del movimiento es:

$$x(t) = e (38/51 \cos t - 86/51 \sin t) - 25/102 \cos 4t + 50/51 \sin 4t$$

Términos transitorios y estacionario:

Nótese que la función complementaria $x(t) = e (38/51 \cos t - 86/51 \sin t) - 25/102 \cos 4t + 50/51 \sin 4t$ del ejemplo precedente tiene la propiedad de que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

$t!''$

Puesto que $x_c(t)$ se vuelve insignificante (es decir tiende a 0) cuando $t!''$, se dice que es un **termino transitorio** o una **solución transitoria**. Así, para valores grandes del tiempo, los desplazamientos del cuerpo se aproximan estrechamente por la solución particular $x(t)$. A esta última función también se la llama **solución estacionaria (o de estado permanente)**. Cuando F es función periódica como $F(t) = F_0 \sin t$ o bien $F(t) = F_0 \cos t$, la solución general consiste en:

$$x(t) = \text{termino transitorio} + \text{termino estacionario}.$$

Sin Amortiguación:

En ausencia de una fuerza de amortiguación, no habrá termino transitorio en la solución de un problema. Además veremos que la aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana, o igual, a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un problema serio en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

21

$m_1 t$

$m_2 t$

$$t$$

$$-t$$

$$-kNt$$

$$-(A_1 - B_2) t / (A_2 - B_2)$$

$$-(A_1 - B_2) t / (A_2 - B_2)$$

$$-3t$$

$$-20t$$

$$-20t$$

$$-5t$$

$$45kt$$

$$45kt$$

$$15k$$

$$15k$$

$$-t$$

$$-t$$

$$-(t^2 - 2)t$$

$$(t^2 - 2)t$$

$$-t$$

$$-t$$

$$-4t$$

$$-3t$$

$$-3t$$

$$-3t$$

$$-3t$$