

GLOSARIO No.1

Condiciones Iniciales

A menudo nos interesa resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones prescritas, que son las condiciones que se imponen a $y(x)$ o a sus derivadas. En algún intervalo I que contenga a x_0 , el problema

Resolver: $\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

dx^n

Sujeta a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$,

En donde $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas arbitrariamente, se llama problema de valor inicial. Los valores dados de la función desconocida, $y(x)$, y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto x_0 : $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ se llaman condiciones iniciales.

Condiciones De Linealidad

Se dice que una ecuación diferencial de la forma $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ es lineal cuando f es una función lineal de $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Esto significa que una ecuación es lineal si se puede escribir en la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$dx^n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

en esta última ecuación, vemos las dos propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales:

i) La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1.

ii) Cada coeficiente solo depende de x , que es la variable independiente.

Diferencial Exacta

Una ecuación diferencial $M(x,y) + N(x,y) \frac{dy}{dx}$ es una diferencial exacta en una región R del plano xy si corresponde a la diferencia de alguna función $F(x,y)$. Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Es una ecuación diferencial exacta o ecuación exacta, si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

dx

en que n es cualquier numero real, es la ecuación de Bernoulli. La sustitución $u = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de la forma anterior a una ecuación lineal.

ecuación Diferencial

Es una ecuación que contiene las derivadas de una o mas variables dependientes con respecto a una o mas variables independientes es una ecuación diferencial.

ecuación Diferencial Lineal

La forma general de una ecuación diferencial lineal de orden n es como sigue:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$dx^n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Recuérdese que linealidad quiere decir que todos los coeficientes solo son funciones de x y que y y todas sus derivadas están elevadas a la primera potencia. Entonces, cuando $n = 1$, la ecuación es lineal y de primer orden.

Factor Integrante

El factor integrante $e^{\int P(x)dx}$ se utiliza en las ecuaciones lineales y en las ecuaciones tipo bernoulli para poder obtener su solución.

Familia De Curvas

Una ecuación $F(x) + c$, donde c es una constante arbitraria que determina el desplazamiento vertical u horizontal de la grafica de la función, genera una familia de curvas.

función Homogénea

Cuando una función f tiene la propiedad

$$F(tx,ty) = t^a f(x,y)$$

Para un numero real a , se dice que es una función homogénea de grado a ; por ejemplo, $f(x,y) = x^3 + y^3$ es homogénea de grado 3, porque

$$F(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f(x,y).$$

mientras que $f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$ no es homogénea. Una ecuación diferencial de primer orden,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es homogénea si los coeficientes M y N , a la vez, son funciones homogéneas del mismo grado.

Grado De Una ecuación Diferencial

Para un numero real n , se dice que f es una función de grado n ; por ejemplo, $f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$ es de grado 3.

Orden de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial (ordinaria o en derivadas parciales) es el de la derivada de mayor orden en la ecuación. Por ejemplo,

$$d^2y + 5 [dy]^3 - 4y = ex$$

$$dx^2 dx$$

es una ecuación diferencial de segundo orden.

Método De Variables Separables

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$dy = g(x)h(x)$$

$$dx$$

es separable, o de variables separables.

Soluciones Explicitas E Implícitas

Una solución en el que las variables dependientes se expresan tan solo en términos de la variable independiente y constantes, se llama solución explícita. Una relación $G(x,y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria, como la ecuación satisfaga la relación, y la ecuación diferencial, en I. En otras palabras, $G(x,y) = 0$ define implícitamente a la función .

solución General

Si toda solución de una ecuación de orden n , $F(x, y, y', \dots, y(n)) = 0$, en un intervalo I , se puede obtener de una familia n -paramétrica $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ con valores adecuados de los parámetros $c_i (i = 1, 2, \dots, n)$, se dice que la familia es la solución general de la ecuación diferencial.

solución Particular

Una solución de una ecuación diferencial que no tiene parámetros arbitrarios se llama solución particular; por ejemplo, podemos demostrar que, por sustitución directa, toda función de la familia monoparamétrica $y = cex$ también satisface la ecuación

$$dy = 2xy$$

$$dx$$

solución Singular

En algunos casos, una ecuación diferencial tiene una solución que no se puede obtener particularizando alguno de los parámetros en una familia de soluciones. Esa solución se llama solución singular.

Teorema De Existencia Y Unicidad

Sea R una región rectangular del plano xy , definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contiene al punto (x_0, y_0) . Si

$f(x,y)$ y f'' y son continuas en F , entonces existe un intervalo I ,

CONTROL DE LECTURA No.1

¿ Qué Es Una Ecuación Diferencial ?

Se llama ecuación diferencial a una ecuación que liga la variable independiente x , la función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$, es decir, una ecuación de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

En otras palabras, se llama ecuación diferencial a una ecuación en la que figura la derivada o la diferencial de la función incógnita.

¿Cómo Se Clasifican Las Ecuaciones Diferenciales ?

* TIPO

Ordinarias y parciales

Para desarrollar sistemáticamente la teoría de las ecuaciones diferenciales, es útil clasificar los diferentes tipos de ecuaciones. Una de las clasificaciones mas obvias se basa en si la función desconocida depende de una o de varias variables independientes. En el primer caso solo aparecen derivadas ordinarias en la ecuación diferencial y se dice que es ecuación diferencial ordinaria. En el segundo caso, las derivadas son parciales y la ecuación se llama ecuación diferencial parcial.

Ejemplos de las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t).$$

1. -

2. -

* Clasificación De Las Ecuaciones Diferenciales.

* ORDEN.

El orden de una ecuación diferencial ordinaria, es igual al de la derivada de mas alto orden que aparece en la ecuación. Por lo tanto, la ecuación (1) y (2) son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

*GRADO.

Es la potencia a la que esta elevada la derivada mas alta, siempre y cuando la ecuación diferencial este dada en forma polinomial.

Hay otra clasificación importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias la cual se basa en si éstas son lineales o no lineales. Se dice que la ecuación diferencial

Es lineal cuando F es una función lineal en las variables $y, y', y^{(n)}$. Por lo tanto, la ecuación diferencial

ordinaria lineal de orden n es . 3.-

La ecuación que no es de la forma (3), es un ecuación no lineal.

Un problema físico sencillo que de origen a una ecuación diferencial no lineal es el péndulo oscilante.

LINEALES: variantes e invariantes en el tiempo.

Las ec diferenciales lineales pueden clasificarse en ecuaciones diferenciales, lineales, invariantes en el tiempo y ec. Lineales variantes en el tiempo.

La ec. Diferencial lineal invariante en el tiempo.

Es aquella en la cual una variable dependiente y sus derivadas aparecen como combinaciones lineales.

Ejemplo: (4)

Puesto que los coeficientes de todos los términos son constantes, una ec. Diferencial lineal invariante en el tiempo también se denomina ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.

En el caso de una ecuación diferencial lineal variante en el tiempo la variable dependiente y sus derivadas aparecen como combinaciones lineales, para algunos de los coeficientes de los términos pueden involucrar a la variable independiente.

Ejemplo: (5)

Es importante recordar que un objeto de que sea lineal, la ec. No debe contener potencias productos u otras funciones de las variables dependientes y sus derivadas

Origen De Las Ecuaciones Diferenciales (Modelos Físicos).

* Modelos Físicos, Modelos Matemáticos

Cualquier tentativa de diseño de un sistema debe empezar a partir de una predicción de su funcionamiento antes de que el sistema pueda diseñarse en detalle o construirse físicamente.

Tal predicción se basa en una descripción matemática de las características dinámicas del sistema. A esta descripción se le llama modelo matemático. Para los sistemas físicos, la mayoría de los modelos matemáticos que resultan útiles se describen en términos de ecuaciones diferenciales.

GLOSARIO No.2

Coeficientes Indeterminados

Supongamos que $L(y) = g(x)$ es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, y que la entrada $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de las funciones mencionadas, esto es, que $g(x)$ es una combinación lineal de funciones de la forma.

$k(\text{constante}), x^m, x^{meax}, x^{meax}\cos Bx$ y $x^{meax}\sin Bx,$

en donde m es un entero no negativo y B son números reales. Ya sabemos que esa función $g(x)$ se puede anular con un operador diferencial, L_1 , de orden mínimo, formado por un producto de los operadores D_n , (D

–)n y $(D^2 - 2D + B^2)n$. Aplicamos $L1$ a ambos lados de la ecuación $L(y) = g(x)$ y obtenemos $L1(y) = L1(g(x)) = 0$.

Conjunto Fundamental De Soluciones

Todo conjunto $y_1, y_2, \dots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n , en un intervalo I , se llama conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.

Dependencia O Independencia Lineal

Se dice que un conjunto de funciones, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes, $C_1, C_2, \dots, C_n$ no todas cero, tales que

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x) = 0$$

Para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

ecuación Auxiliar

Comenzaremos con el caso especial de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

Si probamos con una solución de la forma $y = emx$, entonces $y' = memx$ y $y'' = m^2 emx$, de modo que la ecuación (2) se transforma en

$$am^2 emx + bmemx + cemx = 0 \text{ o sea } emx(am^2 + bm + c) = 0$$

Como emx nunca es cero cuando x tiene valor real, la única forma en que la función exponencial satisface la ecuación diferencial es eligiendo una m tal que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0$$

Esta ecuación se llama ecuación auxiliar o ecuación característica.

función Complementaria

La combinación lineal $y_c(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$, que es la solución general de (6), se llama función complementaria para la ecuación (7). En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial no homogénea primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se determina cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es, entonces,

$$Y = \text{función complementaria} + \text{cualquier solución particular}$$

Ecuaciones lineales homogéneas

Una ecuación lineal de orden n de la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0$$

$$dx^n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0$$

se llama homogénea, mientras que una ecuación

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

$$dx^n dx^{n-1} dx$$

donde $g(x)$ no es idénticamente cero, se llama no homogénea.

Ecuaciones Lineales No homogéneas

Toda función y_p libre de parámetros arbitrarios que satisface la ecuación (7) se llama solución particular o integral particular de la ecuación; por ejemplo, se puede demostrar directamente que la función constante $y_p = 3$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 9y = 27$.

Dependencia O Independencia Lineal

Se dice que un conjunto de funciones, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes, $C_1, C_2, \dots, C_n$ no todas cero, tales que

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x) = 0$$

Para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

Método De Variación De parámetros

Para resolver $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$, primero se halla la función complementaria $y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$, y después se calcula el wronkiano $W(y_1(x), y_2(x))$. Se divide entre a_2 para llevar la ecuación a su forma reducida $y'' + P y' + Q y = f(x)$ para hallar $f(x)$. Se determina u_1 y u_2 integrando, respectivamente $u_1 = W_1/W$ y $u_2 = W_2/W$, donde se define W_1 y W_2 de acuerdo con (7). Una solución particular es $Y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, la solución general de la ecuación es, por consiguiente, $y = y_c + y_p$.

Operador Diferencial

En cálculo, la diferenciación suele indicarse con la D mayúscula; esto es $dy/Dx = Dy$. El símbolo D se llama operador diferencial porque transforma una función diferenciable en otra función; por ejemplo, $D(\cos 4x) = -4\sin 4x$ y $D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x$. Las derivadas de orden superior se pueden expresar en términos de D en forma natural:

$$D(dy) = D^2 y = D(Dy) = D^2 y \text{ y en general } D^n y = D^n y$$

$$dx \, dx^2 \, dx^n$$

en donde y representa una función suficientemente diferenciable.

Principio De Superposición

Sean k soluciones particulares $y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pn}$ de la ecuación (7), diferencial lineal no homogénea de orden n , en el intervalo que, a su vez, corresponden a k funciones distintas, $g_1, g_2, \dots, g_k$. Esto es, supongamos que y_p representa una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente.

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x),$$

en donde $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces

$$y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pn}(x)$$

es una solución particular de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x)$$

Wronskiano

Supóngase que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ posee $n-1$ derivadas al menos. El determinante

CONTROL DE LECTURA No.2

Derivadas Totales.

En algunos casos x, y no son variables independientes en la función $Q=f(x,y)$ ya que tanto x como y pueden estar en función de una tercera variable t es decir, $X=f(t), y=f(t)$ valores que se sustituyen en la función Q , esta se convierte en una función de una sola variable t y su derivada puede encontrarse de manera ordinaria o mediante la expresión.

de la misma forma se obtiene para una función de un numero cualquiera de variables, esto es:

Ecuaciones Exactas.

La igualdad $M(x,y) dx + N(x,y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta el primer miembro es una diferencial total.

Es decir: Si $df = f_x dx + f_y dy$ por lo tanto $f_x dx + f_y dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta y $f_x = M(x,y)$, y $f_y = N(x,y)$.

Encontrar la solución de una ecuación diferencial exacta es hallar una función $f(x,y)$ tal que su diferencial total sea exactamente la ecuación diferencial dada

Para que una ecuación sea exacta es necesario que se cumpla la condición siguiente:

Ecuación Integral Con Factor Integrante.

Si existe una función $F(x,y)$ tal que $f(x,y)M(dx) + f(x,y)N(dy) = 0$ es exacta entonces $f(x,y)$ se llama factor de integración de la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$

Conviene notar que una ecuación diferencial no exacta puede tener varios factores de integrantes es decir, puede convertirse en exacta multiplicándola por:

sirve para que una ecuación no exacta sea exacta.

Método Para Encontrar El Factor Integrante.

- Por inspección de la ecuación diferencial suponemos una función que luego se prueba con el teorema.
- si el factor es solo función de x .

si el factor es solo función de y.

GLOSARIO No.3

Definición de transformada de Laplace

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

se llama transformada de Laplace de f , siempre y cuando la integral converja.

Función Escalón Unitario

En ingeniería se presentan con mucha frecuencia funciones que pueden estar encendidas o apagadas. Por ejemplo, una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico o un voltaje aplicado a un circuito se pueden apartar después de cierto tiempo. Por ello, conviene definir una función especial, llamada función escalón unitario.

Función De Orden Exponencial

Se dice que una función f es de orden exponencial c si existen constantes c , $M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq M e^{ct}$ para todo $t > T$.

Función Seccionalmente Continua

Una función es continua por tramos en $[0, \infty)$ si, en cualquier intervalo $0 \leq t \leq b$ hay, cuando mucho, una cantidad finita de puntos t_k , $k = 1, 2, \dots, n$ ($t_{k-1} < t_k$) en los cuales f tiene discontinuidades finitas y es continua en todo intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$.

Integral De Convolucion

Si las funciones f y g son continuas parte por parte en $[0, \infty)$, la convolucion de f y g se representa por $f * g$ y se define como la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Fracciones Parciales

Usted ya sabe como combinar dos o mas expresiones racionales a fin de obtener una expresión racional mediante adición o sustracción. Por ejemplo,

$$\frac{3}{x+4} + \frac{7}{x-1}$$

$$\frac{x+2}{x-3} + \frac{2x-3}{x+2}$$

en ocasiones es necesario invertir el proceso, es decir, representar una expresión racional simple como una suma de dos o mas cocientes simples, denominados fracciones racionales. En calculo se necesita hacer esto a fin de efectuar la operación de integración de algunas funciones racionales. Con frecuencia se emplean sistemas de ecuaciones para descomponer una expresión racional en fracciones parciales.

$$H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Se asumirá que se tiene una fracción propia, esto es, una fracción por la cual el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. Si se tiene una función racional para la cual el grado del numerador no es menor que el grado del denominador entonces se tiene una fracción impropia, y en este caso se divide el numerador entre el denominador entonces se tiene una fracción impropia, y en este caso se divide el numerador entre el denominador hasta que se obtenga una fracción propia.

Método De Heaviside

Esta observación va dirigida a quienes se les pidan descomposiciones en fracciones parciales a mano. Hay otra forma de determinar los coeficientes en esas descomposiciones, en el caso especial cuando $\mathcal{L}\{f(t)\} = P(s) / Q(s)$, donde P y Q son polinomios, y Q es un producto de factores distintos:

$$F(s) = P(s)$$

$$(s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)$$

Teorema De Traslación

Si conocemos $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, podemos hallar la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ sin más que trasladar, o desplazar, $F(s)$ a $F(s - a)$. Este resultado se llama primer teorema de translación.

Transformada Inversa

Dada $F(s)$, hallar la función $f(t)$ que corresponde a esa transformada. Se dice que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y se expresa:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Transformada De Una Funcion Periodica

Si el periodo de una función periódica es $T > 0$, entonces $f(t + T) = f(t)$. se puede determinar la transformada de Laplace de una función periódica por una integración sobre un periodo.

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T ,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

$$1 - e^{-st}$$

CONTROL DE LECTURA No. 3

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Una ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Es exacta si existe una función $\psi(x,y)$ tal que

$$d\psi(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Prueba De Exactitud:

Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en algún rectángulo del plano xy , entonces la ecuación.

$$M(x,y)dx + N(x,y) dy = 0.$$

Es exacta si, y solamente si.

Si es exacta se pasa a resolver el diferencial por medio de algún método como la integración parcial.

Factor Integrante:

En general la ecuación diferencial.

$$M(Mdx+Ndy)=0$$

No es exacta por lo tanto, se trata de elegir una porción M que pueda depender tanto de x como de y de tal manera que la ecuación.

$$M(Mdx + N dy)=0$$

Sea exacta la función M se llama **factor integrante**, entonces la ecuación:

$$M(Mdx+Ndy)=0$$

Se puede resolver por los métodos que se resuelven las ecuaciones exactas o por integración directa.

¿Cómo Hallar Un Factor Integrante?

De la prueba de exactitud, se deduce que el factor de integración es una solución para cierta ecuación diferencial parcial. Sin embargo, es generalmente más difícil de resolver que la ecuación diferencial original en consideración. En consecuencia los factores de integración se obtienen generalmente por inspección.

CONTROL DE LETURA NO.4

Ley De Enfriamiento De Newton

La ley de Newton sobre el enfriamiento establece que: la rata de cambio en tiempo de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y el medio ambiente.

Se hace T igual a la temperatura del cuerpo y T_m la temperatura del medio ambiente. Entonces, el tiempo necesario para el cambio de temperatura del cuerpo es dT/dt y la ley de enfriamiento de Newton puede formularse como:

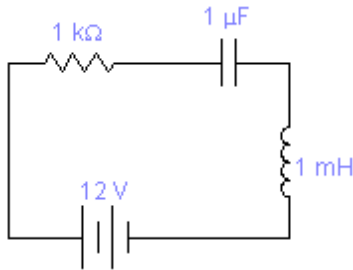
donde k es una constante positiva de proporcionalidad. Una vez que k se escoge positiva, el signo menos se necesita en la ley de newton para hacer dT/dt negativo en el proceso de enfriamiento. Notese que en este proceso, T es mayor que T_m ; entonces $(T-T_m)$ es positivo.

Aplicación De Las Ecuaciones Diferenciales En Circuitos Eléctricos

Considérese el flujo de la corriente eléctrica en un circuito sencillo en serie. La corriente $I=i(t)$ (medida en amperes) es una función del tiempo t . La resistencia R (ohms), la capacitancia C (en farads) y la

inductancia L (en henrys) son todas positivas y, en general, pueden depender del tiempo t y la corriente I . Para una gran variedad de aplicaciones, esta dependencia puede despreciarse; se supondrá que R , C y L son constantes conocidas. El voltaje aplicado E (volts) es una forma dada del tiempo frecuentemente de la forma $E_0 \cos \omega t$. Otra consideración física que aparecerá en estas condiciones es la carga total:

dado en coulombs del capacitor, en el instante t . La carga Q está relacionada con la corriente I por:



El flujo de corriente en el circuito bajo condiciones dichas se expresa por la segunda ley de Kirchhoff: En un circuito cerrado, el voltaje aplicado es igual a la suma de las caídas del voltaje en el resto del circuito.

De acuerdo a las leyes fundamentales de electricidad, se sabe que:

- a) Caída de voltaje a través de la resistencia = IR
- b) Caída de voltaje a través del capacitor = $(1/c)(Q)$
- c) Caída de voltaje a través de la inductancia = $L(dI/dt)$

Por lo tanto:

La teoría de los circuitos eléctricos, que consisten de inductancias, resistores y capacitores, se basa en las leyes de Kirchhoff: El flujo neto de corriente a través de cada nodo es cero es cero.

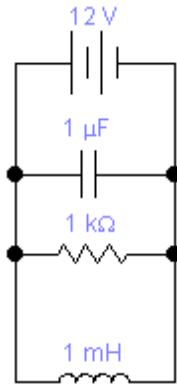
La caída neta de voltaje alrededor de cada circuito cerrado es cero.

Además de las leyes de Kirchhoff, se tiene la relación entre la corriente I en amperes, a través de cada elemento del circuito, y la caída de voltaje V en volts, a través de ese elemento; a saber,

$V=RI$ R = resistencia en ohms

$C(dv/dt)$ C = capacitancia en farads

$L(di/dt)$ L = inductancia en henrys



Las leyes de Kirchhoff y la relación corriente– voltaje para cada circuito proporcionan un sistema de ecuaciones algebraicas y diferenciales, a partir de las cuales puede determinarse el voltaje y la corriente en todo el circuito.

CLOSARIO No.4

Criterios De Convergencia

Dado un valor de x , una serie de potencias es una serie de constantes. Si la serie equivale a una constante real finita para la x dada, se dice que la serie converge en x . Si no converge en x , se dice que diverge en x .

ecuación De Besses

La solución en serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n} + v$ se suele representar mediante $J_v(x)$:

$$J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n+v}}{n! (1+v+n) 2^n}$$

$$\text{no } n! (1+v+n) 2^n$$

si $v \neq 0$, la serie converge al menos en el intervalo $[0, \infty)$. también, para el segundo exponente $r_2 = -v$, obtenemos, exactamente del mismo modo,

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{2n-v}}{n! (1-v+n) 2^n}$$

$$\text{no } n! (1-v+n) 2^n$$

Las funciones $J_v(x)$ y $J_{-v}(x)$ se llaman funciones de Besses de primera clase o de primera especie, de orden v y $-v$, respectivamente.

ecuación De Cauchy – Euler

Toda ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

$$dx^n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

donde los coeficientes a_n y $a_{n-1}, \dots, a_0$ son constantes, tiene los nombres de ecuación de Cauchy – Euler o ecuación equidimensional. Las características observables de este tipo de ecuación es que el grado $k = n, n-1, \dots, 0$ de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden de la diferenciación, $d^k y / dx^k$.

función Analítica En Un Punto

En calculo infinitesimal se demuestra que funciones como e^x , $\cos x$ y $\ln(x-1)$ se pueden representar por medio de una serie de potencias desarrolladas en series de Maclaurin o de Taylor. Se dice que una función f es analítica en el punto a si se puede representar por una serie de potencias en $x-a$, con el radio de convergencia positivo. La noción de analiticidad en un punto será de importancia.

Intervalo De Convergencia

Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia, que es el conjunto de los números para los cuales converge la serie.

Método de Frobenius

Para resolver una ecuación diferencial en torno a un punto singular, se aplica el siguiente teorema, debido a Georg Ferdinand Frobenius.

Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación, existe al menos una solución en serie de la forma :

$$Y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$$

$$r \neq 0 \text{ no}$$

en donde el numero r es una constante por determinar. Esta serie converge cuando menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < R$.

Punto Ordinario

Se dice que un punto x_0 es punto ordinario de la ecuación diferencial si $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en x_0 .

Punto Singular

Se dice que un punto que no es ordinario es un punto singular de la ecuación. Es singular real si tanto $(x - x_0)P(x)$ como $(x - x_0)Q(x)$ son analíticas en x_0 . Se dice que es un punto singular que no es regular es un punto singular irregular de la ecuación.

Series De Potencias

Una serie de potencias en $x-a$ es una serie infinita de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$. también, se dice que esa serie es una serie de potencias centradas en a ; por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n$$

$$x^2$$

es una serie de potencias en x centrada en cero.

Existencia Y Unicidad

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial, siempre se pueden determinar dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias centradas en x_0 :

$$y = c_n(x - x_0)^n$$

no

Una solución en forma de serie converge, cuando menos, para $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia de x_0 , al punto singular (real o complejo) mas próximo.

CONTROL DE LECTURA No.5

Ecuación De Cauchy – Euler

Toda la ecuación diferencial lineal de la forma

donde las coeficientes son constantes, tienen los nombres de ecuación de CAUCHY–EULER, ecuación de EULER–CAUCHY ecuación equidimensional.

La característica observable de este tipo de ecuaciones es que el grado $k=n, n-1, \dots$, o de los coeficientes monomiales x coincide con el orden k de la diferenciación,

caso1 **RAICES REALES DISTINTAS:**

caso 2 **RAICES REALES REPETIDAS:**

caso 3 **RAICES COMPLEJAS CONJUGADAS:**

SERIE DE POTENCIAS:

Una serie de cuyos términos son monomios de potencias enteras, positivas y ascendentes de una variable, digamos X de la forma

En donde los coeficientes son independientes de X , se llama una serie de potencias en x .

Una serie de potencias de x puede converger para todos los valores de X , o para ningún valor con excepción de $x=0$, o puede converger para algunos valores de X distintos de cero y ser divergente para otros valores

Serie De Potencia De

Puntos Ordinarios Y Singulares:

Supongamos que la ecuación diferencial lineal de segundo orde

Se expresa en forma reducida

dividiéndola entre el primer coeficiente,,

PUNTOS ORDINARIOS Y PUNTOS SINGULARES. Se dice que un punto X es punto ordinario de la ecuación diferencial (1) si $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en X . Se dice que un punto que no es ordinario es un punto singular de la ecuación.

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t).$$

$$m\frac{d^2U(t)}{dt^2}=F\left(t,U(t),\frac{du(t)}{dt}\right)$$

$$F\Bigl(x,y,y,y,y,...,y^{(n)}\Bigr)=0$$

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=g(x)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+10x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(1-\cos 2t)x=0$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{u}{x}\frac{dx}{dt}+\frac{u}{y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{u}{x}\frac{dx}{dt}+\frac{u}{y}\frac{dy}{dt}+\frac{u}{z}\frac{dz}{dt}.....$$

$$\frac{M}{y}=\frac{N}{x}$$

$$x^2,xy,\frac{y}{x},\frac{x}{y},x^2y,etc.$$

$$f(x)=e^{-\int v(x)dx}$$

$$\text{para } p(x)=\frac{My-Nx}{N}$$

$$f(x)=e^{-\int v(y)dv}$$

$$\text{donde } p(x)=\frac{My-Nx}{N}$$

$$a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y=g(x)$$

$$a_nx^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$x-a = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots C_n(x-a)^n$$

$$a=0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n = C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + \dots C_n X^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots \frac{X^n}{n!} + \dots$$

$$\cos X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} + \dots \frac{X^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} + \dots \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^x, \operatorname{sen}(x), \cos(x)$$

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2)$$

f1 f2 ... fn

f1 f2 ... fn

...

W(f1,f2, ..., fn) = ...

...

f1(n-1) f2(n-1) fn(n-1)

0, 0 < t < a

La función $(t - a) =$

1, t > a

$$\frac{M(x, y)}{y} = \frac{N(x, y)}{x}$$

$$dT/dt = -k(T - T_m), \text{ o como}$$

$$dT/dt + kt = kT_m$$

$$L\frac{dT}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t)$$