

ELEMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO. GRUPO E.
EXAMEN FINAL. 8/2/2000

X- (2 puntos)

- a) Definición de supremo de un conjunto de números reales.
- b) Enunciar y demostrar la propiedad fundamental del supremo.
- c) Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}$ existen sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, siendo $x_n \in \mathbb{Q}$ e $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

X- (2 puntos)

- a) Demostrar que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, y $c \in (a, b)$, entonces existen $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.
- b) ¿Qué tipo de discontinuidades pueden tener las funciones monótonas en un intervalo cerrado acotado?
- c) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xE(x)$.
¿Es f monótona en $[-1, 1]$? ¿y en $(-1, 1)$?
¿Es f continua en $[-1, 1]$? ¿y en $(-1, 1)$?

X- (2 puntos)

- a) Enunciar el Teorema Fundamental del Límite, para el caso de límite finito cuando x tiende a $+\infty$, es decir, para el caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.
- b) Enunciar la regla de L'Hôpital para el caso de indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, cuando $x \rightarrow +\infty$.
- c) Aplicar los dos teoremas anteriores para el cálculo del límite de la sucesión de término general $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $n \in \mathbb{N}$, con $\alpha > 0$ fijo.

X- (3 puntos)

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2x}{\pi}\right) & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{1-x}\right) & \text{si } x \in (0, 1) \\ \frac{2}{\pi}(x-1) + 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f .
- b) Calcular los extremos relativos y absolutos de f en $\mathbb{R}$, si existen.
- c) Sea $c \in (0, 1)$. Demostrar que la ecuación $f(x) = c$ tiene una única raíz positiva.

X- (1 punto)

Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$$

$\begin{matrix} \sin x \\ \hline x - \sin x \end{matrix}$
 $\downarrow$
 $\frac{\sin x}{x - \sin x}$