

1º EXAMEN DE MATEMATICAS I

- Discutir según los valores de a , el sistema:

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = 1$$

$$x + y + az = 1$$

- Resolver la ecuación matricial $XA=B+C$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$110$$

$$010$$

$$012$$

- Utilizando las propiedades de los determinantes calcular el valor de:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$$

- Hallar las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x=y$ que distan 1 del plano $2x-y+2z=2$
- Dadas las rectas:

$$r \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}$$

$$s \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.

b) Hallar la distancia entre ellas

- En el lanzamiento de un dado se consideran los tres sucesos siguientes:

A= Sale un número impar

B= Sale un número par

C= Sale el 1 o el 2

Se pide:

- ¿Son independientes A y B?
- ¿Son independientes A y C?
- Calcular $P(A/C)$?
- En una caja hay 6 bolas numeradas, 3 de ellas con números positivos y las otras 3 con números negativos. Se extrae una bola y después otra sin reemplazamiento.
- Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.
- Calcular la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

SOLUCIONES

- Discutir según los valores de a, el sistema.

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = 1$$

$$x + y + az = 1$$

$$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a$$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$a = 1$$

$$a = -2$$

$$a = 1 \quad |A| = 0 \quad \text{Rg}(A) = 1$$

$$a = -2 \quad |A| = 0 \quad \text{Rg}(A) = 2$$

$$a = 1, -2 \quad |A| = 0 \quad \text{Rg}(A) = 3$$

$$A^* = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\text{Si } a=1 \quad |A^*|=0 \quad \text{Rg } A^*=1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Si } a=-2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4+1+1+2+2-1=9 \neq 0$$

$$\text{Si } a=-2$$

$$|A^*| \neq 0 \quad \text{Rg } A^*=3$$

CONCLUSIÓN

$$\text{Si } a=1 \quad \text{Rg } A=1$$

$$\text{Rg } A^*=1 \quad \text{S.C.I.}$$

$$N \text{ incog}=3$$

$$\text{Si } a=-2 \quad \text{Rg } A=2$$

$$\text{Rg } A^*=3 \quad \text{S.I.}$$

$$\text{Rg } A=3$$

$$\text{Si } a \neq -2, 1 \quad \text{Rg } A^*=3 \quad \text{S.C.D.}$$

$$N \text{ Incog}=3$$

- Resolver la ecuación matricial $XA=B+C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$XA = B + C$$

$$X = (B + C) A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (AdjA)'$$

$$|A| = 1$$

$$AdjA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; (AdjA)' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

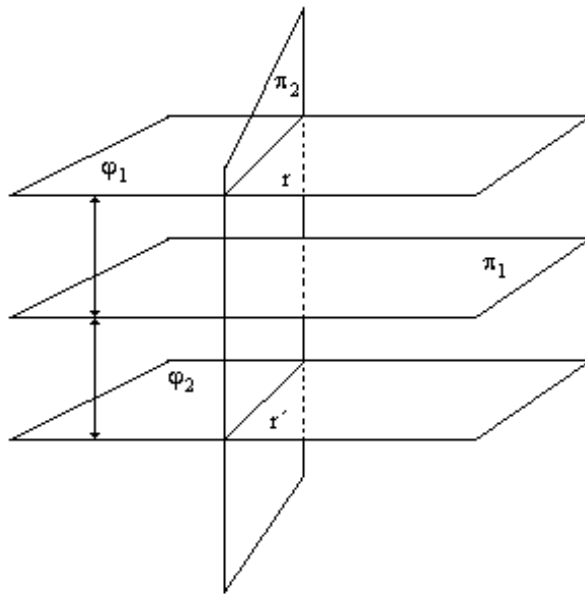
$$x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

- Utilizando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = x \cdot 0 = 0$$

4. Hallar las ecuaciones del lugar geométrico de todos los puntos del plano $x=y$ que distan 1 del plano

$$2x - y + 2z = 2$$



Plano π_1 $x = y$

Plano π_2 $2x - y + 2z - 2 = 0$

Se tiene que cumplir que:

_ Equidisten en el plano π_1

_ Disten 1 de π_2

$$d(P, \pi_2) = \frac{|2x - y + 2z - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 1$$

$$|2x - y + 2z - 2| = 3$$

Va a tener 2 soluciones:

$$\varphi_1 : 2x - y + 2z - 2 = -3 \quad 2x - y + 2z - 5 = 0$$

$$\varphi_2 : 2x - y + 2z - 2 = 3 \quad 2x - y + 2z + 1 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas r y r' será donde se crucen

$$r = \pi_1 \quad \varphi_1 \quad \begin{aligned} x &= y \\ 2x - y + 2z - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \lambda$$

$$y = \lambda$$

$$z = \frac{5 - \lambda}{2}$$

$$r' = \pi_1 \quad \varphi_2 \quad \begin{aligned} 2x - y + 2z + 1 &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$x = \lambda$$

$$y = \lambda$$

$$z = \frac{-1 - \lambda}{2}$$

• Dadas las rectas:

$$r \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}$$

$$s \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio.

b) Hallar la distancia entre ellas.

$$\begin{array}{ll} r & \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \begin{array}{l} \vec{v}_r(3, 2, 4) \\ A(3\lambda + 1, 2\lambda - 2, 4\lambda + 1) = (1, -2, 1) \end{array} \\ s & \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \begin{array}{l} \vec{v}_s(-1, 2, 3) \\ B(-\lambda - 2, 2\lambda + 3, 3\lambda + 2) = (-2, 3, 2) \end{array} \end{array}$$

a)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

