ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN UNO

INTRODUCCIÓN:

Supongamos una ecuación de la forma:

$$y = f(x)$$

tal que es derivable n
veces, es decir, existen:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, y^{(n} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Entonces a toda ecuación implícita del tipo:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n}\right) = 0$$

Se le llama ECUACIÓN DIFERENCIAL. En esta asignatura tratamos de encontrar la función $y = f(x)$ que verifica la ecuación diferencial.

CONCEPTOS BÁSICOS:

DEFINICIÓN: Dada una ecuación diferencial, definimos su ORDEN como la mayor derivada de la ecuación, y su grado como el máximo grado de la ecuación.

DEFINICIÓN: Como al derivar las constantes desaparecen, nos encontraremos a menudo conque existen infinidad de ecuaciones que verifican una ecuación diferencial, difiriendo entre ellas en una solo constante. A ese conjunto genérico de funciones, que forman una familia de curvas, se le llama SOLUCIÓN GENERAL o INTEGRAL GENERAL de la ecuación diferencial. Si me dan unas ciertas condiciones iniciales, es posible quedarse únicamente con una de ellas, la que verifica dichas condiciones, y a la que se le llama SOLUCIÓN PARTICULAR o INTEGRAL PARTICULAR de la ecuación diferencial. Asimismo, es posible que existan funciones que, sin pertenecer a la familia de curvas, sean solución de la ecuación diferencial. A estas curvas se les llama SOLUCIÓN SINGULAR de la ecuación diferencial. Dichas curvas son las envolventes de la solución general.

OBSERVACIÓN: Cabe preguntarse, dada una ecuación diferencial, si siempre existirá solución para ella, y si en caso de existir, será única. Hay un teorema, cuya demostración y enunciación precisas no entran en la materia de este curso, que así nos lo certifica, dadas las siguientes premisas:

- Si F es continua en un rectángulo de centro (a,b), de dimensiones $(2p,2q)$, y abierto, entonces, la ecuación tiene solución.
- Si además, se verifica que la parcial de F con respecto a y' es continua en un punto del rectángulo anterior, y las condiciones iniciales pertenecen al rectángulo, entonces la solución particular en dicho punto es única.

<u>OBSERVACIÓN:</u> Si la ecuación es lineal, es decir, el orden es 1, entonces la primera condición es suficiente para asegurar la unicidad.

<u>CÁLCULO:</u> La diferencial de una familia de curvas se obtiene derivando la expresión derivando la expresión de la familia tantas veces como parámetros tenga. Mediante las ecuaciones así obtenidas se eliminan los parámetros de la ecuación, consiguiendo así la ecuación diferencial.

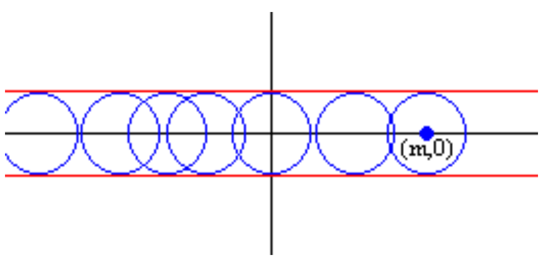
<u>ESQUEMA:</u> La resolución de los problemas de ecuaciones diferenciales se puede resumir un esquema como el de la derecha:

- Derivar respecto a x
  y eliminar c
- Resolver la ecuación integrando.
- Derivar respecto a y
  y eliminar y
- Derivar respecto a c
  y eliminar c

<u>EJEMPLO:</u>

Sea la familia de curvas:

$$(x-m)^2+y^2=9$$



Consistente en todas las circunferencias de radio 3
unidades con centro en el eje x

Derivando:

$$2(x-m)+2yy\ =0$$

Resolviendo:

$$(x-m)=-yy$$

$$y^2y^{\ 2}+y^2=9$$

Que es la expresión diferencial de la familia de curvas, pues cualquier curva de la familia la verifica. Además, existen dos soluciones singulares, que también verifica la ecuación diferencial y son las rectas $y=3$, $y=-3$.

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES:

OBSERVACIÓN: En este apartado trabajaremos con $F(x, y, y) = 0$

- Ec. Diferenciales de variables separables:

Son de la forma:

$$P(x)\ dx + Q(y)\ dy = 0$$

Integrando por cuadraturas:

$$P(x)\ dx + \quad Q(y)\ dy = k \quad k \quad R$$

Ejemplo:

$$(x-4)y^4 dx - x^3(y^2 - 3)dy = 0$$

$$\frac{x-4}{x^3}dx = \frac{y^2-3}{y^4}dy \qquad \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\ dx = \frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\ dy$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + C \qquad (2-x)y^3 - (1-y^2)x^2 = Cx^2y^3$$

Es la solución general, dada en forma paramétrica.

- Ec. Diferenciales homogéneas:

Son aquellas en las que todos los sumandos tiene el mismo grado. Un ejemplo sería:

$$x^2 y + 18x^3 = 0$$

Asimismo, se dice que una ecuación $G(x, y)$
es homogénea si al hacer el cambio:

$$x = mx$$
$$y = my$$

Queda $m^t \quad G(x, y)$
. En tal caso la ecuación es homogénea de grado t

Para resolverlas se separa en dos sumandos, de la forma:

$$P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Dividiendo arriba y abajo por x^n

, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)}$$

Haciendo el cambio:

$$y = z \quad x$$
$$y \ = z \quad x + z$$

Nos queda reducida a variables separadas:

$$z \quad x + z = f\left(\ z\right)$$

Resolviendo y deshaciendo el cambio obtenemos la solución.

Ejemplo:

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \,/\, y(1) = 0$$

Homogénea de grado 1

$$\frac{1}{x}\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - \frac{1}{x}xdy = 0$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \quad dx - dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \quad \frac{y}{x} \quad ^2}$$

Haciendo el cambio: $y = z \quad x$

$y \ = z \quad x + z$

$$z\, x + \cancel{z} = \cancel{z} + \sqrt{1 + z^2}$$

$$z\, x = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\arg \operatorname{senh}(z) = \ln(|x|) + C$$

Deshaciendo el cambio

$$\arg \operatorname{senh}(y/x) = \ln(|x|) + C$$

- Ec. Diferenciales transformables a homogéneas:

Son de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \quad x + b \quad y + c}{d \quad x + e \quad y + f}$$

El término de arriba y el de abajo son dos rectas. En función de su posición relativa los métodos cambian:

- Se cortan en (α, β)
  :

Se tiene que:

$$a \quad \alpha + b \quad \beta + c$$
$$d \quad \alpha + e \quad \beta + f$$

Se hace el cambio:

$$x^* = x - \alpha$$
$$y^* = y - \beta$$
$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{dy^*}{dy} \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{dx}{dx^*} = \frac{dy}{dx}$$

Y obtenemos:

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{a \quad (x^* + \alpha) + b \quad (y^* + \beta) + c}{d \quad (x^* + \alpha) + e \quad (y^* + \beta) + f} = \frac{a \quad x^* + b \quad y^*}{d \quad x^* + e \quad y^*}$$

Con lo que conseguimos una ecuación homogénea de grado 1.

Ejemplo:

$$(x - 2y + 1)dx + (4x - 3y - 6)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + 2y - 1}{4x - 3y - 6}$$

Resolviendo el sistema:

$$-x+2y-1=0 \qquad x=3$$
$$4x-3y-6=0 \qquad y=2$$

Haciendo el cambio de variable:

$$x^* = x-3$$
$$y^* = y-2$$

Sustituimos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x^*+3)+2(y^*+2)-1}{4(x^*+3)-3(y^*+2)-6} = \frac{-x^*+2y^*}{4x^*-3y^*}$$

Con lo que obtenemos una ecuación homogénea de orden 1.

- Son paralelas:

Se tiene que:

$$\alpha = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} \quad \frac{c}{f} \qquad \begin{matrix} a = \alpha \ \ d \\ b = \alpha \ \ e \end{matrix}$$

Luego nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \ \ x + b \ \ y + c}{d \ \ x + e \ \ y + f} = \frac{\alpha(d \ \ x + e \ \ y) + c}{d \ \ x + e \ \ y + f}$$

Se hace el cambio:

$$d \ \ x + e \ \ y = z$$
$$d + e \ \ y \ = z \qquad y \ = \frac{z \ - d}{e}$$

Y obtenemos:

$$\frac{z \ - d}{e} = \frac{\alpha z + c}{z + f}$$

$$\frac{dz}{dx} = e \quad \frac{\alpha z + c}{z + f} \quad + d$$

Con lo que obtenemos una ecuación de variables separables.

Ejemplo:

$$(x+2y+3)dx + (4x+8y-1)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+2y+3}{4x+8y-1} = \frac{-(x+2y)-3}{4(x+2y)-1}$$

Haciendo el cambio:

$$x + 2y = z$$

$$1 + 2y \ = z \qquad y = \frac{z \ -1}{2}$$

Sustituyendo:

$$\frac{z \ -1}{2} = \frac{-z-3}{4z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2(z+3)}{4z-1} + 1$$

- Son coincidentes:

Se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad y = x + C$$

- Ec. Diferenciales lineales:

Son de la forma:

$$y \ + P(x) \ \ y = Q(x)$$

o bien:

$$R(x)y \ + P(x) \ \ y + Q(x) = 0 \qquad y \ + \frac{P(x)}{R(x)} \ \ y = -\frac{Q(x)}{R(x)}$$

En este tipo de ecuaciones hay que tener en cuenta dos cosas:

- La ecuación homogénea:

$$y \ + P(x) \ \ y = 0$$

que es de variables separadas:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) \ \ y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x) \ dx \qquad \frac{dy}{y} = - \ \ P(x) \ dx \qquad \ln(|y|) = - \ \ P(x) \ dx + \ln(|C \ |)$$

$$y = e^{-P(x)\,dx}\ C$$

- La ecuación general:

$$y + P(x)\ y = Q(x)$$

$$y = e^{-P(x)\,dx}\left(C + \left(Q(x)\ e^{P(x)\,dx}\right)\ dx\right)$$

El fundamento de este método es el siguiente:

Tomamos la solución de la ecuación homogénea y la multiplicamos por una función genérica:

$$y(x) = u(x)\ e^{-P(x)\,dx}$$

Derivamos la expresión:

$$y\ (x) = u\ (x)\ e^{-P(x)\,dx} + u(x)\ (-P(x))\ e^{-P(x)\,dx}$$

Forzamos a que sea solución de la homogénea:

$$u\ (x)\ e^{-P(x)\,dx} + u(x)\ (-P(x))\ e^{-P(x)\,dx} + P(x)\ u(x)\ e^{-P(x)\,dx} = Q(x)$$

Sacando factor común:

$$u\ (x)\ e^{-P(x)\,dx} + u(x)\left((-P(x))\ e^{-P(x)\,dx} + P(x)\ e^{-P(x)\,dx}\right) = Q(x)$$

Nos queda:

$$u\ (x)\ e^{-P(x)\,dx} = Q(x)$$

$$u\ (x) = Q(x)\ e^{P(x)\,dx}$$

$$\frac{du}{dx} = Q(x)\ e^{P(x)\,dx}$$

Integrando:

$$du = Q(x)\ e^{P(x)\,dx}\ dx$$

Obtenemos así una solución particular de la ecuación general:

$$y(x) = u(x)\ e^{-P(x)\,dx} = e^{-P(x)\,dx}\left(Q(x)\ e^{P(x)\,dx}\ dx\right)$$

Y buscamos ahora la solución general:

$$y(x) = e^{-P(x)\,dx}\ C + e^{-P(x)\,dx}\left(Q(x)\ e^{P(x)\,dx}\ dx\right)$$

$$y(x) = e^{-P(x)dx}\left[C + \left(Q(x)\ e^{P(x)dx}\ dx\right)\right]$$

Ejemplo:

$$y + \frac{2x+1}{x} y = e^{-2x}$$

$$e^{-P(x)dx} = e^{-\frac{2x+1}{x}dx} = \quad \frac{2x+1}{x}\ dx = 2x + \ln|x| \quad = e^{-(2x+\ln|x|)} = e^{-2x}\ \ e^{-\ln|x|} = \frac{e^{-2x}}{x}$$

$$e^{P(x)dx} = e^{2x+\ln|x|} = e^{2x}\ \ e^{\ln|x|} = xe^{2x}$$

Luego la solución es:

$$y(x) = \frac{e^{-2x}}{x}\ \left[C + \left(e^{-2x}\ \ xe^{2x}\ \ dx\right)\right] = \frac{e^{-2x}}{x}\quad C + \frac{x^2}{2}$$

- Ec. Diferenciales de Bernoulli:

Son de la forma:

$$y + P(x)\ \ y = Q(x)\ \ y^n \qquad n \quad 0; n \quad 1$$

Para resolverlas se transforman en lineales mediante el cambio:

$$y = z^{\alpha}$$

$$y = \alpha\ \ z^{\alpha-1}\ \ z$$

Donde hay que calcular α
para que sea lineal

$$y + P(x)\ \ y = Q(x)\ \ y^n$$

$$y = z^{\alpha}$$

$$y = \alpha\ \ z^{\alpha-1}\ \ z$$

$$\alpha\ \ z^{\alpha-1}\ \ z + P(x)\ \ z^{\alpha} = Q(x)\ \ z^{\alpha\ n}$$

$$\alpha\ \ z + \frac{P(x)\ \ z^{\alpha}}{z^{\alpha-1}} = \frac{Q(x)\ \ z^{\alpha\ n}}{z^{\alpha-1}}$$

$$\alpha\ \ z + P(x)\ \ z = Q(x)\ \ \frac{z^{\alpha\ n}}{z^{\alpha-1}}$$

Interesa que $\dfrac{z^{\alpha\ n}}{z^{\alpha-1}} = 1$

$$\frac{z^{\alpha n}}{z^{\alpha-1}} = 1 \qquad \alpha\ \ n = \alpha - 1 \qquad \alpha = \frac{1}{1-n}$$

Ejemplo:

$$y\ + y = xy^3$$

$$n = 3 \qquad \alpha = -\tfrac{1}{2}$$

Hacemos el cambio:

$$y = z^{-1/2}$$

$$y\ \ = -\tfrac{1}{2}\ \ z^{-3/2}\ \ z$$

$$-\tfrac{1}{2}\ \ z^{-3/2}\ \ z\ + z^{-1/2} = x\ \ z^{-1/2}\ \ {}^{3}$$

Dividiendo entre $-\tfrac{1}{2} z^{-3/2}$

$$z\ \ - 2z = -2x$$

Que es lineal y se calcula por los métodos ya explicados.

- Ec. Diferenciales de Ricatti:

Son de la forma:

$$y\ \ = A_0(x) + A_1(x)\ \ y + A_2(x)\ \ y^2$$

Este tipo de ecuaciones diferenciales solo se pueden resolver si se conoce alguna solución particular $y_1(x)$. Si se conoce dicha solución, entonces se hace el cambio:

$$y = y_1 + z$$

$$y\ \ = y_1\ + z$$

Sustituyendo:

$$y_1 + z\ \ = A_0(x) + A_1(x)\ \ (y_1 + z) + A_2(x)\ \ (y_1 + z)^2$$

$$y_1 + z\ \ = A_1(x)\ \ z + A_2(x)\ \ z^2 + 2\ \ A_2(x)\ \ y_1\ \ z + \left(A_0(x) + A_1(x)\ \ y_1 + A_2(x)\ \ y_1{}^2\right)$$

Simplificando:

$$z \ = \left(A_1(x) + 2 \ \ A_2(x) \ \ y_1 \right) \ z + A_2(x) \ \ z^2$$

$$z \ - \left(A_1(x) + 2 \ \ A_2(x) \ \ y_1 \right) \ z = A_2(x) \ \ z^2$$

Se ha transformado en una ecuación de Bernoulli. Como el cambio de Ricatti a Bernoulli y de Bernoulli a lineal es automático, podemos hacer directamente el cambio:

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

Ejemplo:

$$x^2 y \ + x^3 y^2 = x - 1$$

Salta a la vista que una solución particular es $y = \frac{1}{x}$

. Haciendo el cambio:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xz}$$

$$y \ = -\frac{1}{x^2} - \frac{z}{z^2}$$

Sustituyendo nos queda:

$$z \ + 2z = x$$

$$z = e^{- \ 2\,dx} \left(C + \ \ \left(x \ \ e^{\ 2\,dx} \right) \ dx \right) = e^{-2x} \left(C + \ \ x \ \ e^{2x} \ \ dx \right) = e^{-2x} \ \ C + \frac{1}{2} \ \ e^{2x} \ \ \ x - \frac{1}{2}$$

Deshaciendo el cambio y despejando y

.

$$y = \frac{C \ \ e^{-2x} + \frac{3}{2} \ \ x - \frac{1}{4}}{C \ \ x \ \ e^{-2x} + \frac{1}{2} \ \ x^2 - \frac{1}{4}}$$

- Ec. Diferenciales de 1er orden implícitas:

Son de la forma:

$$f\left(x, y, y \ \right) = 0$$

No pudiéndose despejar y

Solo se pueden resolver si es posible despejar y o x.

- Se puede despejar y:

En tal caso tenemos:

$$y = f(x, y)$$

La resolución se efectúa por el llamado método paramétrico:

Hacemos el cambio:

$$y \;= \frac{dy}{dx} = t$$
$$y = f(x,t)$$

y derivamos respecto de x:

$$t = \frac{dy}{dx} = \frac{f}{x} + \frac{f}{t}\;\frac{dt}{dx}$$

Es decir:

$$t = \frac{f}{x} + \frac{f}{t}\;t$$

Luego:

$$t \;= \frac{t - \frac{f}{x}}{\frac{f}{t}}$$

Resolviendo dicha ecuación diferencial obtendremos una solución del tipo

$$\phi(x,t,C) = 0$$

Si es posible despejar $t = \phi(x,C)$, entonces la solución del problema es fácil, pues $y = f(x,\phi(x,C))$. Si no es posible despejar t, la solución se deja en forma paramétrica, con una ecuación implícita y una explícita.

Ejemplo:

$$y^{\;2} - 2xy \;= x^2 - 4y$$

$$y = \frac{2xy + x^2 - y^2}{4}$$

Hacemos el cambio:

$$y = t$$

$$y = \frac{2xt + x^2 - t^2}{4}$$

Derivamos respecto de x
:

$$t = \frac{dy}{dx} = \frac{f}{t} \frac{dt}{dx} + \frac{f}{x}$$

$$t = \frac{2x - 2t}{4} t + \frac{2t + 2x}{4}$$

$$t = \frac{t - \frac{2t + 2x}{4}}{\frac{2x - 2t}{4}} = -1$$

$$dt = -dx$$

$$t = -x + C$$

$$y = -x + C$$

$$y = \frac{2xy + x^2 - y^2}{4} = \frac{4Cx - 2x^2 - C^2}{4}$$

Existe un caso particular de este tipo de ecuaciones, que son de la forma:

$$y = f(y)$$

En tal caso basta hacer el cambio ya explicado, y la ecuación se convierte en variables separadas:

$$y = \frac{dy}{dx} = t$$
$$y = f(t)$$

$$t = \frac{f}{t} t = \frac{f}{t} \frac{dt}{dx}$$

Ejemplo:

$$y = y^{2} + 2y^{3}$$

Hacemos el cambio:

$$y = t^{2} + 2t^{3}$$

Derivamos con respecto a x
:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(t^{2} + 2t^{3}\right)}{dt} \ \frac{dt}{dx} = \left(2t + 6t^{2}\right) \ \frac{dt}{dx}$$

$$t = \left(2t + 6t^{2}\right) \ \frac{dt}{dx}$$

$$dx = \left(2 + 6t\right) \ dt$$

Por tanto:

$$x = 2t + 3t^{2} + C$$

$$y = t^{2} + 2t^{3}$$

No es posible despejar t
, luego la solución dada es paramétrica.

- Se puede despejar x
  :

En tal caso tenemos:

$$x = f\left(y, y\right)$$

Para resolverlos hacemos:

Realizamos el cambio:

$$y = \frac{dy}{dx} = t$$
$$x = f\left(y, t\right)$$

y derivamos respecto de x
:

$$1 = \frac{f}{y} \ \frac{dy}{dx} + \frac{f}{t} \ \frac{dt}{dy} \ \frac{dy}{dx}$$

$$1=\frac{f}{y}\ \ t+\frac{f}{t}\ \ t_y\ \ t$$

Despejando:

$$\frac{\mathbf{1}-\frac{f}{y}\ \ t}{\frac{f}{t}\ \ t}=t_y$$

Al igual que antes obtendremos una solución del tipo $\phi(y,t,C)=0$

Si es posible despejar $t=\phi(y,C)$
, entonces la solución del problema es fácil, pues $x=f(y,\phi(y,C))$
. Si no es posible despejar t
, la solución se deja en forma paramétrica, con una ecuación implícita y una explícita.

Ejemplo:

$$y^{\ 3}+y^2=xyy$$

$$x=\frac{y^{\ 3}+y^2}{yy}$$

Hacemos el cambio:

$$y\ \ =t$$

$$x=\frac{t^3+y^2}{yt}$$

Derivamos respecto de x
:

$$\frac{\mathbf{1}-\frac{f}{y}\ \ t}{\frac{f}{t}\ \ t}=t_y$$

$$t_y=\frac{dt}{dy}=\frac{1-\frac{y^2t-t^4}{y^2t^2}\ \ t}{\frac{2t^3y-y^3}{y^2t^2}\ \ t}=\frac{t^4}{y\left(2t^3-y^2\right)}$$

Intercambiando las variables:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y\left(2t^3 - y^2\right)}{t^4}$$

Nos queda:

$$y_t - \frac{2}{t} y = -\frac{1}{t^4} y^3$$

Es de tipo Bernoulli. Hacemos el cambio:

$$y = z^{-1/2}$$
$$y \;= -\tfrac{1}{2} \; z^{-3/2} \;\; z$$

$$-\tfrac{1}{2}\; z^{-3/2} \;\; z \; - \frac{2}{t} z^{-1/2} = -\frac{1}{t^4} z^{-3/2}$$

$$z \; + \frac{4}{t} z = \frac{2}{t^4}$$

Es de tipo lineal. Usamos la formula:

$$z = e^{-\frac{4}{t}dt} \;\; C + \;\; \frac{2}{t^4} \; e^{\frac{4}{t}dt} \;\;\; dt \;\; = \frac{1}{t^4} \;\; C + \;\; \frac{2}{t^4} \; t^4 \;\;\; dt \;\; = \frac{1}{t^4}\left(C + \;\; 2 \;\; dt\right) =$$
$$= \frac{1}{t^4}\left(C + 2t\right) = \frac{C}{t^4} + \frac{2}{t^3}$$

Deshacemos el cambio:

$$y = \;\; \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{t^4} + \frac{2}{t^3}}} = \;\; \frac{t^2}{\sqrt{C + 2t}}$$

No es posible despejar t
, luego lo dejamos en función de t
:

$$y = \;\; \frac{t^2}{\sqrt{C + 2t}}$$

$$x = \frac{t^3 + \;\; \frac{t^2}{\sqrt{C+2t}} \quad ^2}{\frac{t^2}{\sqrt{C+2t}} \;\; t} = \frac{1 + \frac{t}{C + 2t}}{\frac{1}{\sqrt{C+2t}}} = \frac{\left(C + 3t\right)\sqrt{C + 2t}}{C + 2t}$$

Aquí también existe un caso particular, en el que:

$$x = f(y)$$

En tal caso basta hacer:

$$y \ \ = t$$
$$x = f(t)$$

Derivando respecto a x
:

$$1 = \frac{f}{t}\ \frac{dt}{dy}\ t$$

$$dy = \ \frac{f}{t}\ t\ \ dt$$

$$y = \ \frac{f}{t}\ t\ \ dt + C$$

Quedando la solución en forma paramétrica, por norma general.

Ejemplo:

$$x = y^{\ 3} + y$$

Hacemos el cambio:

$$x = t^3 + t$$

Derivamos con respecto a x
:

$$1 = \frac{d(t^3 + t)}{dt}\ \frac{dt}{dy}\ \frac{dy}{dx}$$

$$1 = (3t^2 + 1)\ \frac{dt}{dy}\ t$$

$$dy = (3t^2 + 1)\ t\ \ dt$$

$$y = \ (3t^3 + t)\ dt + C = \tfrac{3}{4}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2 + C$$

No es posible despejar t
, con lo que la solución queda como:

$$y = \tfrac{3}{4}t^4 + \tfrac{1}{2}t^2 + C$$

$$x = t^3 + t$$

- Ec. Diferenciales de Lagrange:

Son de la forma:

$$y = f(x, y)$$

con dependencia lineal en x

es decir:

$$y = x \ \ f(y) + g(y)$$

Para resolverla hacemos el cambio:

$$y \ \ = t$$
$$y = x \ \ f(t) + g(t)$$

Derivando con respecto a x

$$t = f(t) + x \ \ \frac{f(t)}{t} \ \frac{dt}{dx} + \frac{g(t)}{t} \ \ \frac{dt}{dx}$$

$$t - f(t) = \ \ x \ \ \frac{f(t)}{t} + \frac{g(t)}{t} \quad \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t - f(t)}{x \ \ \frac{f(t)}{t} + \frac{g(t)}{t}}$$

Operando:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{f(t)}{t}}{t - f(t)} \ \ x + \frac{\frac{g(t)}{t}}{t - f(t)}$$

Que es lineal, con función desconocida x
y variable independiente t
. Se resuelve u nos queda una función $x(t)$
, y sustituyendo $y \ \ = t$
en la ecuación original nos queda la solución en forma paramétrica:

$$y = x \ \ f(t) + g(t)$$

$$x = C \ \ u(t) + v(t)$$

Se observa que puede ocurrir que:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Si ello ocurre t
sería una constante, y habría que tener en cuenta solamente aquellos valores de t
(t_1
, t_2
,...,t_i
,...) que sean raíces del polinomio $t - f(t) = 0$
, que nos darían las soluciones particulares $y = f(t_i)\ \ x + g(t_i)$
.

También puede ocurrir que el denominador $t - f(t)$
sea idénticamente nulo, situación que nos lleva a la ecuación de Clairaut, que estudiaremos a continuación.

Ejemplo:

$$y = \ \ x - \frac{1}{2}\ \ y^{\ 2} + y$$

Hacemos el cambio:

$$y \ \ = t$$

$$y = x \ \ f(t) + g(t)$$

$$y = xt^2 + \ \ t - \frac{1}{2}t^2$$

Operamos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{f(t)}{t}}{t - f(t)}\ \ x + \frac{\frac{g(t)}{t}}{t - f(t)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t - t^2}\ \ x + \frac{1-t}{t - t^2}$$

$$x \ \ - \frac{2}{1-t}\ \ x = \frac{1}{t}$$

La resolvemos mediante la formula de la lineal:

$$x = e^{\ \frac{2}{1-t}dt}\ \ C + \ \ \frac{1}{t}\ e^{\ -\frac{2}{1-t}dt}\ \ dt\ \ = e^{-2\ln(1-t)}\ \ C + \ \ \frac{1}{t}\ e^{2\ln(1-t)}\ \ dt\ \ =$$

$$=\frac{1}{(1-t)^2}\ \ C+\ \ \int\frac{1}{t}\,(1-t)^2\ \ dt\ \ =\frac{1}{(1-t)^2}\ \ C+\ \ \int\frac{1}{t}+t-2\ \ \ dt\ \ =$$

$$=\frac{1}{(1-t)^2}\ \ C+\ln(t)+\frac{1}{2}t^2-2t$$

Con lo que nos queda:

$$y=xt^2+\ \ t-\frac{1}{2}t^2$$

$$x=\frac{1}{(1-t)^2}\ \ C+\ln(t)+\frac{1}{2}t^2-2t$$

Como $t-f(t)$
no es idénticamente nulo no hace falta ir a Clairaut. Sin embargo, hay que tener en cuenta las raíces del polinomio:

$$t-f(t)=0\qquad t-t^2=0\ \begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}$$

Sustituyendo tenemos dos soluciones particulares, que son rectas:

$$y=0$$

$$y=x+\frac{1}{2}$$

- Ec. Diferenciales de Clairaut:

En ellas se verifica:

$$y=xt+g(t)$$

Derivando con respecto a x
:

$$\frac{dy}{dx}=t=t+x\ \ \frac{dt}{dx}+\frac{dg}{dt}\ \ \frac{dt}{dx}$$

Es decir:

$$x+\frac{dg}{dt}\ \ \ \frac{dt}{dx}=0$$

Aquí hay dos posibles soluciones:

- $\frac{dt}{dx} = 0 \qquad t = C \qquad y = C \;\; x + g(C)$
  Solución general
- $x = -\frac{dg}{dt} \qquad \begin{matrix} y = xt + g(t) \\ x = -\frac{dg}{dt} \end{matrix}$
  Solución paramétrica singular

Ejemplo:

$$y = xy \;\; - \frac{1}{2} y^{\;2}$$

Hacemos $y \;\; = t$

$$y = xt - \frac{1}{2} t^2$$

Derivamos respecto a x
:

$$t = t + x \frac{dt}{dx} - t \frac{dt}{dx}$$

$$0 = (x - t) \frac{dt}{dx}$$

Si $\frac{dt}{dx} = 0$
, entonces $t = C$
y $y = Cx - \frac{1}{2} C^2$
, que es la solución general.

Si$(x - t) = 0$
entonces $x = t$
y $y = \frac{1}{2} x^2$
, que es la solución paramétrica singular.

- Ec. Diferenciales Exactas:

Sea una ecuación diferencial de la forma:

$$P(x, y) \;\; dx + Q(x, y) \;\; dy = 0$$

Nos interesa hallar una función $u(x, y) \; = \; C$
tal que se cumpla que:

$$\frac{u(x,y)}{x}\ dx+\frac{u(x,y)}{y}\ dy=P(x,y)\ dx+Q(x,y)\ dy=0$$

$$P(x,y)=\frac{u(x,y)}{x} \qquad Q(x,y)=\frac{u(x,y)}{y}$$

Ya que dicha función u
es solución de la ecuación diferencial. Para ello nos aprovecharemos de que el Teorema de Schwarz nos asegura que las derivadas parciales cruzadas son iguales. Por ello:

$$\frac{{}^2u(x,y)}{x\ \ y}=\frac{{}^2u(x,y)}{y\ \ x}$$

$$\frac{P(x,y)}{y}=\frac{Q(x,y)}{x}$$

Luego si la ecuación verifica que:

$$\frac{P(x,y)}{y}=\frac{Q(x,y)}{x}$$

Entonces se puede asegurar que existirá dicha función $u(x,y)$
. Para encontrarla haremos:

$$P(x,y)=\frac{u(x,y)}{x} \qquad u(x,y)= \quad P(x,y)\ dx+\varphi(y)$$

y como:

$$Q(x,y)=\frac{u(x,y)}{y} \qquad Q(x,y)=\frac{\left(\quad P(x,y)\ dx+\varphi(x)\right)}{y}=\frac{\left(\quad P(x,y)\ dx\right)}{y}+\frac{(\varphi(y))}{y}$$

En donde el único término desconocido es $\frac{(\varphi(y))}{y}$

. Por tanto podemos identificar $\varphi(y)$
y determinar $u(x,y)$

La función es una función potencial, con una constante arbitraria. Al ponerla como solución de la ecuación diferencial adoptaremos la constante como nula.

Ejemplo:

$$\log\left(y^2+1\right)\ dx+\frac{2y(x-1)}{y^2+1}\ dy=0$$

$$P(x,y)=\log\left(y^2+1\right) \quad \frac{P(x,y)}{y}=\frac{2y}{y^2+1}$$

$$Q(x,y)=\frac{2y(x-1)}{y^2+1} \quad \frac{Q(x,y)}{x}=\frac{2y}{y^2+1}$$

Es una ecuación diferencial exacta. Vamos a hallar $u(x,y)$
:

$$u(x,y)= \quad P(x,y)\ dx+\varphi(y)= \quad \log\left(y^2+1\right)\ dx+\varphi(y)=x\ \log\left(y^2+1\right)+\varphi(y)$$

$$\frac{u(x,y)}{y}=\frac{2xy}{y^2+1}+\varphi\ (y)=Q(x,y) \qquad \varphi\ (y)=-\frac{2y}{y^2+1}$$

$$\varphi(y)=-\log\left(y^2+1\right)+C$$

$$u(x,y)=(x-1)\ \log\left(y^2+1\right)+C$$

Luego la solución de la ecuación diferencial es:

$$(x-1)\ \log\left(y^2+1\right)=0$$

- Factor integrante:

Sea una ecuación diferencial de la forma:

$$P(x,y)\ dx+Q(x,y)\ dy=0$$

tal que no sea diferencial exacta, es decir:

$$\frac{P(x,y)}{y} \quad \frac{Q(x,y)}{x}$$

Entonces existe un teorema matemático que nos asegura la existencia de una función $\mu(x,y)$
tal que se verifique que :

$$\mu(x,y)\ P(x,y)\ dx+\mu(x,y)\ Q(x,y)\ dy=0$$

Sea diferencial exacta. La dificultad reside en el cálculo de dicha función, llamada factor integrante.

Dicha función ha de verificar que:

$$\frac{(\mu\ \ P)}{y}=\frac{(\mu\ \ Q)}{x}$$

$$P\ \frac{\mu}{y}+\mu\ \frac{P}{y}=Q\ \frac{\mu}{x}+\mu\ \frac{Q}{x}$$

$$P \ \mu_y + \mu \ P_y = Q \ \mu_x + \mu \ Q_x$$

$$\mu_y \ P - \mu_x \ Q = \mu \ (Q_x - P_y)$$

A menudo es imposible resolver dicha ecuación diferencial, debido a su complejidad. Sin embargo, si conocemos el argumento de la ecuación es más fácil. Distinguiremos cinco casos:

- De la forma $\mu(x)$
  :

En tal caso se verifica que:

$$-\mu_x \ Q = \mu \ (Q_x - P_y)$$

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{(P_y - Q_x)}{Q}$$

$$\ln(\mu) = \ \frac{(P_y - Q_x)}{Q} \ dx \qquad \mu(x) = e^{\ \frac{(P_y - Q_x)}{Q} dx}$$

Pero esto será cierto si la expresión resultante solo depende de x

- De la forma $\mu(\ y)$
  :

$$\mu(\ y) = e^{\ \frac{(Q_x - P_y)}{P} dy}$$

- De la forma $\mu(x + y)$
  :

$$z = x + y$$

$$\mu(\ z) = e^{\ \frac{(Q_x - P_y)}{P - Q} dz}$$

- De la forma $\mu(x \ \ y)$
  :

$$z = x \ \ y$$

$$\mu(\ z) = e^{\ \frac{(Q_x - P_y)}{P \ x - Q \ y} dz}$$

- De la forma $\mu(x/y)$
  :

$$z = x/y$$

$$\mu(z) = e^{\int \frac{(Q_x - P_y)}{\frac{P}{x} + \frac{Q\,y}{x^2}} dz}$$

Ejemplo:

$$(1 - xy)\ \ dx + (xy - x^2)\ \ dy = 0$$

$$P(x, y) = (1 - xy) \qquad P_y = -x$$
$$Q(x, y) = (xy - x^2) \quad Q_x = y - 2x$$

No es diferencial exacta.

Supongamos $\mu(x)$
:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{(P_y - Q_x)}{Q} dx} = e^{\int \frac{(-x - y + 2x)}{-2x} dx} = e^{\int \frac{(x-y)}{xy - x^2} dx} = e^{\int -1/x\, dx} = e^{-\ln(x)} = 1/x$$

Nos queda:

$$\left(1/x - y\right)\ \ dx + (y - x)\ \ dy = 0$$

Si es diferencial exacta

CÁLCULO DE TRAYECTORIAS:

TRAYECTORIAS ORTOGONALES:

Las soluciones de una ecuación diferencial forman un haz de curvas. A menudo nos interesa hallar la familia de curvas que las cortan perpendicularmente, que llamaremos trayectorias ortogonales.

Para ello partimos de la ecuación diferencial:

$$H(x, y, y\ ) = 0$$

H
nos da una relación entre las coordenadas de un punto y la tangente en dicho punto de la curva solución.

Supongamos que es posible despejar y
. En tal caso:

$$y_0 = \mathrm{tg}(\beta) = -\frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha)}$$

Y por tanto la ecuación diferencial del haz de trayectorias ortogonales es:

$$y_0 = -\frac{1}{H(x, y_0)}$$

En el caso de partir de la solución general, se debe derivar $f(x, y, C) = 0$
respecto de x
y eliminar C
entre ambas ecuaciones.

Ejemplo:

$$y = C\ \ x^3$$

Derivamos:

$$y\ \ = 3\ \ C\ \ x^2$$

Operamos:

$$C = \frac{y}{3\ \ x^2}$$

$$y\ \ = \frac{3\ \ y}{x}$$

Luego la trayectoria ortogonal es:

$$y\ \ = \frac{-x}{3\ \ y}$$

$$3\ \ y\ \ dy = -x\ \ dx$$

$$3\ \ y^2 = -x^2 + C$$

Si dibujamos en azul las curvas originales y en rojo las ortogonales, veremos que son respectivamente curvas parabólicas de orden 3 y elipses.

Hay que recordar que si no es posible despejar $y\ \ = H(x, y)$
siempre podemos cambiar y
por $-\ {}^{1}\!/_{y_0}$
e intentar despejar y_0

TRAYECTORIAS OBLICUAS:

También puede suceder que lo que nos interese sea hallar la familia de curvas que cortan a una dada con un determinado ángulo. En tal caso hay que recurrir a la formula de suma de tangentes:

$$\operatorname{tag}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tag}(\alpha) + \operatorname{tag}(\beta)}{1 - \operatorname{tag}(\alpha)\ \ \operatorname{tag}(\beta)}$$

Si $y\ \ = H(x, y)$

entonces el proceso para resolver el problema es:

$$y_0 = \frac{H(x,y) + \operatorname{tag}(\beta)}{1 - H(x,y)\ \ \operatorname{tag}(\beta)}$$

Ejemplo:

$$x^2 + y^2 = c^2$$
$$\beta = 45$$

Derivamos:

$$2x + 2yy\ \ = 0$$

Operamos:

$$y\ \ = - {}^{x}\!\!/_{y}$$

$$y_0 = \frac{- {}^{x}\!/_{y} + \operatorname{tag}(\beta)}{1 + {}^{x}\!/_{y}\ \ \operatorname{tag}(\beta)} = \frac{- {}^{x}\!/_{y} + 1}{1 + {}^{x}\!/_{y}} = \frac{y - x}{y + x}$$

Que es homogénea.

Si solo hay una variable independiente (x
) la ecuación diferencial es ordinaria. Si no es así, entonces es una ecuación diferencial en derivadas parciales.

Hay que tener en cuenta que las soluciones pueden venir dada en tres formas distintas:

$y = f(x)$	Explícita
$x = f(t) + C$ $y = g(t)$	Paramétrica
$f(x, y) = 0$	Implícita

n
es el grado de la ecuación.

Llamado "Método de Variación de Constantes"

La solución de la ecuación general es la suma de la solución de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación general

Pues por ser y_1
solución particular se verifica que: $y_1\ = A_0(x) + A_1(x)\ \ y_1 + A_2(x)\ \ y_1{}^2$

Pues siempre se verifica que $n = 2$

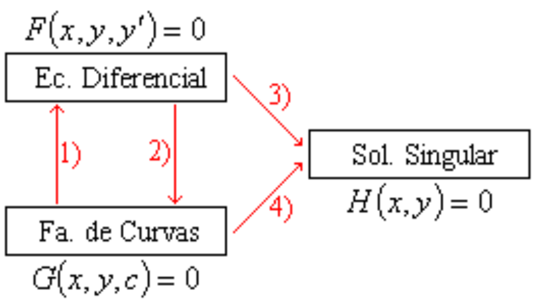
Los ejercicios correspondientes a este apartado se sitúan bajo el rótulo General Paramétrico

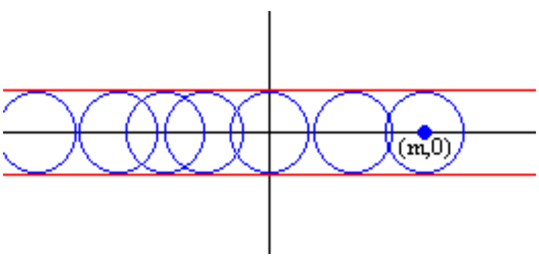
Descartamos que $t=0$
, ya que eso haría: $t=0 \quad y=0 \quad y=C$
, que no es solución.

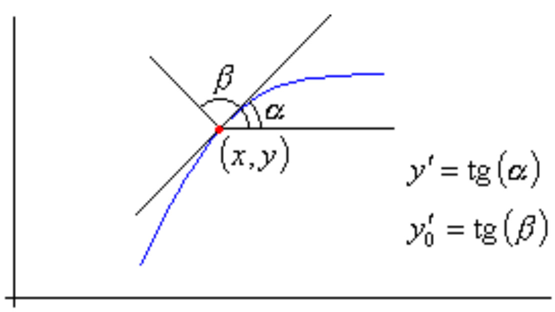
Por sencillez obviaremos el término (x, y)
y representaremos las derivadas respecto de una variable por la función subindicada con la variable.

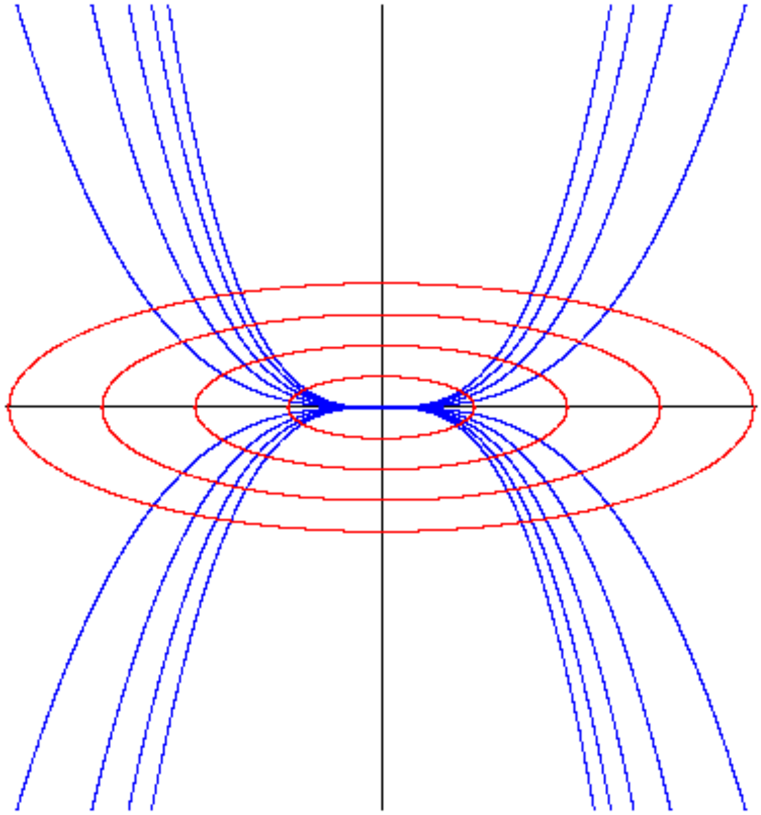
Solo estudiaremos el proceso de uno de los casos.

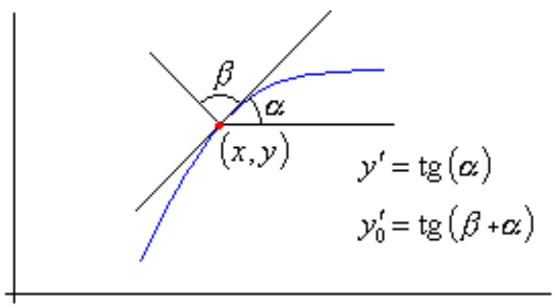
1










β
α
(x, y)
y' = tg(α)
y'_0 = tg(β + α)