

C1.- En el interior de una esfera hueca de radios R_1 y R_2 , $R_1 < R_2$, hay un dipolo eléctrico de momento dipolar $\vec{p}$

. Calcule el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de radio $R > R_2$, concéntrica con la esfera original, en los casos:

- La esfera es conductora.
- La esfera es un dieléctrico de permitividad ϵ .
-

RESPUESTA

.- El dipolo, de cargas $-q$ y $+q$, crea un campo eléctrico, $\vec{E}$, el cual actúa sobre las esferas (conductora o dieléctrica), que son eléctricamente neutras, induciendo una redistribución de carga. Así:

- Sobre el conductor induce unas densidades superficiales, σ_1 y σ_2 , tales que se cumple

$$\sigma_1 dS_1 + \sigma_2 dS_2 = Q_{i,cond} = 0$$

; por tanto el flujo del campo eléctrico, a, a través de la superficie esférica (cerrada) de radio R , se determina por medio de la ley de Gauss para el campo eléctrico, resultando:

$$\phi_a = \oint_{SE(R)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{ence,SE(R)}}{\epsilon_0} = \frac{-q + q + Q_{i,cond}}{\epsilon_0} = 0$$

- Sobre el dieléctrico se generan densidades de carga en superficie, σ_1 y σ_2 , y en volumen, ρ , tales que:

$$\sigma_1 dS_1 + \sigma_2 dS_2 + \rho dV = Q_{i,die} = 0$$

donde V es el espacio entre las superficies esféricas de radios R_1 y R_2 . Por tanto el flujo eléctrico, b, es:

$$\phi_b = \oint_{SE(R)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{ence,SE(R)}}{\epsilon_0} = \frac{-q + q + Q_{i,die}}{\epsilon_0} = 0$$

C2.- Un campo escalar tiene por superficies equipotenciales planos paralelos al plano XY. ¿Cuál es la dirección del gradiente de dicho campo escalar?. Justifique su respuesta.

RESPUESTA

.- Sea $\phi(x,y,z)$ el campo escalar; entonces del enunciado se cumple que $\phi(x,y,z) = c = z$, donde "c" es una constante real, son las superficies equipotenciales. De la ecuación general de un plano se verifica que un vector director (vector perpendicular al plano) unitario es $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{k}$

donde k

es el vector unitario según el eje de las zetas. Como sabemos que en cada punto el vector gradiente es perpendicular a las superficies equipotenciales deducimos que su dirección es el eje de las zetas,

$$\nabla \phi / |\nabla \phi| = \vec{k}$$

C3.- Un condensador plano paralelo tiene una capacidad C_0 cuando el dieléctrico es el vacío y está conectado a una batería de potencial ϕ_0 . Al introducir un dieléctrico ideal de permitividad relativa $\epsilon_r = 4$:

- ¿Cómo varía su capacidad?
- ¿Cómo varía el campo eléctrico entre las armaduras?
- ¿Cómo varía la diferencia de potencial entre las armaduras?
- ¿Cómo varía el desplazamiento eléctrico entre las armaduras?
- ¿Cómo varía la carga en el condensador?

RESPUESTA

El condensador plano, dieléctrico el vacío, de capacidad C_0 al estar conectado a una fuente de tensión de Voltios, adquiere una carga $Q_0 = C_0 \cdot V$. Si A es el área de la placa y d la distancia entre ellas, entonces su capacidad es $C_0 = \epsilon_0 A / d$

. Al introducir el dieléctrico cambia la permitividad y no cambia la diferencia de potencial entre placas ya que está conectado a una fuente de tensión, por tanto:

- $C = \epsilon A / d = 4 \epsilon_0 A / d = 4 C_0$! **la capacidad aumenta 4 veces**
- Como $E_0 = V / d$, el nuevo campo eléctrico es $E = V / d = E_0$! **el campo E no varía**
- La diferencia de potencial entre placas es constante (batería) ! **el potencial no varía**
- Como $D_0 = \epsilon_0 E_0$, el nuevo desplazamiento eléctrico será, $D = \epsilon E = 4 \epsilon_0 E_0 = 4 D_0$! **el desplazamiento eléctrico aumenta 4 veces**
- La nueva carga en placas es $Q = C \cdot V = 4 C_0 \cdot V = 4 Q_0$! **la carga ha aumentado 4 veces**

C4.- ¿Qué condición tiene que cumplir un campo magnético $\vec{B}$ para que una carga eléctrica en reposo se ponga en movimiento?

RESPUESTA

.- El campo magnético no ejerce fuerza sobre una carga en reposo, así que para que pueda mover dicha carga, ya que inicialmente está en reposo, debe aparecer una fuerza de otro tipo inducida por nuestro campo magnético. La única forma de conseguir esto es que **el campo magnético sea variable con el tiempo**, ya que así, debido a la ley de Faraday, surge un campo eléctrico, E , que actúa sobre la carga con una fuerza, $F = q E$, que la pone en movimiento. La secuencia es por tanto:

$$\text{Si } \exists \frac{d\vec{B}}{dt} \text{ y como } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad \text{aparece un } \vec{E} \quad \vec{F} = q \vec{E}$$

la cual pone en movimiento la carga q .

C5.- Por tres conductores rectilíneos muy largos, paralelos y equidistantes circulan corrientes del mismo valor. ¿Cómo tienen que ser los sentidos de las corrientes para que la fuerza sobre el conductor central debida a las otras dos sea nula?

RESPUESTA

Las corrientes por los conductores (1), (2) y (3) son tales que $I_1 = I_2 = I_3 = I$. El campo magnético creado por las corrientes I_1 e I_3 en los puntos donde está el conductor (2), debido a la configuración geométrica, es perpendicular al plano formado por los 3 conductores, por tanto $\vec{B} \perp \vec{u}$

, donde $\vec{u}$

es un vector unitario en la dirección de la corriente I_2 . Como la fuerza por unidad de longitud sobre el conductor (2) es, $\vec{F}_2 = \vec{F}_2 / l_2 = I_2 \vec{u} \times \vec{B}$

; la única forma de que la fuerza sea nula es que el campo magnético sea nulo.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_3 = 0 \text{ y como } B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

ya que están a la misma distancia del conductor (2) y están recorridos por la misma intensidad de corriente; por lo que para que tengan sentidos contrarios los campos magnéticos creados por los conductores (1) y (3) sobre el conductor (2) **deben circular las corrientes en el mismo sentido en (1) y (3)** pues el conductor (2) está en distinto lado respecto de (1) y (3).

P1.– Un satélite artificial de 1000 kg gira en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 100 km. Si se lleva al satélite a otra órbita circular de altura 200 km, calcule:

- Variación de la energía mecánica en el tránsito de una a otra órbita.
- ¿Cuánto varía su energía cinética? ¿Aumenta o disminuye?
- ¿Cuánto varía su energía potencial? ¿Aumenta o disminuye?
- Explique por qué $\Delta E_c + \Delta U = 0$

Datos: Radio de la tierra, $R_o = 6500$ km; intensidad de campo gravitatorio en la superficie de la Tierra, $g_o = 9.81$ N/kg.

RESPUESTA

El satélite en órbita circular de radio r está sometido a una fuerza centrípeta

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

La única fuerza que actúa sobre él es la atracción gravitatoria de la Tierra:

$$F = \frac{mg_o R_o^2}{r^2}$$

Por lo tanto

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{mg_o R_o^2}{r^2} \quad mv^2 = \frac{mg_o R_o^2}{r}$$

La energía cinética es

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mg_o R_o^2}{2r}$$

y la energía potencial

$$U(r) = -\frac{mg_o R_o^2}{r}$$

Por lo que, en órbita circular, la energía mecánica $E(r) = E_c + U(r) = \frac{1}{2}U(r)$

a) $r_1 = R_o + h_1$
 $r_2 = R_o + h_2$

$$\Delta E = E(r_2) - E(r_1) = \frac{1}{2} U(r_2) - \frac{1}{2} U(r_1) = -\frac{mg_o R_o^2}{2} \frac{1}{R_o + h_2} - \frac{1}{R_o + h_1}$$

$$\Delta E = \frac{mg_o R_o^2}{2} \frac{h_2 - h_1}{(R_o + h_2)(R_o + h_1)}$$

y sustituyendo datos,

$$\Delta E = 470 \text{ MJ}$$

b)

$$\Delta E_c = E_c(r_2) - E_c(r_1) = -\frac{1}{2} U(r_2) - \left(-\frac{1}{2} U(r_1)\right) = \frac{1}{2} (U(r_1) - U(r_2))$$

$$\Delta E_c = \frac{mg_o R_o^2}{2} \frac{-1}{R_o + h_1} - \frac{-1}{R_o + h_2}$$

$$\Delta E_c = \frac{mg_o R_o^2}{2} \frac{h_1 - h_2}{(R_o + h_1)(R_o + h_2)}$$

Como el numerador es negativo ($h_1 < h_2$), $\Delta E_c < 0$ por lo que la energía cinética ha disminuido. Sustituyendo datos

$$\Delta E_c = -470 \text{ MJ}$$

c)

$$\Delta U = U(r_2) - U(r_1) = mg_o R_o^2 \frac{-1}{R_o + h_2} - \frac{-1}{R_o + h_1}$$

$$\Delta U = mg_o R_o^2 \frac{h_2 - h_1}{(R_o + h_2)(R_o + h_1)}$$

y sustituyendo datos,

$$\Delta U = 940 \text{ MJ}$$

d) No se conserva la energía porque se ha realizado trabajo sobre el satélite. El trabajo realizado se ha invertido en variar su energía cinética y su energía potencial; es decir,

$$W = \Delta E = \Delta E_c + \Delta U(r)$$

P2.- Un solenoide toroidal de circunferencia media $l = 0.50 \text{ m}$ está formado por 2500 espiras de radio 0.010 m , y tiene por núcleo aire de permeabilidad $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$. Por el solenoide circula una corriente $I = 5 \cos(100\pi t)$

amperios. Un espira circular de radio 0.020 m que presenta una resistencia de $4.0 \text{ } \Omega$ se sitúa con su centro en la circunferencia media del solenoide y paralela al plano de una de las espiras. Suponiendo que el error cometido al aplicar el teorema de Ampère es despreciable y que el campo magnético en todos los puntos del solenoide

tiene el mismo valor que en su circunferencia media,

- Calcule la corriente inducida en el conductor circular.
- ¿Cómo varía la fuerza electromotriz inducida en el conductor circular al aumentar el radio?
- ¿Cómo varía la corriente inducida en el conductor circular al aumentar el radio? (Recuerde que la resistencia aumenta linealmente con la longitud del conductor).

RESPUESTA

En el solenoide se produce un campo magnético, cuyo valor en la circunferencia media es

$$B = \frac{\mu_o N I}{l}$$

y por las condiciones del enunciado puede suponerse que su valor es el mismo en cualquier punto del interior del solenoide. Las líneas de campo de este campo son circunferencias concéntricas con la circunferencia media. Por lo tanto, es normal a la sección recta del solenoide. Como la intensidad que circula por el solenoide es variable, el campo magnético creado es asimismo variable.

A través de la espira circular hay un flujo magnético variable de valor

$$\Phi = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}' = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \, dS = B \, S = \pi r^2 B$$

ya que el campo magnético sólo existe en los puntos de S comunes con S'. Así que

$$\Phi = \frac{\mu_o \pi r^2 N I}{l}$$

a) Si la fuerza electromotriz inducida es E_i La intensidad inducida en la espira circular es

$$I_i = \frac{E_i}{R}$$

La fuerza electromotriz se calcula a partir de la ley de Faraday:

$$E_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_o \pi r^2 N}{l} \frac{dI}{dt} = - \frac{\mu_o \pi r^2 N}{l} \frac{d(5 \cos(100 \pi t))}{dt} =$$

$$= \frac{\mu_o \pi r^2 N}{l} 5 \cdot 100 \pi \sin(100 \pi t)$$

$$I_i = \frac{\mu_o \pi r^2 N}{l R} 5 \cdot 100 \pi \sin(100 \pi t) = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \pi \cdot 0.010^{-2} \cdot 2500 \cdot 5 \cdot 100 \pi}{0.50 \cdot 4.0} \sin(100 \pi t)$$

$$I_i = 0.78 \sin(100 \pi t) \text{ mA}$$

b) Al aumentar el radio de la espira circular no aumenta el flujo a través de ella, porque el flujo magnético sólo existe a través de la superficie de radio r . No existe, pues, diferencia con la variación de flujo magnético del apartado anterior, y la fuerza electromotriz inducida es la misma que el el apartado anterior.

c) La resistencia de la espira circular es

$$R = \rho \frac{l}{S_R}$$

siendo la resistividad, l la longitud de la espira y S_R su sección recta. Si el radio inicial de la espira circular es r_1 y después es r_2 ,

$$R_1 = \rho \frac{2\pi r_1'}{S_R}; \quad R_2 = \rho \frac{2\pi r_2'}{S_R}; \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2'}{r_1'}$$

y las intensidades correspondientes son

$$I_{i1} = \frac{E_i}{R_1}; \quad I_{i2} = \frac{E_i}{R_2}; \quad \frac{I_{i2}}{I_{i1}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1'}{r_2'}; \quad I_{i2} = I_{i1} \frac{r_1'}{r_2'}$$

La intensidad varía con la inversa del radio de la espira circular. Al aumentar el radio (es decir al ser $r_2' > r_1'$) la intensidad disminuye. Para un radio cualquiera r ,

$$I_i = \frac{I_{i0} r^2}{r}$$

P3.- Calcule el módulo del campo magnético $\vec{B}$ producido en el centro de una espira cuadrada de lado $\sqrt{2}$ m. por la que circula una corriente de 1 A ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m).

Consideremos al cuadrado en el plano XY. Tomamos como origen de coordenadas el centro del cuadrado, punto en el cual vamos a calcular el campo magnético. Los ejes los tomamos paralelos a los lados del cuadrado, como se indica en la figura.

La corriente la vamos a descomponer en los cuatro tramos correspondientes a los lados del cuadrado: AC, CD, DB y BA. Cada uno de estos tramos crea un campo magnético dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

en donde $\vec{r}$

es el vector de posición del punto en el cual se calcula el campo (en este caso se trata del origen de coordenadas y, por tanto $\vec{r} = \vec{0}$

); $d\vec{l}$

es un elemento de longitud en el sentido de la corriente; $\vec{r}'$,

es el vector de posición del elemento $d\vec{l}$

; y el denominador de la integral es la distancia desde el elemento de corriente hasta el punto en que se calcula el campo. Para cada uno de los tramos considerados, la integral se extiende a cada uno de los lados del cuadrado. Por la simetría de la figura, los campos magnéticos creados por cada lado del cuadrado en su centro son iguales. Si calculamos uno de ellos, el resultado será el cuádruplo del calculado para él.

Lado DB

Como el campo se calcula en el origen de coordenadas, $\vec{r} = \vec{0}$, la expresión del campo es

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{l} = dy \vec{j}$$

$$\vec{r} = \frac{a}{2} \vec{i} + y \vec{j}$$

$$r^3 = \left(\frac{a^2}{4} + y^2 \right)^{3/2}$$

El producto vectorial del numerador de la integral es

$$d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & dy & 0 \\ a/2 & y & 0 \end{vmatrix} = \frac{a}{2} dy \vec{k}$$

Calculemos la integral:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \frac{\frac{a}{2} \vec{k}}{\left(\frac{a^2}{4} + y^2 \right)^{3/2}} dy$$

con el cambio de variable (ver la figura)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a/2}; \quad \sec^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{a/2} dy; \quad \frac{a^2}{4} + y^2 = (a/2)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = (a/2)^2 \sec^2 \alpha$$

$$y = -a/2 \quad \alpha = -\pi/4; \quad y = a/2 \quad \alpha = \pi/4$$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \frac{(a/2)^2 \vec{k}}{\left(\frac{a^2}{4} + y^2 \right)^{3/2}} dy = \frac{1}{a/2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\alpha}{\sec^3 \alpha} \vec{k} = \frac{1}{a/2} [\operatorname{sen} \alpha]_{-\pi/4}^{\pi/4} \vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{a/2} \vec{k}$$

con lo que

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{\sqrt{2}}{a/2} \vec{k}$$

y el campo total es

$$\vec{B}_{total} = 4\vec{B} = 4 \frac{\mu_o}{4\pi} I \frac{\sqrt{2}}{a/2} \vec{k} = \frac{2\mu_o \sqrt{2}}{\pi a} I \vec{k}$$

$$\text{y sustituyendo datos, } \vec{B} = 2 \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \vec{k} = 8.0 \cdot 10^{-7} \vec{k} \text{ T}$$

$$m = 1000 \text{ kg}$$

$$h1 = 100 \text{ km} = 10 \times 10^3 \text{ m}$$

$$h2 = 200 \text{ km} = 200 \times 10^3 \text{ m}$$

$$R_o = 6500 \text{ km} = 6500 \times 10^3 \text{ m}$$

$$g_o = 9.81 \text{ N/kg}$$

$$l = 0.50 \text{ m}$$

$$N = 2500$$

$$r = 0.010 \text{ m}$$

$$\delta_o = 4\delta \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$I = 5 \cos(100\delta t)$$

$$r' = 0.020 \text{ m}$$

$$R = 4.0 \delta$$

$$a = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$I = 1 \text{ A}$$

$$\delta \delta \delta \delta \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

