

Conjuntos, Aplicaciones, Relaciones:

Conceptos primarios (sin definición): *Conjuntos, elemento, pertenece*

Teoría de conjuntos

Las reglas del juego (sin demostrar) se llaman *axiomas*.

Otros conceptos primarios: *Objetos, flechas, composición* Teoría de categorías

Notación:

a es un elemento de A $a \in A$

a no es un elemento de A $a \notin A$

Definiciones:

A está contenido en (o es un subconjunto de) un conjunto B si todos los elementos de A son elementos de B
 $A \subseteq B$

A no está contenido en (o no es un subconjunto de) un conjunto B si hay algún elemento de A que no está en B
 $A \not\subseteq B$

Axioma (del vacío) :

Existe un conjunto que no tiene elementos, lo llamamos conjunto vacío $\emptyset$

Teorema:

Si A y B son conjuntos que no tienen elementos, entonces $A = B$

– D –

$A \subseteq B$

Si demostramos que $A \subseteq B$ es falso, entonces $A \subseteq B$ es cierto.

Como A no tiene elementos, no hay ningún elemento de A que no esté en B
 $A \subseteq B$

$B \subseteq A$

Si demostramos que $B \subseteq A$ es falso, entonces $B \subseteq A$ es cierto.

Como B no tiene elementos, no hay ningún elemento de B que no esté en A
 $B \subseteq A$

Conclusión $A=B$

Pregunta: ¿Es el vacío un elemento de todo conjunto?

NO, porque $\emptyset \in \emptyset$ ya que $\emptyset$ no tiene elementos.

Teorema:

El vacío está contenido en todo conjunto. Si A es cualquier conjunto entonces $\emptyset \in A$

– D –

Reducción al absurdo

Suponemos que " un conjunto A tq. $\emptyset$ no es subconjunto suyo " $x \in \emptyset$ tq. $x \in A$ " $x \in \emptyset$ (Absurdo)

Axioma (del par):

Si A y B son conjuntos, " un conjunto que tiene como elementos a A y a B, a este nuevo conjunto lo denotaremos $\{A,B\}$. Si cogemos $A=B$ escribimos $\{A\}$

Ejemplillo :

$A = \emptyset$, hacemos un nuevo conjunto $\{\emptyset\}$, a su vez $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

$\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

$\{a,b\} \in (a,b)$ porque $(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$ y $b \in (a,b)$

nota: y a su vez $(b,a) = \{b, \{b,a\}\}$

Axioma: (de la unión)

Si A es un conjunto (cuyos elementos son conjuntos) " un conjunto U cuyos elementos están caracterizados por la siguiente propiedad: $x \in U$ si " $a \in A$ tq. $x \in a$.

Ejercicio:

$A = \{ \emptyset, \{\emptyset\} \}$

$U = \{ \emptyset \}$

$U = U \cup A$ Unión de los elementos de A

$a \in A$

Si A tiene dos elementos x,y $U = x \cup y$

Ejercicio:

Dar un conjunto con tres elementos.

$$A = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \quad B = \{ A \}$$

$$A \cup B = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, A \}$$

$\emptyset$ notación = 0

$$\{ \emptyset \} = 1$$

$\{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} = 2 = \{ \emptyset, 1 \}$ A estos conjuntos se les llama n°s naturales

$$\{ \emptyset, 1, 2 \} = 3 = 2 \cup \{ 2 \}$$

$$\{ \emptyset, 1, 2, 3 \} = 4 = 3 \cup \{ 3 \}$$

Podemos dar un conjunto listando todos sus elementos (por extensión).

Axioma: (del infinito)

Existe un conjunto $\mathbf{N}$ cuyos elementos son los n°s naturales.

Axioma: (de comprensión)

Si A es un conjunto y P es una propiedad referida a los elementos de A entonces " un conjunto cuyos elementos son los elementos de A que cumplen la propiedad P .

$\{ x \mid x \in A \text{ tq. } x \text{ cumple } P \}$ y si $P' = \emptyset$ formamos otro $\{ x \mid x \in A \text{ tq. } x \text{ cumple } P' \}$ Así podemos dar un conjunto por comprensión.

Axioma: (de las partes)

Si A es un conjunto " un conjunto $P(A)$ cuyos elementos son los subconjuntos de A . Si A tiene n elementos $P(A)$ tiene 2^n elementos.

Ejemplo:

$$A = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \} \}$$

$$P(A) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \{ \{ \emptyset \} \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \{ \emptyset \} \} \}, \{ \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \} \}, A \}$$

Operaciones con conjuntos:

Unión:

$x \in A \cup B$ si $x \in A$ o $x \in B$ o x pertenece a A y a B

Intersección:

$x \in A \cap B$ si $x \in A$ y $x \in B$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \cup B \text{ tq. } x \in A \text{ y } x \in B \} = \{ x \mid x \in A \text{ tq. } x \in B \}$$

Diferencia conjuntista:

$$A \setminus B = \{ x \in A \text{ tq. } x \notin B \}$$

$$2 \setminus 5 = 0$$

$$5 \setminus 2 = \{2,3,4\}$$

Producto cartesiano:

$A \times B$ es un conjunto con elementos los pares (a,b) tales que $a \in A$ y $b \in B$

$$2 \times 2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \quad \text{" 4}$$

$$2 \times 1 = \{(0,0),(1,0)\} \quad \text{" 2} \quad 1 \times 2 = \{(0,0),(0,1)\} \quad \text{" 2}$$

Aplicaciones:

Una aplicación f consiste de:

- Un conjunto ha llamado dominio de f .
- Un conjunto B llamado codominio de f .
- Un conjunto G_f llamado gráfica de f que cumple que es un subconjunto de $A \times B$, es decir $G_f \subseteq A \times B$, " elemento $x \in A$ " un único elemento $y \in B$ tq. $(x,y) \in G_f$.

Notación:

f

$A \rightarrow B$

$f : A \rightarrow B$

$y = f(x)$ se llama imagen por la aplicación f de x

Igualdad de aplicaciones:

Mismo dominio, codominio y gráfica.

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ no es lo mismo que $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x^2$$

Composición de aplicaciones:

$f \circ g$

$A \rightarrow B \rightarrow C$

gof

El dominio de gof es el dominio de f (es decir A)

El codominio de gof es el codominio de g (es decir C)

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para cualquier $x \in A$

Ejemplo:

$f \circ g$

1

$$g(f(1)) = 1 = (g \circ f)(1)$$

$$g(f(2)) = 1 = (g \circ f)(2)$$

$$g(f(3)) = n = (g \circ f)(3)$$

Propiedades:

- Es asociativa:

$f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h)$

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \quad A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$

$g \circ f \circ h$

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Si tenemos tres aplicaciones que se puedan componer se da esta igualdad

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ Son las mismas porque tienen los mismos dominios y codominios, ahora hay que preguntarse si tienen la misma gráfica.

Para cualquier $x \in A$ ¿ $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$?

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)))$$

- Existencia de Identidades:

Cada conjunto X determina una aplicación especial llamada identidad 1_X . Su dominio es X , su codominio es X también.

$1_X: X \rightarrow X$

$x \mapsto x$

Hay también identidades como conjuntos. Dada una aplicación cualquiera $f: A \rightarrow B$ si componemos $1_B \circ f = f$ y si componemos $f \circ 1_A = f$

Inclusiones:

Son aplicaciones especiales. Si $X \subseteq A$ podemos definir la inclusión de X en A cuyo dominio es X y su

codominio es A y cuya gráfica es la misma que la de la identidad.

i

$X \neq A$

$x \neq x$ El concepto análogo al de igualdad es Isomorfos

Isomorfismo:

Es una aplicación $f: A \rightarrow B$ tq. " otra aplicación $g: B \rightarrow A$ con las propiedades $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$

Proposición:

Si $f: A \rightarrow B$ es un isomorfismo y $g, h: B \rightarrow A$ son tales que

$$g \circ f = h \circ f = 1_A$$

Entonces $h = g$

$$f \circ g = f \circ h = 1_B$$

– D –

$$f \circ g = 1_B$$

$$h \circ (f \circ g) = h \circ 1_B = h$$

asociativa $h = g$

$$(h \circ f) \circ g = g \circ 1_A = g$$

Inversa:

Si $f: A \rightarrow B$ y

$$f \circ f^{-1} = 1_B$$

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$f^{-1} \circ f = 1_A$$

Propiedad:

Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son isomorfismos $g \circ f$ es un isomorfismo

Quiero encontrar la inversa de $g \circ f$ que es $(g \circ f)^{-1}: C \rightarrow A = f^{-1} \circ g^{-1}$

Propiedad:

Si f es un isomorfismo entonces si dos elementos del dominio tienen la misma imagen son iguales. Si $f: A \rightarrow B$ es un isomorfismo entonces " $u, v \in A$ $f(u)=f(v)$ se tiene $u = v$. Las aplicaciones que cumplen esta propiedad

son aplicaciones inyectivas.

– D –

Sabemos que existe $f^{-1} : B \rightarrow A$ tq $f \circ f^{-1} = 1_B$ y $f^{-1} \circ f = 1_A$

Supongamos $u, v \in A$ tq. $f(u) = f(v)$

$$f^{-1}(f(u)) = (f^{-1} \circ f)(u) = 1_A(u) = u$$

$$f^{-1}(f(u)) = (f^{-1} \circ f)(v) = 1_A(v) = v$$

Si $f: A \rightarrow B$ es un isomorfismo entonces " elemento $\in B$ " un $u \in A$ tq. $f(u) =$. Estas aplicaciones son sobreyectivas (cuando todo elemento del codominio es imagen de alguien del dominio)

Teorema:

Una aplicación f es un isomorfismo si y solo si es inyectiva y sobreyectiva. Si f es inyectiva y sobreyectiva entonces es un isomorfismo (biyectiva).

– D –

Sabemos que $a, b \in A$ y $f(a) = f(b)$ $a = b$

" $x \in B$ " $\exists a \in A$ tq. $f(a) = x$ (Biyectiva)

Sabemos que " $x \in B$ " $\exists a \in A$ tq. $f(a) = x$

Cardinal:

El cardinal de un conjunto es el n° de elementos del conjunto.

Aplicación imágenes directa e inversa:

$$f' : P(X) \rightarrow P(Y)$$

$$f^* : P(Y) \rightarrow P(X)$$

$$f'(A) = \{y \in Y; \exists a \in A \text{ con } f(a) = y\} \text{ Imagen directa de } A \text{ por } f$$

$$f^*(B) = \{x \in X; f(x) \in B\} \text{ Imagen inversa de } B$$

$$f'(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^*(\emptyset) = \emptyset$$

$$f'(X) \subseteq Y$$

$$f^*(Y) = X$$

Ejemplo:

$X \times Y$

$a \in \emptyset$

$b \in \{1, 2\}$

$P(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$

$P(Y) = \{\emptyset, Y, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$

$f'(\emptyset) = \emptyset \quad f'(X) = \{ \emptyset \}$

$f'(\{a\}) = \{ \emptyset \} \quad f'(\{b\}) = \{ \emptyset \}$

$f^*(\emptyset) = \emptyset \quad f^*(Y) = X$

$f^*(\{\emptyset\}) = X \quad f^*(\{1\}) = \emptyset$

$f^*(\{2\}) = \emptyset \quad f^*(\{0, 1\}) = X$

$f^*(\{0, 2\}) = X \quad f^*(\{1, 2\}) = \emptyset$

Construcción de cocientes:

Partición

Sea X un conjunto, una partición de X es un conjunto $P \subseteq P(X)$ tq.

1) Si $A, B \in P$, $A \cap B = \emptyset$

2) $\bigcup A = X$

$\emptyset \in P$

• $\emptyset \in P$

Proy: $X \rightarrow P$

$x \mapsto$ el único elemento $A \in P$ tq. $x \in A$

Relación de equivalencia:

Una relación de equivalencia R en un conjunto X es un subconjunto $R \subseteq X \times X$ con las siguientes propiedades:

1) " $x \in X$ $(x, x) \in R$ " reflexiva " $x \in X$ $x R x$ "

2) Si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$ simétrica $x R y \Rightarrow y R x$

3) Si $(x, y), (y, z) \in R$ $(x, z) \in R$ transitiva $x R y, y R z \Rightarrow x R z$

Teorema:

Dar una partición en un conjunto X es equivalente a dar una relación de equivalencia en X .

Definición:

Sea R una relación de equivalencia en X . La clase de equivalencia respecto de la relación R va a ser un subconjunto formado por los elementos que tienen la propiedad de estar relacionados con él.

$$x \in X \quad [x]_R = \{y \in X; xRy\}$$

Los elementos de P_R son las clases de equivalencia de los elementos de x (respecto a R)

Terminología:

Si R es una relación de equivalencia en x , $P_R =$ conjunto cociente de x por R y se suele denotar X/R . $\text{Proy}(x) = [x]_R$

Ejemplo:

$n \sim 5 m$ si $n-m$ es múltiplo de 5

$3 \sim 5 18$ $3 - 18 = -15$ es múltiplo de 5, luego sí están relacionados. $\sim$ es una relación de equivalencia. Hay que probar la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva.

Probamos la reflexiva: $(n-n)=0 = 5*0$ luego es múltiplo de 5.

- Calcular la partición asociada a la relación de equivalencia (calcular el conjunto cociente asociado a la relación de equivalencia).

$\mathbb{Z}/\sim 5 = \{[0]_{\sim 5}, [1]_{\sim 5}, [2]_{\sim 5}, [3]_{\sim 5}, [4]_{\sim 5}\}$ los elementos de aquí son subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Clase del 0 $[0]_{\sim 5} = \{n \in \mathbb{Z}; n \text{ es un múltiplo de } 5\} = \{0, 5, 10, 15, \dots, -5, -10, -15, \dots\}$

Clase del -1 $[-1]_{\sim 5} = \{n \in \mathbb{Z}; n \sim -1\} = \{-1, 4, 9, \dots, -6, -11, -16, \dots\}$

Notación: $\mathbb{Z}/\sim 5 = \mathbb{Z}_5$ (los elementos de $\mathbb{Z}_5$ son partes de $\mathbb{Z}$)

$$[4]_{\sim 5} = [-1]_{\sim 5}$$

Propiedad universal de proyección:

Sea X un conjunto y R una relación de equivalencia en X . La propiedad universal dice que dar una aplicación en un cociente en un conjunto cualquiera a dar una aplicación desde X en Y con la propiedad tal que $f(a) = f(b)$ si $a \sim b$

Dar $f' : X/R$ y a dar $f : X$ y tq. $f(a) = f(b)$ si $a \sim b$

X proyección X/R

$f \circ f'$

y 2 elementos relacionados tengan la misma imagen

1

2

3

a

b

c

l

m

n