SEGUNDO MOMENTO O MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA.

Por ejemplo, considérese una viga de sección transversal uniforme la cual está sometida a dos pares iguales y opuestos que están aplicados en cada uno de los extremos de la viga. Se dice que una viga en tales condiciones está en **flexión pura** y en la mecánica de materiales se demuestra que en las fuerzas internas en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas cuyas magnitudes varían linealmente con la distancia **y** que hay entre el elemento de área y un eje que pasa a través del centroide de la sección. Dicho eje representado por **x** como en la figura 9.1, se conoce como **el eje neutro.** Las fuerzas en un lado del eje neutro son fuerzas de compresión, mientras que las fuerzas en el otro lado son fuerzas de tensión; sobre el propio eje neutro de las fuerzas son iguales a cero.

La magnitud de la resultante **R** de las fuerzas elementales **F** que actúan sobre toda la sección está dada por la fórmula

La última integral obtenida se conoce como el primer momento Qx de la sección con respecto del eje x; dicha cantidad es igual a YA y por lo tanto, es igual a cero puesto que el centroide de la sección está localizado sobre el eje x. Por consiguiente el sistema de fuerzas F se reduce a un par. La magnitud m de dicho par debe ser igual a la suma de los momentos Mx = yF = Ky2 A de las fuerzas elementales. Integrando sobre toda la sección se obtiene:

La última integral se conoce como segundo momento o momento de inercia, de la sección de la viga con respecto del eje x y se representa con Ix. El segundo momento se obtiene multiplicando cada elemento de área dA por el cuadrado de su distancia desde el eje x e integrándolo sobre la sección de la viga. Como cada producto y2 dA es positivo, sin importar el signo de y, o cero, la integral Ix siempre será positiva. Otro ejemplo de un segundo momento, o momento de inercia de un área lo proporciona el siguiente problema de hidrostática:

Una compuerta circular vertical utilizada para cerrar el escurridero de un gran depósito está sumergida bajo agua como muestra la figura. ¿cuál es la resultante de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la compuerta y cual es el momento de la resultante con respecto de la línea de intersección del plano de la compuerta y la superficie del agua (eje x)?.

Si la compuerta fuera rectangular, la resultante de las fuerzas de presión se podría determinar a partir de la curva de presión tal y como se hizo en los capítulos anteriores. Sin embargo puesto que la compuerta es circular, se debe utilizar un método más general. Representado por **y** la profundidad de un elemento de área A y por el ángulo gamma al peso específico del agua, la presión en el elemento es p = y y la magnitud de la fuerza elemental ejercida sobre A es F = pA =yA.

Por lo tanto, la magnitud de la resultante de las fuerzas elementales está dada por:

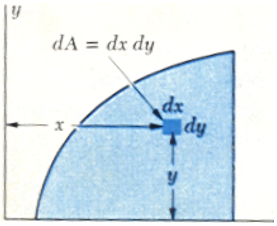
Y puede obtenerse el primer momento QX = ydA del área de la compuerta con respecto del eje x. El momento Mx de la resultante debe ser igual a la suma de los momentos Mx = yF = y2 A de las fuerzas elementales. Integrando sobre el área de la compuerta, se tiene que

Aquí, nuevamente, la integral obtenida representa el segundo momento o momento de inercia, Ix del área conrespecto del eje x.

7.2. Determinación del momento de inercia de una área por integración.

En la sección anterior definimos el momento de segundo orden, o momento de inercia. de una área A con respecto al eje x. De manera similar el momento de inercia Iy. del área A con respecto al eje y, se define como:

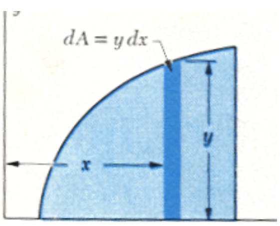
Ix = " y2 dA Iy = " x2 dA



dIx = y2dA dIy = x2dA

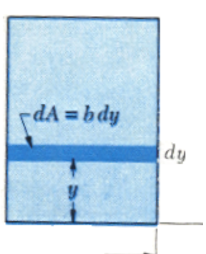
Fuerzas distribuidas: Momentos de inercia

Estas integrales que se conocen como los momentos **rectangulares de inercia** del área **A**, pueden calcularse fácilmente si se escoge para **dA** una franja angosta paralela a uno de los ejes coordenados. Para calcular **Ix**, escogemos una franja paralela al eje **x**, tal que todos los puntos que la componen estén a la misma distancia **y** del eje **x** (figura 9.3b); el momento de inercia **dIx** de la franja se obtiene, entonces, multiplicando el área **dA** de la franja por **y2**. Para calcular **Iy**, la franja se escoge paralela al eje **y** tal que todos los puntos que la forman estén a la misma distancia **x** del eje **y** (figura 9.3c); el momento de inercia **dIy** de la franja es **x2dA**.



dx

dIy = x2dA



Momento de inercia de una área rectangular. Como ejemplo. deter− minaremos el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su base (figura 9.4). Dividiendo el rectángulo en franjas paralelas al eje **x**. obtenemos

dA = b dy dlz = y2b dy lx = by2 dy = 1/3bh3 (9.2)

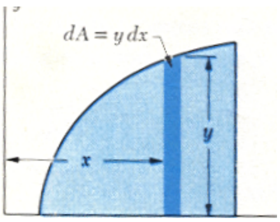
Cálculo de Ix e Iy de las mismas franjas elementales. La fórmula que acabamos de derivar puede usarse para determinar el momento de inercia dlx con respecto al eje x de una franja rectangular paralela al eje y. tal como la mostrada en la figura 9.3c. Haciendo b = dx y h=y en la fórmula (9.2), escribimos

dIx = 1/3y3 dx

Por otra parte se tiene

dIy = x2 dA = x2y dx

Por lo tanto, se puede utilizar el mismo elemento para calcular los momentos de inercia Ix e Iy de un área dada en la siguiente figura.



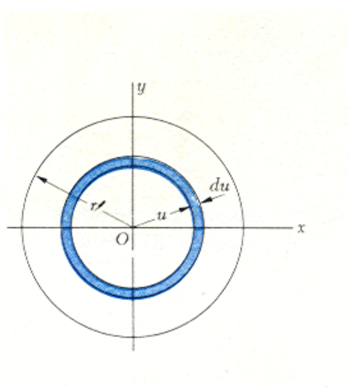
dx

dIx = 1/3y3 dx

dIy = x2y dx

PROBLEMA RESUELTO 9.2

(a) Determinar el momento polar centroidal de inercia de una área circular por integración directa. *(b)* Usando el resultado de la parte *(a)*, determinar el momento de inercia de una área circular con respecto a su diámetro.



Solución:

- Momento polar de inercia. Escogemos un elemento anular diferencial de área. Como todas las partes de esta área diferencial están a la misma distancia del origen. Escribimos.

dJo = u2dA dA = 2 u du

$$I_0 = \int dI_0 = \int_0^r u^2(2\pi u\, du) = 2\pi \int_0^r u^3\, du$$

Jo = /2 (r4)

b. Momento de inercia. Debido a la simetría del área circular tenemos Ix = IY , luego entonces escribimos:

Jo = IX +IY = 2IX /2 (r4) = 2IX

I DIÁMETRO = IX = /4 (r4)

7.3 MOMENTO POLAR DE INERCIA

Una integral de gran importancia en los problemas relacionados con la torsión barras cilíndricas y en los problemas relacionados con la rotación de placas es la siguiente

Jo = *r2* dA

(9.3)

Donde *r* es la distancia desde 0 hasta el área elemental da (figura 9.6). Esta integral es *el momento polar de inercia* del área A con respecto *del "polo'* 0.

El momento polar de inercia de un área dada puede calcularse a partir de momentos rectangulares de inercia I X e IY del área si dichas cantidades ya son conocidas. De hecho, observando que *r2* '= X2 + *y2, se* escribe

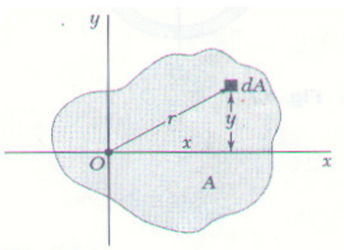


Fig. 9.6

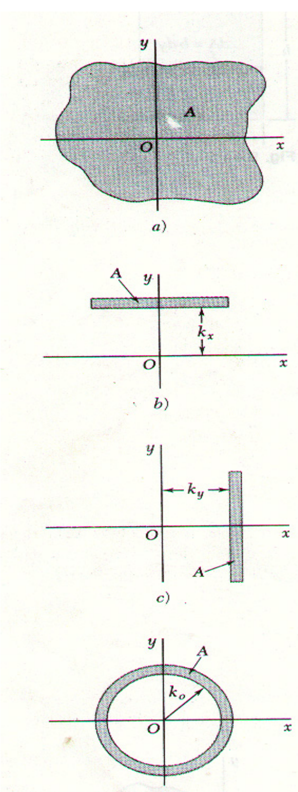


Fig. 9.7

7.4. RADIO DE GIRO DE UN ÁREA

Considérese un área A que tiene un momento de inercia IX, con respecto del eje x (figura 9.7a). Imagínese que se ha concentrado esta área en una tira delgada paralela al eje x (figura 9.7b). Si el área A, concentrada de esta forma, debe tener el mismo momento de inercia con respecto de¡ eje *x*, la tira debe ser colocada a una distancia kx, a partir del eje x, donde k., está definida por la relación

$$I_x = k_x^2$$

Resolviendo para *kx*, se escribe

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Se hace referencia a la distancia kx , como el *radio de giro* del área con respecto del eje *x.* En una forma similar, se pueden definir los radios de giro ky. *y* ko (figura 9.7c y d); así, se escribe −

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$J_O = k_O^2 A \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

Si se reescribe la ecuación (9.4) en términos de los radios de giro, se encuentra que

$$K_o^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Ejemplo. Para el rectángulo mostrado en la figura 9.8, se calcula el radio (le giro kx , con respecto de su base. Utilizando las fórmulas (9.5) y (9.2), se escribe

En la figura 9.8 se muestra el radio de giro *kx* del rectángulo. El radio de giro no debe confundirse con la ordenada Y = h/2 del centroide del área. Mientras que kx , depende *del segundo momento,* o momento de inercia del área, la ordenada Y está relacionada con *el primer momento* del área.

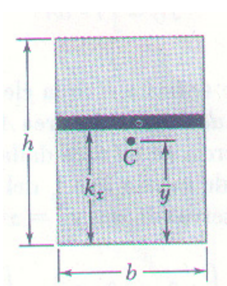


Fig. 9.8

7.5. Teorema de los ejes Paralelos.

Consideremos el momento de inercia I de una área A con respecto a un eje AA' (figura 9.9). representando con y la distancia desde un elemento de área *dA hasta* AA', escribimos

$$I = \int y^2 \, dA$$

Dibujemos ahora un eje BB' paralelo a AA' que pase por el centroide C

del área: este eje es llamado un *eje centroidal.* Llamando y' la distancia

del elemento *dA* a BB', escribimos y = y' + d, donde d es la distancia

entre los ejes AA' y BB'. Remplazando y en la integral de I, escribimos

La primera integral representa el momento de inercia I del área con res-pecto al eje centroidal BB'. La segunda integral representa el momento de primer orden del área con respecto a BB'; como el centroide C del área está localizado sobre ese eje. la segunda integral debe ser nula. Final-mente, observamos que la última integral es igual al área total A. Escri-bimos entonces,

$I = I + Ad2$ (9.9)

Esta fórmula expresa que el momento de inercia I de una área con res-pecto a cualquier eje dado AA' es igual al momento de inercia I del área con respecto a ,un eje centroidal BB' paralelo a AA' más el producto Ad2 del área A y el cuadrado de la distancia *d* entre los dos ejes. Este teorema se conoce como el *teorema de los ejes paralelos.* Remplazando I Por k2 A e I por K2 A. el teorema puede también expresarse de la siguiente manera:

$k\,2 = K2 + d2$ (9.10)

Un teorema similar se puede usar para relacionar el momento polar de inercia J de una área con respecto a un punto 0 y el momento polar de inercia Jc de la misma área con respecto a su centroide C. Llamando d la distancia entre 0 y C, escribimos

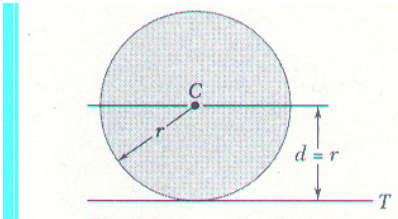
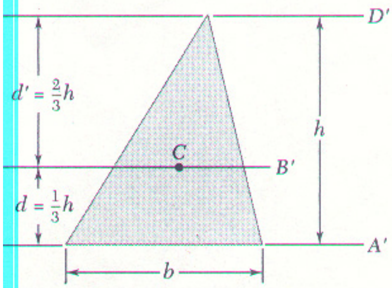


Fig. 9.10



9.11

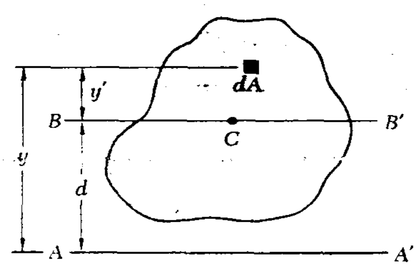


Fig. 9.9

Ejemplo 1. Como una aplicación del teorema de los ejes paralelos, se procederá a determinar el momento de inercia IT de un área circular con respecto de una línea tangente al círculo (figura 9.10

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)r^2 = \tfrac{5}{4}\pi r^4$$

Ejemplo **2.** El teorema de los ejes paralelos también se puede utilizar para determinar el momento centroidal de inercia de un área cuando se conoce el momento de inercia del área con respecto de un eje paralelo. Por ejemplo, considérese una área triangular (figura 9.1 l). Utilizando el teorema de los ejes paralelos se escribe:

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$
$$\bar{I}_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \tfrac{1}{12}bh^3 - \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{1}{3}h)^2 = \tfrac{1}{36}bh^3$$

Se debe señalar que el producto Ad2 *fue restado* del momento de inercia dado con el fin de obtener el momento centroidal de inercia del triángulo. Obsérvese que dicho producto se *sana* cuando se pasa de un eje centroidal a un eje paralelo, pero debe *restarse* cuando se pasa a un eje centroidal. En otras palabras, el momento de inercia de un área siempre es menor con respecto de un eje centroidal que con respecto de cualquier otro eje paralelo. −

Regresando a la figura 9.11, se observa que el momento de inercia del triángulo con respecto de la línea *DD'* (la cual se ha dibujado a través de un vértice del triángulo) se puede obtener escribiendo

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad''^2 = \tfrac{1}{36}bh^3 + \tfrac{1}{2}bh\left(\tfrac{2}{3}h\right)^2 = \tfrac{1}{4}bh^3$$

Obsérvese que IDD´ no se habría podido obtener directamente a partir de IAA´,. El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes paralelos, pasa a través del centroide del área.

7.6. Momentos de inercia de áreas compuestas. Consideremos una área compuesta *A* formada por varias áreas componentes *A*1, *A*2. etc. Como la integral que representa el momento de inercia de *A* puede subdividirse en integrales calculadas sobre *A1* , *A2*. etc.. el momento de inercia de *A* con respecto a un eje dado se obtendrá sumando los momentos de inercia de las áreas *A1*, *A2*. etc.. con respecto al mismo eje. El momento de inercia de una área formada por varias de las formas comunes mostradas en la figura 9.12 puede entonces obtenerse de las fórmulas dadas en esa figura. Sin embargo, antes de sumar los momentos de inercia de las áreas componentes, se debe usar el teorema de los ejes paralelos para referir cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en los problemas modelo 9.4 y 9.5.

7.7. PRODUCTO DE INERCIA

La integral

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$

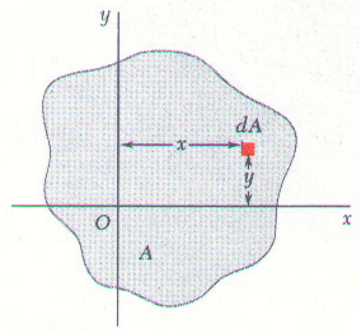


Fig. 9.14

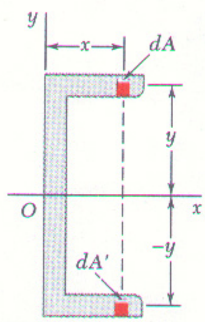


Fig. 9.15

la cual se, obtiene al multiplicar a cada elemento *dA* de un área A por sus coordena− das *x e y* e integrando sobre toda el área (figura 9.14), se conoce como *el producto de inercia* del área A con respecto de los ejes *x* e y. A diferencia de los momentos de inercia 1x *e IY* ,, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero.

Cuando uno o ambos de los ejes *x e* y son ejes de simetría del área A, *el* producto de inercia Ixy. es igual a cero. Por ejemplo, considérese la sección en forma de canal mostrada en la figura 9.15. Puesto que esta sección es simétrica con respecto del eje *x*, se puede asociar con cada elemento dA de coordenadas *x e y* un elemento dA 'de coordedadas x y −y. Obviamente, las contribuciones a IXY de cualquier par de elementos seleccionados de esta forma se cancela y, por lo tanto, la integral de arriba se reduce a cero.

Para los productos de inercia se puede derivar un teorema de ejes paralelos similar al establecido en la sección para momentos de inercia. Considérese

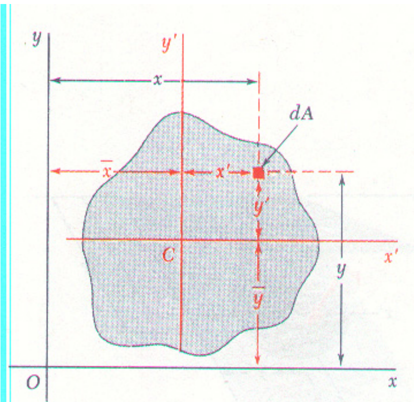


Fig. 9.16

un área A y un sistema de coordenadas rectangulares x *e* y (figura 9. 1 6). A través del centroide C del área, cuyas coordenadas son X e Y se dibujan dos *ejes centroidales x' e y'* que son paralelos, respectivamente, a los ejes *x e y*, Representando con *x e y* las coordenadas de un elemento de área dA con respecto de los ejes originales y con x' e y' las coordenadas del mismo elemento con respecto de los ejes centroidales, se escribe *x = x'* + *X e y = y'* + Y. Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (9.12), se obtiene la siguiente expresión para el producto de inercia

(x' + !)(y' + −*) dA* y

IXY:

$$I_{xy} = \int xy\, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y})\, dA$$
$$= \int x'y'\, dA + \bar{y} \int x'\, dA + \bar{x} \int y'\, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA$$

La primera integral representa el producto de inercia IXÝ´ del área A con respecto de los ejes centroidales x' *e y'*. Las dos integrales siguientes representan primeros momentos del área con respecto de los ejes centroidales; dichas integrales se reducen a cero puesto que el centroide C está localizado sobre esos ejes. Finalmente, se observa que la última integral es igual al área total A. Por lo tanto, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$$

BIBLIOGRAFÍA

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

ESTÁTICA

FERDINAND P. BEER

E. RUSSELL JOHNSTON JR.

EDITORIAL: MC GRAW−HILL