

TRABAJO 1

PROBABILIDAD

• CONCEPTOS BÁSICOS

Probabilidad. Es el estudio de los fenómenos de los que no estamos seguros de su ocurrencia.

Fenómeno. Es la ocurrencia de un hecho o suceso.

Experimento. Es un fenómeno observable perfectamente definido.

Los fenómenos observables se pueden clasificar en:

- **Determinísticos.** Se puede predecir el resultado.
- **Aleatorios.** No se puede predecir el resultado.

Espacio Muestral (Resultados). Es el conjunto de todos los posibles resultados que hay en un fenómeno aleatorio. El espacio muestral se clasifica en:

- Espacio muestral Discreto. Es aquel donde se puede contar el número de posibles resultados.
- Espacio muestral Continuo. No se puede enumerar los posibles resultados, debido a que, el espacio muestral continuo está definido sobre la recta de los números reales.

Evento. Es un conjunto de resultados que tiene cierta característica común. Los eventos pueden ser:

- Evento **seguro**. Es aquel que tiene todos los posibles resultados.
- Evento **imposible**. Es aquel que no tiene un posible resultado.
- Evento **complementario**. Es aquel evento que está compuesto por los eventos que no están en este evento.
- Eventos **mutuamente excluyentes**. Para que un evento sea mutuamente excluyente debe cumplirse que $A \cap B = \emptyset$.
- Evento **colectivamente exhaustivo**. Un conjunto de eventos $E_1, E_2, \dots, E_n$ son colectivamente exhaustivos cuando $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = S$, donde S es el espacio muestral.

TÉCNICAS DE CONTEO

Principio fundamental del conteo.

Si un evento puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si con el procedimiento n_2 maneras diferentes y si después de efectuados estos, n_3 otro procedimiento de maneras diferentes y así sucesivamente, entonces el número de formas o maneras en las que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_r = n_T$.

El número total (n_T) de formas o maneras en que puede realizarse un evento es

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_r = n_T$$

Diagrama de árbol

Es un dibujo que se usa para numerar los resultados de un experimento, cuenta con los siguientes elementos:

- Nodo inicial. Puede o no representar un evento.
- Nodos finales o terminales. Son el número de alternativas.
- Ramas. Une a dos nodos.

PERMUTACIONES

Es un arreglo en orden particular que forma un conjunto.

El número de permutaciones de r objetos escogidos de un conjunto de n objetos distintos es

o, en forma factorial

donde:

n = tamaño de la población

r = tamaño de la muestra

• Permutaciones con repetición

COMBINACIONES

Una combinación es una selección de objetos en donde no importa el orden sino la pertenencia al grupo.

El número de formas en que r objetos pueden elegirse de un conjunto de n objetos distintos es

TEOREMA DEL BINOMIO

• FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

PROBABILIDAD CLÁSICA

Sea un experimento un espacio de resultados (S), con n resultados igualmente posibles en el cual define un evento A con n_A resultados posibles en él, entonces

PROBABILIDAD FRECUENTISTA

Repetición de un experimento bajo las mismas condiciones muchas veces y repetirlo casi hasta que llegue a la probabilidad clásica, entonces

PROBABILIDAD SUBJETIVA

Un punto de vista alternativo que actualmente ha tenido popularidad es interpretar las probabilidades como evaluaciones personales o subjetivas. Tales probabilidades expresan una creencia sobre las incertidumbres involucradas, y se aplican especialmente cuando poca o ninguna evidencia; así que no hay otra opción que considerar evidencias paralelas (indirectas), conjeturas fundamentadas y quizás intuición u otros factores subjetivos.

Entonces

Probabilidad = O !! el evento no ocurrirá

Probabilidad = 1 !! seguro el evento ocurre

AXIOMAS Y TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD

Axiomas

- $P(A) \geq 0$
- $P(S) = 1$
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Teoremas

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

PROBABILIDAD CONJUNTA

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Probabilidad condicional es la probabilidad de un evento dado que ocurrió otro.

Ahora

a lo anterior se le conoce como propiedad multiplicativa de ocurrencia conjunta.

EVENTOS INDEPENDIENTES

A y B son independientes si y sólo si cumplen con las siguientes condiciones

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

PROBABILIDAD TOTAL

Si $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, son eventos mutuamente excluyentes, uno de los cuales debe ocurrir, entonces

TEOREMA DE BAYES

• VARIABLES ALEATORIAS

Una **variable aleatoria** es una función que va a relacionar cada uno de los resultados de los experimentos con los números reales. Las variables aleatorias se clasifican

- Variables aleatorias discretas. Se puede contar el número de resultados posibles
- Variables aleatorias continuas. No se puede saber el número de resultados posibles, ya que esta dentro de la recta de los números reales.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

- **Función o distribución de probabilidad**

Una función de probabilidad es una función que asigna un número $P(x)$ a cada valor posible de x .

Propiedades:

- $P(x_i) \geq 0$
- $\sum P(x_i) = 1$

- **Función de probabilidad acumulada**

Propiedades:

- $0 \leq F(x_i) \leq 1$
- $F(x_i) \leq F(x_j) \forall x_i \leq x_j$
- $P(x > x) = 1 - F(x)$

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

- **Función densidad de probabilidad**

La función densidad debe cumplir:

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

- **Función de distribución acumulada**

Propiedades:

- $0 \leq F(x_i) \leq 1$
- $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

VALOR ESPERADO

- **Caso discreto**

$$E(x) = \sum x P(x)$$

- **Caso continuo**

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Propiedades:

- $E(c) = c$
- $E(cx) = cE(x)$
- La esperanza de una suma = la suma de las esperanzas

Esperanza de una función de variable aleatoria

Sea $g(x)$ una función de x

- Caso discreto

$$E[g(x)] = \sum g(x)P(x)$$

- Caso continuo

$$E[g(x)] = \int g(x)f(x)dx$$

Variancia

- Caso discreto
- Caso Continuo

MOMENTOS

• Momentos con respecto al origen (')

- Caso discreto

$$\mu'_r = \sum x^r P(x)$$

- Caso continuo

$$\mu'_r = \int x^r f(x)dx$$

• Momentos con respecto a la media

- Caso discreto
- Caso continuo

• VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS DISCRETAS

• Función de probabilidad conjunta

Propiedades:

- $P(x,y) \geq 0$
-

• Función de distribución acumulativa conjunta

• Funciones marginales de probabilidad

$$P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x,y) ; \forall y$$

- Esperanza
- Covarianza

- Coeficiente de correlación
- Distribución de probabilidad condicional
- Independencia estadística

$$P(x/y)=P_x(x) ; \forall x,y$$

$$P(x,y)= P_x(x)P_y(y)$$

VARIABLE ALEATORIA CONJUNTA CONTINUA

- Función de densidad acumulativa conjunta

Propiedades:

- $f(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$
- $P(a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq y_2 \leq b_2) =$

- Función de distribución acumulativa conjunta
- Funciones marginales de probabilidad
- Esperanza
- Variancia
- Covarianza
- Coeficiente de correlación
- Independencia estadística

$$f(x/y)=f_x(x)$$

$$F(x,y) = f_x(x)f_y(y)$$

- Distribución de probabilidad condicional

• MODELOS ANALÍTICOS DE FENÓMENOS ALEATORIOS CONTINUOS

PROCESO DE BERNULLI

$$P(\text{éxito}) = P$$

$$P(\text{fracaso})= q= 1 -P$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

¿Cuántos éxitos en n intentos?

$$E(x) = x = nP$$

$$x = nPq$$

DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA

$$P(x;P) = Pq^{x-1}$$

$$E(x) = 1/P$$

$$= q/p^2$$

DISTRIBUCIÓN DE PASCAL

* si $k = 1$, entonces es Dist. Geométrica

$$E(x) = k/p$$

$$x = qk/p^2$$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

¿Cuántos éxitos en n intentos?

=

x =

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

$$E(x) =$$

=

= t= frecuencia media

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Es la distribución de probabilidad en el tiempo, espacio o distancia en la que ocurre el primer evento.

=

DISTRIBUCIÓN NORMAL (DE GAUSS)

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDARIZADA

BIBLIOGRAFÍA

M.I. Marina esastigue R.

Apuntes de probabilidad (semestre 2000–3)

UNAM-FI

México, 20000