

SOLUCION DE UNA ECUACION MATEMATICA DE SEGUNDO GRADO USANDO UN METODO GEOMETRICO, CREADO EN EL AÑO 800, POR UN UN MATEMATICO ARABE, CONOCIDO COMO MUSA AL-KHWARIZMI (780-850).

Quiero mostrarte una forma muy ingeniosa de resolver ecuaciones de segundo grado , en una etapa en donde la matemática estaba en pañales. Este matemático trabajó en la biblioteca de Bagdad, cuando esta ciudad reemplazó a la gran Alejandría como centro cultural del mundo. Poco se sabe de este hombre, pero si, se confirmó, que escribió unas pocas pero importantes obras sobre aritmética y álgebra, con numerosas aplicaciones practicas. Estudió 6 casos de ecuaciones de segundo grado, y a la incógnita X la llamaba: cosa.

Como en aquella época no había un lenguaje estructurado para escribir ecuaciones, y menos, métodos algebraicos para resolverlas, este matemático (al igual que todos), recurrió a la geometría para resolver estas ecuaciones.

Cuando tienes una ecuación de primer grado (la incógnita X, no tiene exponente), la solución solo consiste en ir despejando los términos hasta dejar solita la X, y listo.

Por ejemplo: $3X+4=10$ de donde $X=(10-4)/3$, $x=2$

Nota que pasé primero el 4 restando al 10 porque estaba sumando, luego el 3 dividiendo porque estaba multiplicando y la X quedó sola en un miembro, y vale 2.

Bien, el problema aparece, cuando la X se eleva al número 2, entonces, queda: X^2 , es decir elevada al cuadrado. Ahora como se hace para dejar sola a la X.

Actualmente (y desde hace siglos), hay un formulita muy simple para obtener el valor de X en estos casos, y en cualquier libro de matemática media la puedes encontrar, para no complicarla ahora.

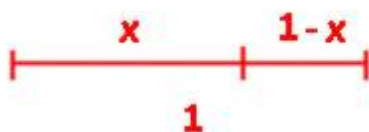
Ejemplo de ecuación de segundo grado:

$$3x^2-6x-10=0$$

Llevando este problema a 1200 años atrás, donde esas técnicas aun no existían, los matemáticos debieron agudizar su ingenio para tratar de resolver algunos casos de este tipo de ecuaciones, sobre todo porque tenían mucho uso en la vida práctica, donde se calculaban superficies, volúmenes, etc.

Te explicaré esta técnica, conocida como de completar cuadrados, utilizando el número de oro (muy usado en el libro Código de Da Vinci), que justamente viene determinado mediante una ecuación de segundo grado.

La proporción áurea es aquella, que respeta la siguiente condición, entre los segmento de la figura:



El cociente entre el segmento menor y el mayor debe ser igual al cociente entre el segmento mayor y el largo total del segmento, que en este caso vale 1.(puede ser 1 metro, 1 kilometro, 1 centímetro, etc).

En número ò en el lenguaje de las matemática es:

$$\frac{1-x}{x} = -\frac{x}{1} \Rightarrow 1-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Observa la última ecuación y notarás que es de 2do. Grado. Resolver esto hoy, es cosa de chicos y si aplicas la fórmula o resolvente de 2do. Grado como se la conoce, obtendrás el número de oro : $X = 0.618.....$

Te mostraré como hizo este árabe para calcular el valor de X , sin despejar nada, ni usar formulas.

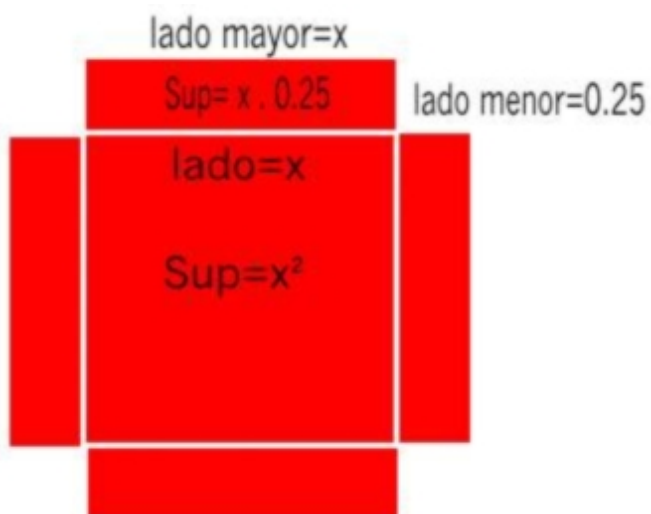
A la ecuación: $x^2 + x - 1 = 0$

La pone así: $x^2 + x = 1$ (pasa el 1 restando al otro miembro como suma)

Supone lo siguiente:

El primer miembro: $x^2 + x$, dice (y tiene razón) que le representa la superficie lateral de una *caja* (como de zapatos), cuya base es cuadrada de lado x y las cuatro caras laterales tienen un lado menor igual a: $\frac{1}{4}$ ó 0.25 , (como más te guste), por un lado mayor igual a x .

Mirado la figura donde hay una caja desarrollada, se establece que:



La superficie de la base cuadrada vale lado por lado, es decir: $x \cdot x = x^2$

La superficie de cada cara lateral es: $\frac{1}{4} \cdot x = x/4$

Como hay 4 caras, la superficie total será: $4 \cdot x/4 = x$

(Observa que al lado menor lo hace valer 0.25 justamente para que al calcular la superficie de las cuatro caras le dé igual a X, que es el segundo término de su ecuación.)

Esta superficie vale: 1 (uno), porque así dice la ecuación inicial.

Es decir: $x^2 + x = 1$

Primer miembro superficie caja=Segundo miembro: valor de la superficie=1

Ahora, AL-KHWARIZMI, completa los cuatro cuadraditos de los ángulos, para obtener un nuevo gran cuadrado y calcula la superficie del mismo.



Ahora vale: $1 +$ la superficie de los 4 nuevos cuadraditos de $\frac{1}{4}$ de lado.

Por lo tanto la superficie del cuadrado grande es:

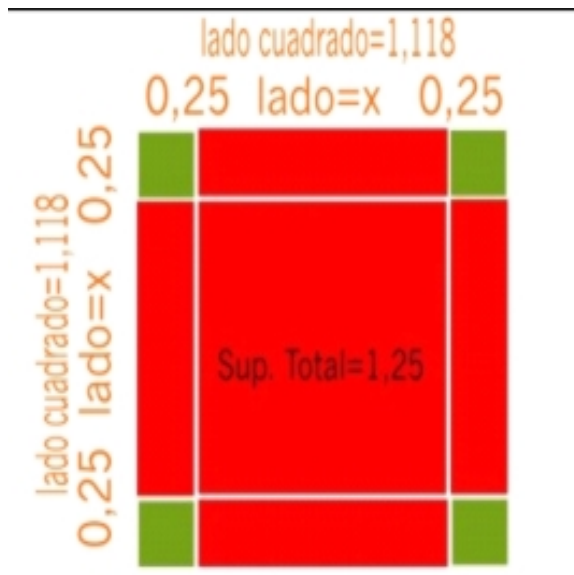
$$1 + 4 \cdot 0.25 \cdot 0.25 = 1.25$$

Si ahora la superficie del cuadrado vale: 1.25, cuánto vale el lado del mismo?. Hay que buscar un número que multiplicado por sí mismo dé 1.25, y buscado se tiene que es el: 1.118 pues:

$$1.118 \cdot 1.118 = 1.25$$

Y ahora llega el remate final, para obtener el valor de X.

Mira la figura y se observa que si el lado del cuadrado mide 1.118 y los lados de cada cuadradito el de 0.25, cuánto vale ahora X? (que justamente es la raíz de la ecuación)



Muy simple debes restar al lado grande, los dos pedazitos de los cuadraditos, ósea que: $X = 1.118 - 2 \cdot 0.25 = 0.618$...Nota que de esta manera, haciendo una comparación geométrica, este sabio de la alta edad media, pudo llegar a conocer el valor de X.

Aquí se aplicó para obtener el numero de oro de la ecuación planteada a partir de las condiciones de proporcionalidad entre dos segmentos. Este método es universal, y se puede aplicar a cualquier ecuación que tenga soluciones en el campo real. Sólo debe estimarse cuanto vale el lado menor de las caras laterales, para que al calcular el área total de las cuatro caras, te dé el valor del segundo término de la ecuación.

ECUACIONES POLINÓMICAS EN UNA VARIABLE

Las ecuaciones en general, son igualdades entre expresiones algebraicas en las que intervienen una o más variables. Las ecuaciones constituyen una importante herramienta en el álgebra. Adquirir habilidad para resolverlas resulta de suma importancia, por cuanto ello facilita la solución a múltiples problemas que se presentan en las aplicaciones de matemática.

Cuando las expresiones algebraicas de cada miembro de la igualdad cumplen con ciertas condiciones, las ecuaciones reciben nombres particulares. De esta manera:

Ecuaciones Polinómicas: Son aquellas en las que las expresiones algebraicas que intervienen en la ecuación, son polinomios (existen otras expresiones algebraicas que no son polinomios, tales como las expresiones algebraicas racionales y otras).

Ejemplos de ecuaciones polinómicas:

a) $2x + \frac{1}{2}y = 4x^2$

que puede expresarse también: $2x + \frac{1}{2}y - 4x^2 = 0$

b) $-\frac{1}{3}x^3 + 3xy = -x^2 + \frac{4}{3}$

que puede expresarse también: $-\frac{1}{3}x^3 + 3xy + x^2 - \frac{4}{3} = 0$

c) $3x + \frac{7}{3}y + z = 5$

que puede expresarse también: $3x + \frac{7}{3}y + z - 5 = 0$

Ecuaciones en una variable: Son aquellas en las que las expresiones algebraicas que intervienen en la ecuación, contienen una sola variable.

Ejemplos de ecuaciones en una variable, no polinómicas:

a) $2\sqrt{x} + \frac{1}{2} = 4x$

que puede expresarse también: $2\sqrt{x} + \frac{1}{2} - 4x = 0$

b) $2r^2 + \frac{3}{2} = -\frac{r^2 + 1}{r}$

que puede expresarse también: $2r^2 + \frac{3}{2} + \frac{r^2 + 1}{r} = 0$

c) $3t + \frac{7}{3}(t^2 + 1) = \sqrt{\frac{1}{t+1}}$

que puede expresarse también: $3t + \frac{7}{3}(t^2 + 1) - \sqrt{\frac{1}{t+1}} = 0$

Ecuaciones Polinómicas en una Variable: Son ecuaciones en las que las expresiones algebraicas que intervienen son polinomios que poseen una sola variable.

En general, son expresiones de la forma: $P(x) = 0$

El primer miembro es un polinomio en la variable x (puede indicarse con cualquier otra letra). Esa variable es la **incógnita** de la ecuación y el **grado de la ecuación**, es el grado del polinomio $P(x)$.

Ejemplos de ecuaciones polinómicas en una variable:

a) $3x - 10 = 0$

es una ecuación de primer grado.

b) $2 - \frac{1}{2}x - x^2 = 0$

es una ecuación de segundo grado.

c) $3m^4 - 1 + \frac{3}{4}m^2 = 0$

es una ecuación de cuarto grado (o de grado cuatro)

Resolución de ecuaciones polinómicas en una variable en $\mathbb{R}$

Resolver una ecuación, significa determinar el/los valor/es de la incógnita que verifica/n la igualdad. Y hacerlo en el conjunto numérico $\mathbb{R}$ implica que es posible usar todas las propiedades de las operaciones de este conjunto.

Se denomina **conjunto solución** al conjunto formado por los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad, que no es otra cosa que el conjunto de raíces de $P(x)$, y se denota con la letra S .

Ecuaciones polinómicas de primer grado con una incógnita

Estas ecuaciones también reciben el nombre de ecuaciones lineales. Son expresiones de la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es un polinomio de primer grado.

Por lo tanto, toda ecuación de primer grado con una incógnita se puede escribir en la forma:

$$ax + b = 0$$

siendo a y b números reales y

a es el término lineal y b el término independiente

Resolución de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$

Para resolver una ecuación lineal con una incógnita en $\mathbb{R}$, se recurre a la aplicación de las propiedades que resulten necesarias para ir obteniendo ecuaciones equivalentes a la inicial, hasta reducirla a la expresión general $ax + b = 0$

. Una vez obtenida esta expresión, se continuará aplicando propiedades hasta obtener la solución.

Propiedades de las operaciones en el conjunto de números reales

En $\mathbb{R}$ se definen las operaciones adición y multiplicación que verifican las siguientes propiedades:

Propiedades de la adición

- Ley de cierre: Si $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b \in \mathbb{R}$
- Ley uniforme: Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ y $a = b$ entonces $a + c = b + c$
- Ley conmutativa: $a + b = b + a$ cualesquiera sean los números reales a y b
- Ley asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$ cualesquiera sean los números reales a , b y c
- Existencia del elemento neutro: Existe el número 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$ cualquiera sea el número real a
- Existencia del inverso aditivo: Cualquiera sea el número real a , existe un único número real b

tal que $a + b = b + a = 0$ ($b = -a$)

Propiedades de la multiplicación

- Ley de cierre: Si $a \in R$ y $b \in R$
entonces $a \cdot b \in R$
- Ley uniforme: Si $a \in R, b \in R$ y $c \in R$ y $a = b$
entonces $a \cdot c = b \cdot c$
- Ley conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
cualesquiera sean los números reales a y b
- Ley asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
cualesquiera sean los números reales a, b y c
- Existencia del elemento neutro: Existe el número 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
cualquiera sea el número real a
- Existencia del inverso multiplicativo: Cualquiera sea el número real a
distinto de cero, existe un único número real tal que
- Ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

cualesquiera sean los números reales a, b y c

Ejemplo de resolución de una ecuación:

$$2(x + 3) + x = 0$$

$$2x + 6 + x = 0$$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma

$$(2x + x) + 6 = 0$$

Propiedad asociativa de la suma

$$3x + 6 = 0$$

Suma dentro del paréntesis (se llegó a la expresión general)

$$(3x + 6) + (-6) = 0 + (-6)$$

Propiedad uniforme de la suma y existencia del inverso aditivo

$$3x + [6 + (-6)] = 0 + (-6)$$

Propiedad asociativa de la suma

$$3x + 0 = -6$$

Propiedad de suma de un número con su inverso aditivo en el primer miembro, y suma en el segundo miembro

$$3x = -6$$

Propiedad del neutro aditivo

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot (-6)$$

Propiedad uniforme de la multiplicación y existencia del inverso

multiplicativo

Propiedad asociativa de la multiplicación

Propiedad de la multiplicación de un número con su inverso multiplicativo en el primer miembro, y multiplicación en el segundo miembro.

$$x = -2$$

Propiedad del neutro multiplicativo

Verificación

La verificación es un procedimiento que permite saber si el valor obtenido para la incógnita es o no el correcto.

El procedimiento consiste en reemplazar dicho valor en la **expresión original** de la ecuación, y resolver cada miembro hasta llegar a una identidad, lo que confirmaría que el valor hallado es solución.

Ejemplo: Verificación del valor $x = -2$
como solución de la ecuación $2(x + 3) + x = 0$

Reemplazando $x = -2$
en la ecuación original y operando, se obtiene:

Como se llegó a una identidad, se concluye que es solución y el conjunto solución es $S = \{-2\}$

A veces no es necesario llegar a la expresión igualada a cero (expresión general), ya que resulta conveniente que los términos lineales (que contienen la incógnita) se agrupen en el primer miembro, mientras que los términos independientes (que no contienen la incógnita) se agrupen en el segundo miembro.

Ejemplo: Resolver la ecuación.

(en la resolución se aplican las propiedades sin indicarlas)

$$\frac{1}{2} 2x = \frac{1}{2} 8$$
$$1.x = 4$$

Verificación

Reemplazando en la ecuación original y operando, se obtiene:

Como se llegó a una identidad, se concluye que es solución y el conjunto solución es $S = \{4\}$

Distintos tipos de solución

Las ecuaciones pueden presentar tres tipos de solución:

. Única solución.

. Solución vacía.

. Infinitas soluciones.

Ecuaciones con única solución

Una ecuación tiene única solución si existe solamente un número real que satisface la igualdad. En este caso, el conjunto solución es el conjunto unitario formado por dicho número real.

Ejemplo: Verificación

Luego de verificar, el conjunto solución es

Ecuaciones con solución vacía

Una ecuación tiene solución vacía cuando no existe ningún número real que satisface la igualdad. En este caso se dice que la ecuación no tiene solución y el conjunto solución es el conjunto vacío.

Ejemplo:

Resolviendo la ecuación resulta:

Esta ecuación no tiene solución porque la igualdad obtenida no se cumple para ningún número real x , ya que para cualquier valor de x se obtendría lo cual es un absurdo, por lo que el conjunto solución es vacío. Es decir

Ecuaciones con infinitas soluciones

Una ecuación tiene infinitas soluciones cuando existen infinitos números reales que satisfacen la igualdad. En este caso la ecuación recibe el nombre de *identidad*, y el conjunto solución es el formado por todos los números reales.

Ejemplo:

Esta ecuación tiene infinitas soluciones porque para cualquier número real x , se obtiene $0 = 0$ que es una identidad. El conjunto solución es $S = R$

Casos particulares

Algunas ecuaciones que no son lineales, pueden llevarse a la forma lineal mediante pasos algebraicos (aplicación de propiedades de las operaciones), tal es el caso de igualdades en las que aparecen expresiones algebraicas racionales. En estos casos, antes de comenzar la resolución, se debe determinarse el o los valores de la variable que anulan los divisores (denominadores) para no considerarlos como solución, ya que la división por cero no está definida.

Ejemplos:

a) Se observa que el denominador se anula para $x = 1$, entonces la condición a tener en cuenta es que x no puede tomar el valor 1

Para resolver la ecuación, se aplica la propiedad: para todo número real

condición

Valor que no es admitido como solución por la condición

Por lo tanto en conjunto solución es

b) En esta ecuación el valor no permitido para x es -2 .

Resolviendo la ecuación, se obtiene:

En este caso el valor de x cumple con la condición de ser distinto de -2 . Por lo tanto se puede verificar que el conjunto solución es

También pueden presentarse ecuaciones que en principio parecen ser de segundo grado (o más), pero que al llevarlas a su expresión general, resultan ser lineales al anularse el/los término/s de mayor grado. Por ejemplo:

Aplicando propiedades se obtiene:

Resulta una ecuación lineal:

Aplicaciones

Ya se mencionó la importancia de las ecuaciones en la resolución de problemas.

Para resolver un problema aplicando ecuaciones con una incógnita, se procede de la siguiente manera:

- Leer e interpretar el enunciado, para poder identificar datos e incógnita determinando las relaciones que existen entre ellos.
- Cuando se trate de un problema geométrico, es conveniente realizar un dibujo (esquema gráfico) donde se anoten los datos e incógnita.
- Escribir la ecuación que corresponda a la relación encontrada entre los datos y la incógnita.
- Resolver la ecuación.
- Analizar la solución algebraica, para determinar si el valor obtenido responde a las condiciones del problema. En caso afirmativo, se procederá a enunciar la respuesta del mismo.

Ejemplo: El perímetro de un triángulo isósceles es de 50 cm y la base mide 11 cm más que uno de los lados iguales. Halle la longitud de los lados.

En este caso, un gráfico permite ilustrar la situación. x x

Llamando x a la longitud de los lados iguales, la base

quedará identificada con $x + 11$; y el perímetro será: $x + 11$

Según los datos del problema, el perímetro es de 50 cm .

Por lo tanto, reemplazando este valor en la expresión anterior, se obtiene la ecuación cuya resolución permitirá dar la respuesta al problema.

La solución de esta ecuación es: $x = 13\text{m}$

La respuesta del problema será entonces: La base mide 24 cm (se obtiene al reemplazar el valor de x en la expresión de la base) y los lados iguales miden 13 cm cada uno.

Ecuaciones polinómicas de SEGUNDO grado con una incógnita

Estas ecuaciones también reciben el nombre de ecuaciones cuadráticas. Son expresiones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ es un polinomio de segundo grado.

Por lo tanto, toda ecuación de segundo grado con una incógnita se puede escribir en la forma:

siendo a , b y c números reales y

ax^2 es el término cuadrático, y a el coeficiente del término cuadrático.

bx es el término lineal, y b el coeficiente del término lineal.

c es el término independiente.

Resolución de ecuaciones cuadráticas con una incógnita

Para determinar el conjunto solución de estas ecuaciones, es importante analizar si contiene todos los términos. En caso de no presentar el término lineal o el independiente ($a = 0$ o $b = 0$) conviene aplicar métodos prácticos de resolución, distintos del correspondiente a una ecuación cuadrática completa.

Ecuaciones cuadráticas sin término lineal ($b = 0$)

Son de la forma:

En este caso, se obtiene la solución en forma inmediata, aplicando propiedades de las operaciones, que permiten despejar la incógnita.

Ejemplo:

Cabe recordar que al aplicar raíz cuadrada en ambos miembros se deben considerar los dos signos posibles para la incógnita.

De esta manera resulta:

Verificaciones

El conjunto solución es

Ecuaciones cuadráticas sin término independiente ($c = 0$)

Son de la forma:

En este caso, se obtiene la solución factorizando el primer miembro. Como el producto obtenido (siempre pueden considerarse dos factores) está igualado a cero, se debe cumplir que uno de los factores es cero o bien ambos son ceros. El planteo de esta propiedad nos lleva a dos ecuaciones lineales con una incógnita, que al resolverlas permitirán obtener el conjunto solución de la ecuación cuadrática.

Ejemplo:

Factorizando el primer miembro (factor común x):

Aplicando propiedad:

La solución de es . Y la solución de es

Verificaciones

El conjunto solución de la ecuación cuadrática es

Ecuaciones cuadráticas completas

Son de la forma: con a , b y c distintos de cero.

Se puede obtener una fórmula que permite encontrar las raíces de la ecuación. Sólo se requiere identificar los coeficientes a y b , y el término independiente c que deben reemplazarse en la fórmula.

Obtención de la fórmula

Para obtener la fórmula se siguen los siguientes pasos:

Por lo tanto, la fórmula es:

Es decir: y

Ejemplo: Se resuelve a continuación una ecuación mediante la aplicación de la fórmula.

En la ecuación ,

Reemplazando en la fórmula:

Es decir, se obtiene: y

Esta fórmula es aplicable tanto para las ecuaciones cuadráticas completas, como para las incompletas.

Distintos tipos de solución

Las ecuaciones cuadráticas pueden presentar distintos tipos de solución:

- Números reales y distintos
- Números reales e iguales (también llamadas raíces dobles)
- Números complejos conjugados.

Para determinar el tipo de solución, también llamado *naturaleza de las raíces*, se analiza el radicando de la fórmula de resolución. Dicho radicando recibe el nombre de **discriminante**, y se denota con la letra griega delta

Entonces:

El discriminante permite determinar la naturaleza de las raíces sin resolver la ecuación:

- Si las raíces son números reales y distintos.
- Si las raíces son números reales e iguales.
- Si las raíces son números complejos conjugados.

Casos particulares

De igual forma que ocurre con las ecuaciones lineales, existirán ecuaciones que sin ser cuadráticas, se pueden llevar a la expresión de una cuadrática. Si se tratan de expresiones algebraicas racionales, siempre se tendrá que tener presente las condiciones que debe cumplir la variable.

Ejemplo: La condición para x será que no puede tomar el valor cero.

Llevando esta ecuación a su expresión general, se obtiene:

Resolviendo, se obtiene: y ; valores permitidos, la solución es:

También existen las ecuaciones polinómicas que, en principio, parecen ser de mayor grado. Pero al llevarlas a su expresión general resultan de segundo grado, al cancelarse los términos de mayor grado.

Aplicaciones

Existen innumerables planteos de situaciones problemáticas que dan origen a una ecuación cuadrática. Siguiendo los pasos ya indicados para la resolución de un problema aplicando ecuaciones, se puede arribar a la solución del mismo.

Ejemplo: Un terreno rectangular tiene su largo igual al doble de su ancho. Si el largo se aumenta en $40m$ y el ancho en $6m$, el área se hace doble. Hallar las dimensiones del terreno original.

Llamando x al ancho del terreno, su largo quedará representada por $2x$.

El área del terreno es: $A = x \cdot 2x = 2x^2$

Aumentando el largo y el ancho como indica el enunciado, se obtienen otras dimensiones:

Ancho = $x + 6m$ y Largo = $2x + 40m$

Con estos nuevos valores, el área será $(x + 6m) \cdot (2x + 40m)$.

Pero según el enunciado ésta nueva área será el doble de la anterior.

Es decir $(x + 6m) \cdot (2x + 40m) = 2 \cdot 2x^2$

Prescindiendo de las unidades, se puede expresar la siguiente ecuación:

Llevando la ecuación a su expresión general, se obtiene:

Donde $a = -2$, $b = 52$ y $c = 240$.

Aplicando la fórmula de resolución, se obtiene: y

En el contexto del problema, sólo se acepta como solución el valor $x = 30$ (no existen longitudes negativas). La respuesta del problema será: El ancho del terreno es de $30m$ y el largo es de $60m$.

Bibliografía

- Camus N. – Massara L. (1995) Matemática 3 – Ed. AIQUE

- Baldor A. (1991) Álgebra – Ed. Cultural Venezolana
- Carione N. – Carranza S. – Trama E.(1997) Matemática 3 – Ed Santillana

Tapia N. –Tapia A. – Tapia C. (1986) – Matemática 3 y 4 – Ed. Estrada