

.- OBJETIVOS

En esta práctica se pretende estudiar y comprender la relación existente entre un movimiento armónico simple y un movimiento circular uniforme. Esta relación podrá ser estudiada a través de un mecanismo denominado biela-manivela-pistón. Este mecanismo posee dos posiciones diferentes: pistón fijo y pistón oscilante. Para cada una de esas posiciones se obtendrán dos funciones, llamadas de transferencia que serán de una gran aproximación a la función armónica. Esta función armónica es la encargada de relacionarnos el movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme.

.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La base de esta práctica consiste en poder relacionar el movimiento armónico con el movimiento circular uniforme. Existe una relación matemática sencilla pero importante entre estos dos tipos de movimiento.

Consideremos una partícula que se mueve con una velocidad cuyo módulo v es constante sobre una circunferencia de radio A . Su velocidad angular ω es constante y está relacionada con la velocidad mediante la expresión $\omega = v/A$. El desplazamiento angular de la partícula respecto al eje x viene dado por

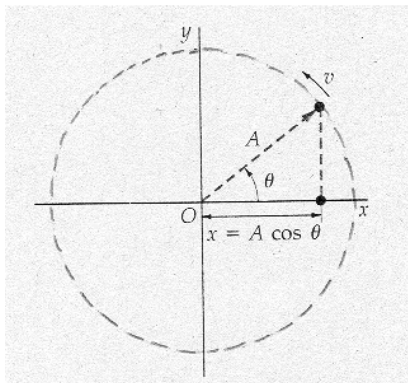
(1)

donde θ

es el desplazamiento angular en el instante $t = 0$. En la figura vemos que el componente x de la posición de la partícula viene dado por.

(2)

De estas expresiones comprobamos que la proyección sobre una recta de una partícula que se mueve con movimiento circular uniforme es un movimiento armónico simple.



En el caso concreto que nos ocupa tenemos un mecanismo de pistón-manivela-biela. En el desarrollo de la práctica tendremos dos modos de operar uno con pistón fijo y otro con pistón oscilante.

En el primer caso tenemos el pistón fijo lo que provoca que la biela tenga una longitud L constante con respecto al punto fijo. Esto provoca que el punto fijo del pistón únicamente pueda moverse a lo largo de un eje. La posición del punto A que se mueve a lo largo de una línea en función del tiempo nos indica que se trata de un movimiento armónico. Por el contrario el punto solidario a la manivela posee un movimiento circular uniforme (consideramos que a lo largo del tiempo la partícula posee una velocidad constante). Mediante razones trigonométricas y geométricas podemos expresar la posición del punto A en función del ángulo que

gira el punto solidario a la manivela.

(3)

Donde λ

es el cociente entre el radio de la manivela y la longitud L de la biela.

En el dispositivo experimental, lo que medimos es la distancia x entre la posición central del pistón, situada a una distancia $sp = 145$ mm y la distancia s medida desde el extremo: $x = sp - s$ de modo que con la ecuación (3):

(4)

A esta función la llamaremos *función de transferencia*. La función de transferencia no es exactamente la que relaciona un movimiento armónico con un movimiento circular uniforme pero es una buena aproximación.

La función que realmente nos relaciona los dos tipos de movimiento que estamos estudiando es del siguiente tipo:

(5)

Sabiendo que $\theta = \omega t$ podemos comprobar que la expresión (5) es exactamente la expresión (2) ajustada una distancia s_0 .

El siguiente tipo a estudiar es denominado de punto oscilante ya que ahora el pistón puede moverse angularmente debido a que fijamos el punto central de la carrera del pistón. De igual manera que en el primer caso a estudiar y procediendo de la misma forma a partir de razones trigonométricas y geometría conseguimos determinar la longitud del pistón. En este caso la longitud denota la distancia desde la periferia de la manivela hasta el punto de intersección con la horizontal y es variable en función del ángulo que gira la manivela debido a que el pistón no ejerce ninguna restricción y puede moverse angularmente.

(6)

De igual manera que en el caso anterior necesitamos conocer la longitud física de la biela.

$$s = L - b + r \quad (7)$$

Donde r es el radio de la manivela y b es la distancia del centro de la carrera del pistón al centro de la manivela.

Definiendo el cociente $\lambda = r/b$ obtenemos la función de transferencia que queríamos obtener.

(8)

Al igual que en el caso anterior esta función de transferencia es una buena aproximación a la función exacta (5).

.- DESARROLLO EXPERIMENTAL

El material utilizado en esta práctica consta de un tablero cuadrado en el que está montado un mecanismo denominado mecanismo de biela. Éste consta de una manivela circular, graduada en grados, una biela y un pistón graduado en milímetros.

El procedimiento experimental consta de dos partes; una parte en la que estudiaremos el movimiento de la biela con el pistón fijo y otra segunda parte con el pistón oscilante.

Para realizar la primera parte de la práctica sujetaremos el pistón por la parte derecha con un tornillo y así conseguiremos que se quede fija. En esta configuración el pistón sólo puede desplazarse a lo largo de una línea. Se tomará el valor del desplazamiento x para cada valor del ángulo, variando este en 10° . Repetir este procedimiento para cada uno de los tres radios de la manivela 50mm, 37.5mm y 25mm. Representar las tres figuras obtenidas y comparar con la armónica.

Para realizar la segunda parte de la práctica se cambiará la configuración a modo de pistón oscilante y se realizará el mismo procedimiento del apartado anterior y de nuevo se representarán las tres figuras resultantes y se compararán con la armónica.

IV.- ANÁLISIS DE DATOS

ANGULOS	FIJO50	FIJO37.5	FIJO25	OSC50	OSC37.5	OSC25
0 ± 0.5	89 ± 0.5	88 ± 0.5	91 ± 0.5	84 ± 0.5	88 ± 0.5	91 ± 0.5
10 ± 0.5	93 ± 0.5	95 ± 0.5	95 ± 0.5	93 ± 0.5	95 ± 0.5	95 ± 0.5
20 ± 0.5	102 ± 0.5	101 ± 0.5	100 ± 0.5	102 ± 0.5	101 ± 0.5	99 ± 0.5
30 ± 0.5	111 ± 0.5	109 ± 0.5	104 ± 0.5	110 ± 0.5	108 ± 0.5	104 ± 0.5
40 ± 0.5	120 ± 0.5	114 ± 0.5	108 ± 0.5	119 ± 0.5	114 ± 0.5	108 ± 0.5
50 ± 0.5	127 ± 0.5	120 ± 0.5	111 ± 0.5	127 ± 0.5	120 ± 0.5	111 ± 0.5
60 ± 0.5	134 ± 0.5	124 ± 0.5	114 ± 0.5	133 ± 0.5	124 ± 0.5	114 ± 0.5
70 ± 0.5	139 ± 0.5	128 ± 0.5	117 ± 0.5	139 ± 0.5	128 ± 0.5	116 ± 0.5
80 ± 0.5	142 ± 0.5	130 ± 0.5	118 ± 0.5	142 ± 0.5	130 ± 0.5	118 ± 0.5
90 ± 0.5	143 ± 0.5	130 ± 0.5	118 ± 0.5	143 ± 0.5	130 ± 0.5	118 ± 0.5
100 ± 0.5	142 ± 0.5	130 ± 0.5	118 ± 0.5	142 ± 0.5	130 ± 0.5	118 ± 0.5
110 ± 0.5	139 ± 0.5	128 ± 0.5	116 ± 0.5	139 ± 0.5	128 ± 0.5	116 ± 0.5
120 ± 0.5	135 ± 0.5	124 ± 0.5	114 ± 0.5	135 ± 0.5	124 ± 0.5	114 ± 0.5
130 ± 0.5	129 ± 0.5	121 ± 0.5	112 ± 0.5	129 ± 0.5	119 ± 0.5	111 ± 0.5
140 ± 0.5	121 ± 0.5	114 ± 0.5	108 ± 0.5	121 ± 0.5	114 ± 0.5	108 ± 0.5
150 ± 0.5	111 ± 0.5	108 ± 0.5	104 ± 0.5	111 ± 0.5	108 ± 0.5	104 ± 0.5
160 ± 0.5	103 ± 0.5	101 ± 0.5	101 ± 0.5	103 ± 0.5	101 ± 0.5	100 ± 0.5
170 ± 0.5	94 ± 0.5	95 ± 0.5	95 ± 0.5	94 ± 0.5	95 ± 0.5	95 ± 0.5
180 ± 0.5	85 ± 0.5	88 ± 0.5	91 ± 0.5	85 ± 0.5	88 ± 0.5	91 ± 0.5
190 ± 0.5	76 ± 0.5	82 ± 0.5	87 ± 0.5	77 ± 0.5	82 ± 0.5	87 ± 0.5
200 ± 0.5	69 ± 0.5	76 ± 0.5	83 ± 0.5	69 ± 0.5	76 ± 0.5	83 ± 0.5
210 ± 0.5	61 ± 0.5	71 ± 0.5	79 ± 0.5	63 ± 0.5	71 ± 0.5	79 ± 0.5
220 ± 0.5	56 ± 0.5	66 ± 0.5	76 ± 0.5	57 ± 0.5	67 ± 0.5	76 ± 0.5
230 ± 0.5	51 ± 0.5	63 ± 0.5	73 ± 0.5	52 ± 0.5	64 ± 0.5	73 ± 0.5
240 ± 0.5	48 ± 0.5	60 ± 0.5	71 ± 0.5	48 ± 0.5	60 ± 0.5	71 ± 0.5
250 ± 0.5	45 ± 0.5	58 ± 0.5	69 ± 0.5	46 ± 0.5	57 ± 0.5	70 ± 0.5
260 ± 0.5	44 ± 0.5	56 ± 0.5	68 ± 0.5	44 ± 0.5	56 ± 0.5	69 ± 0.5
270 ± 0.5	44 ± 0.5	56 ± 0.5	68 ± 0.5	44 ± 0.5	56 ± 0.5	68 ± 0.5
280 ± 0.5	44 ± 0.5	56 ± 0.5	68 ± 0.5	44 ± 0.5	56 ± 0.5	68 ± 0.5
290 ± 0.5	45 ± 0.5	57 ± 0.5	70 ± 0.5	45 ± 0.5	57 ± 0.5	69 ± 0.5

300 ± 0.5	48 ± 0.5	60 ± 0.5	71 ± 0.5	48 ± 0.5	60 ± 0.5	71 ± 0.5
310 ± 0.5	51 ± 0.5	62 ± 0.5	73 ± 0.5	52 ± 0.5	63 ± 0.5	73 ± 0.5
320 ± 0.5	56 ± 0.5	66 ± 0.5	76 ± 0.5	57 ± 0.5	66 ± 0.5	76 ± 0.5
330 ± 0.5	61 ± 0.5	71 ± 0.5	79 ± 0.5	62 ± 0.5	71 ± 0.5	79 ± 0.5
340 ± 0.5	68 ± 0.5	76 ± 0.5	82 ± 0.5	69 ± 0.5	76 ± 0.5	82 ± 0.5
350 ± 0.5	76 ± 0.5	82 ± 0.5	87 ± 0.5	76 ± 0.5	82 ± 0.5	87 ± 0.5
360 ± 0.5	89 ± 0.5	88 ± 0.5	91 ± 0.5	84 ± 0.5	88 ± 0.5	91 ± 0.5

ARM.OSC50	AR.OSC37.5	ARM.OSC25	ARM.FIJ50	ARM.FI37.5	ARM.FIJ25
93	93	93	93	93	93
102	99	97	102	99	97
110	106	102	110	106	102
118	112	106	118	112	106
125	117	109	125	117	109
131	121	112	131	121	112
136	125	115	136	125	115
140	128	116	140	128	116
142	129	118	142	129	118
143	130	118	143	130	118
142	129	118	142	129	118
140	128	116	140	128	116
136	125	115	136	125	115
131	121	112	131	121	112
125	117	109	125	117	109
118	112	106	118	112	106
110	106	102	110	106	102
102	99	97	102	99	97
93	93	93	93	93	93
84	87	89	84	87	89
76	80	84	76	80	84
68	75	81	68	75	81
61	69	77	61	69	77
55	65	74	55	65	74
50	61	71	50	61	71
46	58	70	46	58	70
44	57	68	44	57	68
43	56	68	43	56	68
44	57	68	44	57	68
46	58	70	46	58	70
50	61	71	50	61	71
55	65	74	55	65	74
61	69	77	61	69	77
68	75	81	68	75	81

76	80	84	76	80	84
84	87	89	84	87	89
93	93	93	93	93	93

F.TRANS50	F.TRAN37.5	F.TRAN25	F.T.50	F.T.37.5	F.T.25
87	89	91	87	89	91
96	96	95	95	95	95
105	103	100	104	102	100
114	109	104	113	108	104
122	115	108	121	114	108
130	121	111	129	120	111
136	125	114	135	124	114
141	129	116	141	128	116
144	131	118	144	130	118
145	132	118	145	131	118
144	131	118	144	130	118
141	129	116	141	128	116
136	125	114	135	124	114
130	121	111	129	120	111
122	115	108	121	114	108
114	109	104	113	108	104
105	103	100	104	102	100
96	96	95	95	95	95
87	89	91	87	89	91
78	83	87	79	83	87
71	77	83	71	77	83
64	72	79	65	72	79
58	67	76	59	67	76
53	63	73	54	63	73
50	60	71	50	60	71
47	58	69	47	58	69
46	57	68	46	56	68
45	57	68	45	56	68
46	57	68	46	56	68
47	58	69	47	58	69
50	60	71	50	60	71
53	63	73	54	63	73
58	67	76	59	67	76
64	72	79	65	72	79
71	77	83	71	77	83
78	83	87	79	83	87
87	89	91	87	89	91

Leyenda de las tablas:

- ANGULOS: número de grados que gira la manivela.
- FIJO50: datos obtenidos experimentalmente para la biela con pistón fijo y radio 50mm.
- FIJO37.5: datos obtenidos experimentalmente para la biela con pistón fijo y radio 37.5mm.
- FIJO25: datos obtenidos experimentalmente para la biela con pistón fijo y radio 25mm.
- OSC50: datos obtenidos experimentalmente para la biela con pistón oscilante y radio 50mm.
- OSC37.5: datos obtenidos experimentalmente para la biela con pistón oscilante y radio 37.5mm.
- OSC25: datos obtenidos experimentalmente para la biela con pistón oscilante y radio 25mm.
- ARM.OSC50: función armónica superpuesta para OSC50.
- ARM.OSC37.5: función armónica superpuesta para OSC37.5.
- ARM.OSC25: función armónica superpuesta para OSC25.
- ARM.FIJO50: función armónica superpuesta para FIJO50.
- ARM.FIJO37.5: función armónica superpuesta para FIJO37.5.
- ARM.FIJO25: función armónica superpuesta para FIJO25.
- F.TRAN50: función de transferencia superpuesta para FIJO50.
- F.TRAN37.5: función de transferencia superpuesta para FIJO37.5.
- F.TRAN25: función de transferencia superpuesta para FIJO25.
- F.T.50: función de transferencia superpuesta para OSC50.
- F.T.37.5: función de transferencia superpuesta para OSC37.5.
- F.T.25: función de transferencia superpuesta para OSC25.

Para la aproximación de funciones armónicas, del tipo (5), ha de utilizarse una técnica de aproximación un tanto intuitiva. Esta técnica es útil tanto para las funciones con punto oscilante como las de punto fijo. El primer paso consiste en averiguar la amplitud de nuestra función experimental, para ello basta con restarle al valor máximo de nuestra función el valor mínimo también de dicha función, después se divide por dos. Se observa que se obtienen los valores máximos para un ángulo de 90° y los valores mínimos para un ángulo de 270° . El valor obtenido será el de la amplitud de nuestra función armónica a superponer a nuestra función experimental. Al representar la función ésta nos demuestra que está desfasada 90° . Por último comprobamos que la diferencia que existe en el eje vertical entre nuestra función y la armónica es de 93mm. Es curioso observar, a mi entender, que este valor es idéntico en las superposiciones de todas las funciones experimentales, ya sea de punto fijo como de punto oscilante.

A continuación se ofrece la diferencia de max y min en las funciones, y la correspondiente amplitud.

FIJO50 ! Max – Min = 99mm A =49.5mm

FIJO37.5 ! Max – Min = 74mm A =37mm

FIJO25 ! Max – Min = 50mm A =25mm

OSC50 ! Max – Min = 100mm A =50mm

OSC37.5 ! Max – Min = 75mm A =37.5mm

OSC25 ! Max – Min = 50mm A =25mm

De manera que las funciones armónicas que serán representadas y superpuestas con sus respectivas funciones experimentales son de la forma:

La representación de estas gráficas se pueden observar en las páginas finales. En dichas gráficas la escala de valores en el eje de abscisas corresponde a radianes debido a errores de configuración del Excel que no he

podido conseguir que lo representara en grados.

En las gráficas se puede comprobar como coinciden en los máximos y mínimos la función experimental y la función armónica pero que a medida que se separan de dichos puntos las funciones también dejan de acoplarse. Esto se debe a que nuestra función es una ligera aproximación a la armónica ideal y a esto hay que sumarle los errores. En el apartado de los errores cabe destacar los producidos en la toma de medidas, ya que ha sido de manera visual y con un error de escala de 0.5 grados y de 0.5 mm. Como se observará en las gráficas no se puede apreciar dicho error debido a que el error es tan pequeño que comparado con la escala de valores es insignificativo. Es necesario señalar que el error de 0.5 grados se ha considerado en unidades de radianes debido a que la gráfica está en dichas unidades. Por lo tanto también habría que sumar un pequeño error que cometería el excel en transformar grados a radianes. Junto a estos errores es necesario comentar que debido al uso del aparato y a sus posiciones también habría que contar con el error de precisión que cometería el aparato debido a la holgura en sus materiales.

De la gráfica también se saca otra conclusión, y es que ha menor radio de la manivela la aproximación a la función armónica es mejor. Esto queda demostrado al observar las gráficas que tengan como radio 25mm, ya sea en las que compara la función armónica como en las que se compara la función de transferencia, de la que hablaremos más adelante. La explicación la encontramos en los fundamentos teóricos ya que a menor radio la aproximación es mayor debido a que la proyección de la biela sobre la guía es más horizontal.

En el apartado de la función de transferencia sería lógico imaginar y pensar que las funciones experimentales se asemejan mucho a dichas funciones. De hecho es así aunque hay un dato al que no he podido encontrar explicación y es al desplazamiento vertical al que hay que someter a las funciones de transferencia con radio 37.5mm y 25mm. En el caso de las funciones con punto fijo o oscilante tenemos:

	PUNTO FIJO	PUNTO OSCILANTE
R = 37.5mm	13.5	14
R = 25mm	27	27

Al analizar conjuntamente las funciones con punto fijo y con punto oscilatorio se comprueba como la diferencia de valores entre una y otra es pequeña y esto es debido a que el tamaño de la biela con respecto al de la manivela guarda una relación más o menos normal. En el caso en que la manivela tuviera un tamaño bastante mayor al de la biela la diferencia entre funciones sería considerable.

V.- CONCLUSIÓN

Para concluir diremos que existe una función, denominada de transferencia, que nos sirve para aproximar un movimiento circular uniforme a un movimiento armónico simple. Esta función se obtiene de una forma bastante simple y nos ofrece una muy buena aproximación, independientemente de las pequeñas transformaciones que le podamos hacer, tales como cambio de amplitud, de fase o incluso de altura, que nos permita superponer una muestra de datos con dicha función de transferencia.

Este tipo de relación entre el movimiento circular uniforme y un movimiento armónico simple es de gran utilidad, sobre todo en el campo de la mecánica y en especial en el de los motores.