

EL ALGEBRA

El Algebra es la rama de las matemáticas que estudia la cantidad considerada del modo más general posible.

LA HISTORIA DEL ALGEBRA

La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia, donde fueron capaces de resolver ecuaciones lineales ($ax = b$) y cuadráticas ($ax^2 + bx = c$), así como ecuaciones indeterminadas como $x^2 + y^2 = z^2$, con varias incógnitas. Los antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan. También fueron hábiles de solucionar ciertas ecuaciones indeterminadas.

Los matemáticos alejandrinos Herón y Diofante continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia, aunque el libro Las aritméticas de Diofante es de suficiente más nivel y presenta muchas soluciones sorprendentes para ecuaciones indeterminadas difíciles. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró, a su vez, acogida en el mundo islámico, en donde se le llamó ciencia de reducción y equilibrio. (La palabra árabe al-jabru que significa 'reducción', es el origen de la palabra álgebra. En el siglo IX, el matemático al-Jwrizm; escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. A finales del siglo IX, el matemático egipcio Abu Kamil enunció y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra, y resolvió problemas tan complicados como encontrar la x, y, z que cumplen $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 = z^2$, y $xz = y^2$.

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas sólo ocasionalmente; sin embargo, en la edad media, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita x , y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio. El matemático, poeta y astrónomo persa Omar Khayyam mostró cómo expresar las raíces de ecuaciones cúbicas utilizando los segmentos obtenidos por intersección de secciones cónicas, aunque no fue capaz de encontrar una fórmula para las raíces. La traducción al latín del Álgebra de al-Jwrizm fue publicada en el siglo XII. A principios del siglo XIII, el matemático italiano Leonardo Fibonacci consiguió encontrar una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + cx = d$. Fibonacci había viajado a países árabes, por lo que con seguridad utilizó el método arábigo de aproximaciones sucesivas.

A principios del siglo XVI los matemáticos italianos Scipione del Ferro, Tartaglia y Gerolamo Cardano resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación. Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, pronto encontró la solución exacta para la ecuación de cuarto grado y, como consecuencia, ciertos matemáticos de los siglos posteriores intentaron encontrar la fórmula de las raíces de las ecuaciones de quinto grado y superior. Sin embargo, a principios del siglo XIX el matemático noruego Abel Niels y el francés Évariste Galois demostraron la inexistencia de dicha fórmula.

Un avance importante en el álgebra fue la introducción, en el siglo XVI, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el Libro III de la Geometría (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes se parece bastante a un texto moderno de álgebra. Sin embargo, la contribución más importante de Descartes a las matemáticas fue el descubrimiento de la geometría analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos. Su libro de geometría contiene también los fundamentos de un curso de teoría de ecuaciones, incluyendo lo que el propio Descartes llamó la *regla de los signos* para contar el número de raíces verdaderas (positivas) y falsas (negativas) de una ecuación. Durante el siglo XVIII se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en 1799 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss publicó la demostración de que toda

ecuación polinómica tiene al menos una raíz en el plano complejo.

En los tiempos de Gauss, el álgebra había entrado en su etapa moderna. El foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos, que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones polinómicas. Dos ejemplos de dichos sistemas son los grupos y las cuaternas, que comparten algunas de las propiedades de los sistemas numéricos, aunque también difieren de ellos de manera sustancial. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones de las raíces de polinomios, pero evolucionaron para llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores de las matemáticas en el siglo XIX. Los matemáticos franceses Galois y Augustin Cauchy, el británico Arthur Cayley y los noruegos Niels Abel y Sophus Lie hicieron importantes contribuciones a su estudio. Las cuaternas fueron descubiertas por el matemático y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton, quien desarrolló la aritmética de los números complejos para las cuaternas; mientras que los números complejos son de la forma $a + bi$, las cuaternas son de la forma $a + bi + cj + dk$.

Después del descubrimiento de Hamilton el matemático alemán Hermann Grassmann empezó a investigar los vectores. A pesar de su carácter abstracto, el físico estadounidense J. W. Gibbs encontró en el álgebra vectorial un sistema de gran utilidad para los físicos, del mismo modo que Hamilton había hecho con las cuaternas. La amplia influencia de este enfoque abstracto llevó a George Boole a escribir Investigación sobre las leyes del pensamiento (1854), un tratamiento algebraico de la lógica básica. Desde entonces, el álgebra moderna también llamada álgebra abstracta ha seguido evolucionando; se han obtenido resultados importantes y se le han encontrado aplicaciones en todas las ramas de las matemáticas y en muchas otras ciencias.

PERSONAJES DEL ALGEBRA

Abel Henrik Niels (1802–1829): Probó la imposibilidad de resolver algebraicamente ecuaciones de quinto grado.

La vida de Abel estuvo dominada por la pobreza. Después de muerto su padre, quien era un ministro protestante, Abel tuvo que asumir la responsabilidad de mantener a su madre y familia, en 1820.

El profesor de Abel, Holmboe, reconoció su talento para las matemáticas, debido a su falta de dinero para asistir a una colegiatura para ingresar a la universidad de Christiania, ingresó a la universidad en 1821, diez años después de que la universidad fuera fundada, y se graduó en 1822.



Abel publicó en 1823 escritos de ecuaciones funcionales e integrales. En esto Abel dio la primera solución de una ecuación integral. En 1824 probó que era imposible resolver algebraicamente ecuaciones de quinto grado y de su propio costo realizó publicaciones con la esperanza de obtener reconocimiento por su trabajo.

Eventualmente ganó un premio de escolaridad del gobierno para viajar al extranjero, visitó Alemania y Francia.

Abel fue el instrumento que le dio estabilidad al análisis matemático sobre bases rigurosas. Su mayor trabajo "Recherches sur les fonctions elliptiques" fue publicado en 1827 en el primer volumen del diario Crelle, el primer periódico dedicado enteramente a las matemáticas. Abel visitó este periódico en su visita a Alemania.

Después de su visita a París, retornó a Noruega bastante débil. Mientras estuvo en París visitó a un doctor quién le informó que padecía de tuberculosis. A pesar de su mala salud y la pobreza, continuó escribiendo sus escritos y la teoría de la ecuación y de las funciones elípticas de mayor importancia en el desarrollo de la teoría total.

Abel revolucionó el entendimiento de las funciones elípticas por el estudio de la función inversa de esa función.

Abel ganó El Gran Premio De Las Matemáticas del instituto de Francia, por su trabajo de las ecuaciones elípticas.

Abel viajó muy enfermo a visitar a su familia para la Navidad de 1828 en Froland. El comenzó a decaer y estuvo seriamente enfermo y murió a los pocos meses después.



Leonardo Fibonacci (1170–1240): Jugó un rol muy importante al revivir las matemáticas antiguas y realizó importantes contribuciones propias.

Fibonacci nació en Italia pero fue educado en África del Norte donde su padre ocupaba un puesto diplomático. Viajó mucho acompañando a su padre, así conoció las enormes ventajas de los sistemas matemáticos usados en esos países.

Liber abaci, publicado en el 1202 después de retornar a Italia, está basado en trozos de aritmética y álgebra que

Fibonacci había acumulado durante sus viajes. Liber abaci introduce el sistema decimal Hindú–Arábico y usa los números arábigos dentro de Europa.

Un problema en Liber abaci permite la introducción de los números de Fibonacci y la serie de Fibonacci por las cuales Fibonacci es recordado hoy en día. El Diario Trimestral de Fibonacci es un moderno periódico dedicado al estudio de las matemáticas que llevan estas series.

Herón de Alejandría (20–62 D.C.), matemático y científico griego. Su nombre también podría ser Hero (aproximadamente 18 escritores griegos se llamaron Hero o Herón, creándose cierta dificultad a la hora de su identificación).

Herón de Alejandría nació probablemente en Egipto y realizó su trabajo en Alejandría (Egipto). Escribió al menos 13 obras sobre mecánica, matemáticas y física. Inventó varios instrumentos mecánicos, gran parte de ellos para uso práctico: la aelípila, una máquina a vapor giratoria; la fuente de Herón, un aparato neumático que produce un chorro vertical de agua por la presión del aire y la dioptra, un primitivo instrumento geodésico. Sin embargo, es conocido sobre todo como matemático tanto en el campo de la geometría como en el de la geodesia (una rama de las matemáticas que se encarga de la determinación del tamaño y configuración de la Tierra, y de la ubicación de áreas concretas de la misma).

Herón trató los problemas de las mediciones terrestres con mucho más éxito que cualquier otro de su generación. También inventó un método de aproximación a las raíces cuadradas y cúbicas de números que no las tienen exactas. A Herón se le ha atribuido en algunas ocasiones el haber desarrollado la fórmula para hallar el área de un triángulo en función de sus lados, pero esta fórmula, probablemente, había sido desarrollada

antes de su época.

Diofante: (325–409 D.C.), matemático griego perteneciente a la escuela de Alejandría. Vivió en Egipto, donde se ocupó principalmente del análisis diofántico, siendo merecedor del título de padre del álgebra. Escribió Las aritméticas, obra de la que sólo quedan 6 libros de los 13 que la componían.

Fue sin embargo el primero en enunciar una teoría clara sobre las ecuaciones de primer grado. También ofreció la fórmula para la resolución de las ecuaciones de segundo grado.

Al-Jwarizmi (780–835), matemático árabe, nacido en Jwrizm (actualmente Jiva, Uzbekistán). Fue bibliotecario en la corte del califa al-Mamun y astrónomo en el observatorio de Bagdad. Sus trabajos de álgebra, aritmética y tablas astronómicas adelantaron enormemente el pensamiento matemático y fue el primero en utilizar la expresión al jabr (de la que procede la palabra álgebra) con objetivos matemáticos. La versión latina (por el traductor italiano Gerardo de Cremona) del tratado de al-Jwrizm sobre álgebra fue responsable de gran parte del conocimiento matemático en la Europa medieval. Su trabajo con los algoritmos (término derivado de su nombre) introdujo el método de cálculo con la utilización de la numeración arábiga y la notación decimal.

Omar Jayyam o Omar Khayyam: (1050–1122), matemático y astrónomo persa, autor de uno de los poemas más famosos del mundo. Nació en Nishapur (actual Irán). Su nombre significa 'Omar el tendero'. Como astrónomo de la corte, participó con otros científicos en la reforma del calendario; a partir de entonces se adoptó una nueva era, conocida como jalaliana o el Seliuk. Como escritor de álgebra, geometría y temas afines, Omar fue uno de los más destacados matemáticos de su época. Sin embargo, es conocido ante todo por el poema Rubaiyyat, del que se le atribuyen unas 1.000 estrofas epigramáticas de cuatro versos que hablan de la naturaleza y el ser humano.



Évariste Galois (1811–1832) Matemático Francés. Despues de realizar estudios en un liceo, ingresa en una escuela normal. Su actividad científica, de un lustro escaso de vida, se entremezcló con una actividad política de ardiente revolucionario en los turbulentos días del París de 1830. A los 16 años, buen conocedor de la matemática de entonces, sufre su primera decepción al fracasar en su intento de ingreso en la Escuela Politécnica. Siguen las decepciones cuando una memoria, presentada a la Academia y puesta en manos de Cauchy se extravía, y cuando un segundo fracaso le cierra las puertas de la Politécnica.

En 1829 y 1830 hace conocer sus primeros trabajos sobre fracciones continuas, cuestiones de análisis, teoría de las ecuaciones y teoría de números, así como un resumen de una segunda memoria presentada a la Academia para optar al gran premio de matemática, el que también se pierde. En 1831, envuelto en los acontecimientos políticos, se le expulsa de la escuela normal, donde entonces estudiaba, y con el propósito de dedicarse a la enseñanza privada, anuncia un curso de álgebra superior que abarcaría Una nueva teoría de los números imaginarios, la teoría de las ecuaciones resolubles por radicales, la teoría de números y la teoría de las funciones elípticas, tratadas por álgebra pura. El curso no tuvo oyentes y Galois ingresa en el ejército, a la vez que redacta una memoria, la última, hoy llamada Teoría de Galois, que remite a la Academia y que Poisson califica de incomprensible .

Más tarde es acusado de peligroso republicano y fue apresado. Acabado de salir de la cárcel muere de un pistolazo en un duelo, cuando apenas tenía 21 años de edad.

En vísperas del duelo, al legar a un amigo en notas apresuradas su testamento científico, le pide que, si su adversario vence, haga conocer sus descubrimientos a Gauss o Jacobi para que den una opinión no respecto de la verdad, sino de la importancia de los teoremas. Espero que más tarde alguien encuentre provechoso descifrar todo este lío. Este lío es hoy la Teoría de Grupo.

Sólo en 1846 se conoció gran parte de los escritos de Galois por obra de Joseph Liouville , y completó la publicación de sus escritos Jules Tannery a comienzos de este siglo (1908). En ellos asoma ya la idea de cuerpo, y que luego desarrollan Riemann y Richard Dedekind, y que Galois introduce con motivo de los hoy llamados imaginarios de Galois, concebidos con el objeto de otorgar carácter general al teorema del número de raíces de las congruencias de grado n de módulo primo. Es en estos escritos donde aparecen por primera vez las propiedades más importantes de la teoría de grupos (nombre que él acuñó) que convierten a Galois en su cabal fundador.

Sin duda que la noción de grupo, en especial de grupo de sustituciones que constituye el tema central de Galois, estaba ya esbozada en los trabajos de Lagrange y de Alexandre Théophile Vandermonde del siglo XVIII, y en los de Gauss, Abel ,Ruffini y Cauchy del XIX, implícita en problemas de teoría de las ecuaciones, teoría de números y de transformaciones geométricas, pero es Galois quién muestra una idea clara de la teoría general con las nociones de subgrupo y de isomorfismo.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857): pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática

Cauchy, trabajó como un ingeniero militar y en 1810 llegó a Cherbourg a trabajar junto a Napoleón en la invasión a Inglaterra. En 1813 retornó a París y luego fue persuadido por Laplace y Lagrange para convertirse en un devoto de las matemáticas.

Él ayudó ocupando diversos puestos en la Facultad de Ciencia de París, El Colegio de Francia y La Escuela Politécnica. En 1814 él publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas.

Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.



Numerosos términos matemáticos llevan su nombre: el teorema integral de Cauchy, la teoría de las funciones complejas, las ecuaciones de Cauchy–Riemann y Secuencias de Cauchy.

Cauchy, produjo 789 escritos, pero fue desaprobado por la mayoría de sus colegas. El mostró una obstinada rectitud a sí mismo y un agresivo fanatismo religioso. Como un apasionado del realismo pasó algún tiempo en Italia después de rechazar tomar un juramento de lealtad. Dejó París después de la Revolución de 1830 y después de un corto tiempo en Suiza aceptó una oferta del Rey de Piedmont para realizar una cátedra en Turín donde estuvo hasta 1832. En 1833 se marchó de Turín a Praga en atención de acompañar a Charles X y ser el tutor de su hijo.

Cauchy retornó a París en 1838 y retomó su cargo en la academia pero no su posición de profesor por haber rechazado tomar el juramento de lealtad. Cuando Louis Philippe fue destronado en 1848 Cauchy retomó su cátedra en Sorbonne. El ayudó en los postgrados hasta la hora de su muerte.

Carl Friedeich Gauss(1777–1855): Matemático alemán llamado El Príncipe De Las Matemáticas.

Hijo de un humilde albañil, Gauss dio señales de ser un genio antes de que cumpliera los tres años. A esa edad aprendió a leer y hacer cálculos aritméticos mentales con tanta habilidad que descubrió un error en los cálculos que hizo su padre para pagar unos sueldos. Ingresó a la escuela primaria antes de que cumpliera los siete años.



Cuando tenía doce años, criticó los fundamentos de la geometría euclíadiana; a los trece le interesaba las posibilidades de la geometría no euclíadiana. A los quince, entendía la convergencia y probó el binomio de Newton. El genio y la precocidad de Gauss llamaron la atención del duque de Brunswick, quien dispuso, cuando el muchacho tenía catorce años, costear tanto su educación secundaria como universitaria. Gauss, a quien también le interesaban los clásicos y los idiomas, pensaba que haría de la filología la obra de su vida, pero las matemáticas resultaron ser una atracción irresistible.

Cuando estudiaba en Gotinga, descubrió que podría construirse un polígono regular de diecisiete lados usando sólo la regla y el compás. Enseñó la prueba a su profesor, quién se demostró un tanto escéptico y le dijo que lo que sugería era imposible; pero Gauss demostró que tenía la razón. El profesor, no pudiendo negar lo evidente, afirmó que también él procedió de la misma manera. Sin embargo, se reconoció el mérito de Gauss, y la fecha de su descubrimiento, 30 de Marzo de 1796, fue importante en la historia de las matemáticas. Posteriormente, Gauss encontró la fórmula para construir los demás polígonos regulares con la regla y el compás.

Gauss se graduó en Gotinga en 1798, y al año siguiente recibió su doctorado en la Universidad de Helmstedt. Las matemáticas no fueron el único tema que le interesó a este hombre; fue también astrónomo, físico, geodesa e inventor. Hablaba con facilidad varios idiomas, e inclusive dominó el ruso a la edad de sesenta años. En 1807 fue nombrado director del observatorio y profesor de astronomía en la Universidad de Gotinga.

A principios del siglo XIX, Gauss publicó sus *Disquisiciones aritméticas*, que ofrecían un análisis lúcido de su teoría de números, comprendiendo las complicadas ecuaciones que confirmaban su teoría y una exposición de una convergencia de una serie infinita.

Estudió la teoría de los errores y dedujo la curva normal de la probabilidad, llamada también curva de Gauss, que todavía se usa en los cálculos estadísticos.

En 1833 inventó un telégrafo eléctrico que usó entre su casa y el observatorio, a una distancia de unos dos kilómetros. Inventó también un magnetómetro bifilar para medir el magnetismo y, con Weber, proyectó y construyó un observatorio no magnético. Tanto Gauss como Rieman, que fue discípulo suyo, pensaban en una teoría electromagnética que sería muy semejante a la ley universal de la gravitación, de Newton. Empero, la teoría del electromagnetismo fue ideada más tarde, en 1873, por Maxwell, aunque Gauss ya poseía los cimientos matemáticos para la teoría. En 1840, las investigaciones de Gauss sobre la óptica tuvieron especial

importancia debido a sus deducciones por lo que toca a los sistemas de lentes.

A la edad de setenta y siete años, Gauss falleció. Se ha dicho que la lápida que señala su tumba fue escrita con un diagrama, que construyó el mismo Gauss, de un polígono de diecisiete lados. Durante su vida, se reconoció que era el matemático más grande de los siglos XVIII y XIX. Su obra en las matemáticas contribuyó a formar una base para encontrar la solución de problemas complicados de las ciencias físicas y naturales.

George Boole (1815–1864): recluyó la lógica a una álgebra simple. También trabajó en ecuaciones diferenciales, el cálculo de diferencias finitas y métodos generales en probabilidad.

Boole primero concurrió a una escuela en Lincoln, luego a un colegio comercial. Sus primeras instrucciones en matemática, sin embargo fueron de su padre quién le dio también a George la afición para la construcción de instrumentos ópticos. El interés de George se volvió a los idiomas y recibió instrucción en Latín de una librería local.

A la edad de 12 años había llegado a ser tan hábil en Latín que provocaba controversia. Él tradujo del Latín una Oda del poeta Horacio de lo cual su padre estaba tan orgulloso que tenía su publicación. No obstante el talento era tal que un maestro de escuela local cuestionaba que nadie con 12 años podría haber escrito con tanta profundidad.

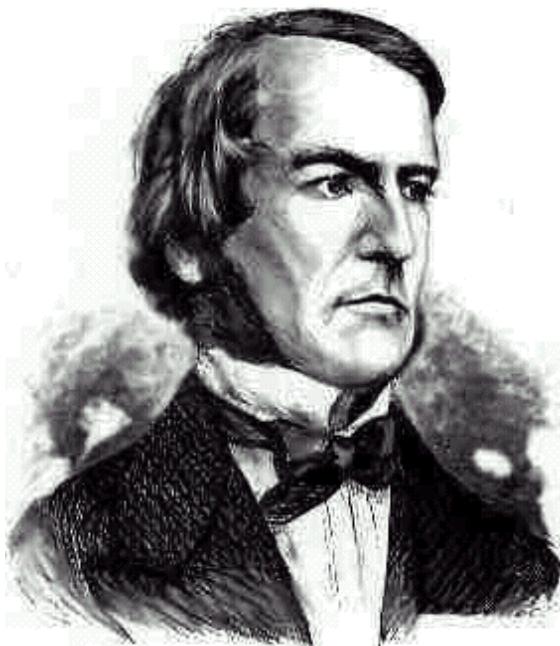
Boole no estudió para un grado académico, pero a la edad de 16 años fue un profesor auxiliar de colegio. Él mantuvo su interés en idiomas e intentó ingresar a la Iglesia. Desde 1835, sin embargo, pareció haber cambiado de idea ya que abrió su propio colegio y empezó a estudiar matemáticas por si mismo. Tardó en darse cuenta que había perdido casi cinco años tratando de aprender las materias en vez de tener un profesor experto.

En ese periodo Boole estudió los trabajos de Laplace y Lagrange, tomando apuntes, los cuales llegaron a ser más tarde las bases para sus primeros papeles matemáticos. De cualquier modo él recibió estímulos de Duncan Gregory quién se encontraba en Cambridge por ese tiempo y del editor "Cambridge Mathematical Formal" recientemente fundado.

Boole fue incapaz de tomar los consejos de Duncan Gregory y estudiar cursos en Cambridge; ya que necesitaba los ingresos de su colegio para cuidar a sus padres. No obstante él comenzó a estudiar álgebra. Una aplicación de métodos algebraicos para la solución de ecuaciones diferenciales fue publicada por Boole en el "Transaction of the Royal Society" y por este trabajo recibió la medalla de la Real Sociedad. Su trabajo matemático fue el comienzo que le trajo fama.

Boole fue nominado para una cátedra de matemática en el Queens College, Cork en 1849. Él enseñó allí por el resto de su vida, ganándose una reputación como un prominente y dedicado profesor.

En el 1854 publicó Una investigación de las leyes del pensamiento sobre las cuales son basadas las teorías matemáticas de Lógica y Probabilidad. Boole aproximó la lógica en una nueva dirección reduciéndola a una álgebra simple, incorporando lógica en las matemáticas. Agudizó la analogía entre los símbolos algebraicos y aquellos que representan formas lógicas. Comenzaba el álgebra de la lógica llamada Algebra Booleana la cual ahora encuentra aplicación en la construcción de computadoras, circuitos eléctricos, etc.



Boole también tradujo en ecuaciones diferenciales, el influyente "Tratado en Ecuaciones Diferenciales" apareció en 1859, el cálculo de las diferencias finitas, "Tratado sobre el Cálculo de las Diferencias Finitas" (1860), y métodos generales en probabilidad. Publicó alrededor de 50 escritos y fue uno de los primeros en investigar las propiedades básicas de los números, tales como la propiedad distributiva que fundamentó los temas del álgebra.

Muchos honores le fueron concedidos a Boole, fue reconocido como el genio en su trabajo recibió grandes honores de las universidades de Dublín y Oxford y fue elegido miembro académico de la Real Sociedad (1857).

Su trabajo fue elogiado por De Morgan quién dijo:

El sistema de lógica de Boole es una de las muchas pruebas de genio y paciencia combinada. Esta el proceso simbólico del álgebra, inventado como herramienta de cálculos numéricos, sería competente para expresar cada acto del pensamiento, y proveer la gramática y el diccionario de todo el contenido de los sistemas de lógica, no habría sido creíble hasta probarlo. Cuando Hobbes publicó su "Computación ó Lógica" él tenía un remoto reflejo de algunos de los puntos que han sido ubicados en la luz del día por Mr. Boole.

El álgebra Booleana tiene una amplia aplicación el switch telefónico y en el diseño de computadoras modernas. El trabajo de Boole ha llegado a ser como un paso fundamental en la revolución de las computadoras hoy en día.