AnÃ¡lisis	1Âº Parcial Con Respuestas Desarrolladas	CÃ¡tedra: Ãºnica (Gutierrez)	1Âº Cuat. de 2007	Altillo.com

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta.

1. Determinar $k \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+k)^{2n}}{(n^2+5)^n} = e^5$

2. Se sabe que la recta tangente a f en $x_0=1$ es $y=3x+1$ y que la recta tangente a g en $x_1=4$ es $y=2x+1$. Hallar la recta tangente a $h(x)=g(f(3x+e^{2x}))+2$ en $x_2=0$.

3. Demuestre que la ecuación $\ln(8x-3)=8x^2-1$ no tiene solución.

4. Considere el gráfico de $f(x)=1+\sqrt{32-2x^2}$ y el punto $P=(3;1)$. Determine el dominio de f y halle analíticamente el punto del gráfico de f que está a la máxima distancia de P.

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+k)^{2n}}{(n^2+5)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(n+k)^2}{(n^2+5)}\right]^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n^2+2kn+k^2}{n^2+5}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\cancel{n^2}+2kn+k^2-\cancel{n^2}-5}{n^2+5}\right]^n =$

$= \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{2kn+k^2-5}{n^2+5}\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left[1+\frac{1}{\frac{n^2+5}{2kn+k^2-5}}\right]^{\frac{n^2+5}{2kn+k^2-5}}\right]^{\frac{2kn+k^2-5}{n^2+5}\cdot n} = \boxed{e^5}$

$\to e$ ¿porqué? Falta justificar. Vale porque $\frac{n^2+5}{2kn+k^2-5} \to \infty$

Ca

$\lim_{n\to\infty} \frac{2kn+k^2-5}{n^2+5}\cdot n = \lim_{n\to\infty}\frac{2kn^2+k^2n-5n}{n^2+5} = \boxed{2k} = 5$

$\boxed{k = \frac{5}{2}}$

(Este límite debe ser 5 para que el lim. que me piden sea e^5)

Reg

2) • recta tg de f en $x_0=1$: $y=\overset{f'(1)}{3}x+1$ $\Rightarrow$ $f(1)=4$ y $f'(1)=3$

$\to$ la derivada de f en x=1 es la pendiente de la recta tg

$\to$ en x = 1, la recta tg vale lo mismo que la función.

• recta tg de g en $x_1=4$: $y=\overset{g'(4)}{2}x+1$ $\Rightarrow$ $g(4)=9$ y $g'(4)=2$

$h(x)=g(f(3x+e^{2x}))+2$

Hallar la recta tg de h en $x_2=0$.

$h(0)=g(f(3.0+e^{2.0}))+2$

$h(0)=g(f(1))+2$

$h(0)=g(4)+2$

$h(0)=9+2$

$\boxed{h(0)=11}$

$h'(x)=g'(f(3x+e^{2x}))\cdot f'(3x+e^{2x})\cdot(3+e^{2x}.2)$ $\to$ por la regla de la cadena.

$h'(0)=g'(f(3.0+e^{2.0}))\cdot f'(3.0+e^{2.0})\cdot(3+e^{2.0}.2)$

$h'(0)=g'(f(1))\cdot f'(1)\cdot(3+2)$

$h'(0)=g'(4)\cdot 3\cdot 5$

$h'(0)=2\cdot 3\cdot 5$

$\boxed{h'(0)=30}$

recta tg a h(x) en $x_2=0$: $y=h'(0)(x-0)+h(0)$

RTA. $\boxed{y=30x+11}$

B

HOJA 1

3) $\overbrace{\ln(8x-3)}^{g(x)} = \overbrace{8x^2-1}^{h(x)}$

$f(x) = g(x) - h(x)$ (f(x) es la dist. vertical entre estas 2 funciones. Si f(x) se anula en algún x, la ecuación tiene solución)

$f(x) = \ln(8x-3) - 8x^2 + 1$

$Df: \mathbb{R} > 3/8$

$8x-3>0$ (el ln debe ser >0)

$8x>3$

$x > \frac{3}{8}$

$f'(x) = \frac{1}{8x-3} \cdot 8 - 16x$

$f'(x) = \frac{8}{8x-3} - 16x$

$Df': \mathbb{R} > 3/8$ (en realidad, el Df' son los $\mathbb{R}-\{3/8\}$, pero el $Df' \subseteq Df$)

NO

SÍ

$f'(x) = \frac{8 - 16x(8x-3)}{8x-3}$

$f'(x) = \frac{8 - 128x^2 + 48x}{8x-3}$

$f'(x) = 0 \iff \frac{8-128x^2+48x}{8x-3} = 0$ (hallo los puntos críticos, según el teorema de FERMAT)

$-128x^2 + 48x + 8 = 0$

~~$x_1 = -0,125$~~ $\boxed{x_2 = 0,5}$

$x_1 \notin Df$

$3/8$ $\oplus$ $0,5$ $\ominus$ $\boxed{MAX}$

Usaste f' continua

$f'(0,4) > 0 \implies$ por ser f cont en $(3/8, +\infty)$ y derivable en $(3/8, +\infty)$, x ROLLE, $\forall x \in (3/8, 1/2), f'(x) > 0 \implies$

$\implies$ x las consecuencias del Teorema del Valor Medio, f(x) es estrictamente creciente en $(3/8, 1/2)$.

$f'(0,9) < 0 \implies$ por ser f cont en $(3/8, +\infty)$ y derivable en $(3/8, +\infty)$, x ROLLE, $\forall x \in (1/2, +\infty), f'(x) < 0 \implies$

$\implies$ x las consecuencias del TVM, f(x) es estrictamente decreciente en $(1/2, +\infty)$.

$\implies$ f(0,5) es un MÁXIMO ABSOLUTO en su DOMINIO $\implies f(0,5) \geq f(x)$

$\boxed{f(0,5) = -1} \implies$ f(x) nunca toma valores mayores a (-1) $\implies$ f(x) nunca se anula $\implies$

$\implies$ la ecuación $\ln(8x-3) = 8x^2-1$ NO tiene solución.

Bien

4) $f(x) = 1 + \sqrt{32-2x^2}$ $\quad P = (3;1)$

$32 - 2x^2 \geq 0$

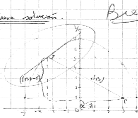
$2x^2 \leq 32$

$x^2 \leq 16$

$|x| \leq 4$

$\boxed{-4 \leq x \leq 4}$

$Df: [-4;4]$



No necesariamente
es ⊥ a recta tang.?

HOJA 2

dist del punto P a ~~...~~ un punto del gráfico de f(x):

$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (f(x)-1)^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{32-2x^2}} \cdot (-4x)$

$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{32-2x^2}}$

$Df': (-4,4)$

$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-3)^2 + (f(x)-1)^2}} \cdot ((x-3)^2 + (f(x)-1)^2)'$

$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-3)^2+(f(x)-1)^2}} \cdot (2(x-3) + 2(f(x)-1) \cdot f'(x))$

$d'(x) = \frac{2x - 6 + 2(\cancel{\sqrt{32-2x^2}}) \cdot \frac{-2x}{\cancel{\sqrt{32-2x^2}}}}{2\sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{32-2x^2})^2}}$

$d'(x) = \frac{2x-6-4x}{2\sqrt{(x-3)^2+32-2x^2}}$

$d'(x) = \frac{-2x-6}{2\sqrt{(x-3)^2+32-2x^2}}$

$d'(x) = \frac{-x-3}{\sqrt{(x-3)^2+32-2x^2}}$

$d'(x) = 0 \iff -x-3 = 0$

$-x = 3$

$\boxed{x = -3} \in Dd'$

$Dd': (-4,4)$, porque $Dd' \subseteq Df$

-4 $\oplus$ -3 $\ominus$ 0 4 $\boxed{MAX}$

$d'(-3,5) > 0 \implies \forall x \in (-4,-3), d'(x) > 0 \implies d(x)$ es estric. creciente en $(-4,-3)$
(por ser d' cont y deriv)
$d'(0) < 0 \implies \forall x \in (-3,4), d'(x) < 0 \implies d(x)$ es estric. decreciente en $(-3,4)$
d(-3) es un MAX

$f(-3) = 1 + \sqrt{32-2(-3)^2}$

$\boxed{f(-3) \cong 4,74}$

RTA: El punto a la mayor distancia de P es el punto: $\boxed{(-3; f(-3))}$ o $\boxed{(-3; 4,74)}$

$1+\sqrt{14}$

Es un valor aprox.
El valor exacto es $1+\sqrt{14}$.

Bien

HOJA 3