

CÁLCULO

TEMA 1: El Cuerpo de los Números Reales

1.1 Introducción.

El hecho de que aparezcan los números reales, es ante la necesidad de nuevas formas de representación de números que no existían en los conjuntos antes de la existencia de los Números Reales (!).

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$!

Naturales $\subset$ Enteros $\subset$ Racionales $\subset$ Reales

Por ejemplo $\sqrt{2}$ que no es racional.

D/ Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$! $\sqrt{2} = p/q$ p y q son primos entre si.

$$2 = p^2/q^2 \quad 2 \cdot q^2 = p^2$$

$$2 \cdot q^2 = p^2 \quad q^2 = 2 \cdot a^2$$

$$p^2 = 2 \cdot a^2 \quad p^2 = 2 \cdot b^2$$

No son primos entre si, por lo que podemos

decir que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.2 Axiomas de Cuerpo de los Números Reales.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$! ! $x \in \mathbb{R}$! !

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$x \cdot y$$

Axioma 1. Conmutatividad: $x + y = y + x$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma 2. Asociatividad: $(x + y) + z = x + (y + z)$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Axioma 3. Distributividad del producto respecto de la suma: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Axioma 4. "neutro de la suma y del producto:

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

Axioma 5. "opuesto para la suma, " x " ! " y " = opuesto de $x = (-x) / x + y = 0$.

Axioma 6. "inverso para el producto, " x " ! " $\{0\}$ " " y " = inverso de $x = (1/x) / x \cdot y = 1$.

$\{!, +\}$ Si cumple los axiomas 1, 2, 4, 5 es un grupo Conmutativo o Abeliano.

$\{!, .\}$ Si cumple los axiomas 1, 2, 4, 6 es un grupo Conmutativo o Abeliano.

$\{!, +, .\}$ Si cumple los 6 axiomas es un cuerpo Conmutativo.

Consecuencias de los axiomas de cuerpo

– Simplificativa (+): $x + y = x + z \text{ ! } y = z$

Axi. 5 " $a / a + x = 0$ $a + (x + y) = a + (x + z)$

Axi. 2 $(a + x) + y = (a + x) + z$

Axi. 4 $0 + y = 0 + z$

$y = z$

– Simplificativa (.): $x \cdot y = x \cdot z \text{ ! } y = z$

Axi. 6 " $b / b \cdot x = 1$ $b \cdot (x \cdot y) = b \cdot (x \cdot z)$

Axi. 2 $(b \cdot x) \cdot y = (b \cdot x) \cdot z$

Axi. 4 $1 \cdot y = 1 \cdot z$

$y = z$

– El neutro de la suma y del producto es único.

Suma

Supongamos que hay dos neutros 0 y 0'

$$x + 0 = x$$

$$x + 0' = x$$

$$x + 0 = x + 0' \text{ ! } 0 = 0' \text{ (el neutro es único)}$$

Producto

Supongamos que hay dos neutros 1 y 1'

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot 1' = x$$

$$x \cdot 1 = x \cdot 1' \quad 1 = 1' \text{ (el neutro es \u00fanico)}$$

– El opuesto del opuesto de un n\u00famero real es el mismo n\u00famero

$$\text{Op}(\text{op } x) = x$$

– El inverso del inverso de un n\u00famero real, es tambi\u00e9n el mismo n\u00famero.

$$\text{Inv}(\text{inv } x) = x$$

– " la diferencia (en la suma) ("1d / x + d = y ! d = y - x = y + (-x)

$$D/. a = y - x$$

$$b = y + (-x)$$

$$a + x = y \quad b + x = y \quad a + x = b + x \quad a = b$$

– " el cociente (para el producto) ("1c / x . c = y ! c = y/x = y . (1/x)

(demostraci\u00f3n igual que la anterior)

– Regla de los signos:

$$(-) \cdot (+) = (-)$$

$$(-) \cdot (-) = (+)$$

$$(+) \cdot (+) = (+)$$

– Cualquier n\u00famero multiplicado por cero, es cero.

$$x \cdot 0 = 0 \quad (y - y) = 0$$

$$x \cdot (y - y) = y - y$$

$$(x \cdot y) - (x \cdot y) = y - y$$

$$0 = 0$$

– No existen divisores de cero:

$$\text{Si } x \cdot y = 0 \quad x \neq 0 \quad y = 0 \quad x = y = 0$$

1.3 Axiomas de Orden de los N\u00fameros Reales.

Sabiendo que: !+ " ! y que !+ = ! - {0}, entonces podemos entrar en los axiomas de orden:

Axioma 7. x , y " !+ ! x + y " !+

$$x \cdot y " !+$$

Axioma 8. $x \leq 0$; $x \leq 0$ ó $(-x) \leq 0$ pero nunca ambos a la vez.

Axioma 9. $0 \leq 0$

Importante:

*El orden en $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow y - x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = y$

Propiedades que cumple el orden de los Números Reales:

Reflexiva: $x \leq x$

Antisimétrica: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

D/. $x \leq y \wedge y - x \leq 0 \Rightarrow x = y$

$y \leq x \wedge x - y \leq 0 \Rightarrow y = x$

Supongamos que:

$$a = y - x$$

$$b = x - y$$

Como podemos ver, $a = (-b)$; por lo que podemos decir, que ambos son opuestos y según la hipótesis, ambos están en $\mathbb{R}^+$, pero por el Axioma 8, esto es imposible, por lo que no nos queda más remedio que decir que $x = y$.

Transitiva: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

D/. $x \leq y \wedge y - x \leq 0 \Rightarrow x = y$

$y \leq z \wedge z - y \leq 0 \Rightarrow y = z$

$(y - x) + (z - y) \leq 0$ (por el Axioma 7)

$(y - x) + (z - y) \leq 0 \Rightarrow z - x \leq 0$ (1ª comprobación)

$x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ (2ª comprobación)

Entonces sí $z - x \leq 0 \Rightarrow x \leq z$

Consecuencias de los Axiomas de Orden

– Tricotomía: $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x < y \vee x > y \vee x = y$

D/. Sea $a = y - x$. Si $a = 0 \Rightarrow x = y$

Si $a > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow y > x$

$a < 0 \Rightarrow -a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow -y + x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x > y$

$$- \text{Si } x < y, z > 0 \Rightarrow x + z < y + z$$

$$D/. x + z < y + z \Rightarrow (x + z) - (y + z) < 0 \Rightarrow (x - y) < 0 \Rightarrow x < y$$

$$(y + z) - (x + z) < 0 \Rightarrow (y - x) < 0 \Rightarrow y < x$$

$$- \text{Si } x < y, z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$$

$$D/. x \cdot z > y \cdot z \Rightarrow (x \cdot z) - (y \cdot z) > 0 \Rightarrow (x - y) \cdot z > 0$$

$$z \cdot (y - x) > 0$$

$$\text{Y por enunciado: } z < 0 \Rightarrow z \cdot (y - x) < 0 \Rightarrow (y - x) < 0 \Rightarrow y < x \text{ (por el Axioma 7)}$$

$$- \text{Si } x < y \text{ y } z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$$

$$D/. x \cdot z > y \cdot z \Rightarrow (x \cdot z) - (y \cdot z) > 0 \Rightarrow (x - y) \cdot z > 0$$

$$x < y \Rightarrow y - x > 0$$

$$z < 0 \Rightarrow (-z) > 0$$

$$(Ax. 7)$$

$$(-z) \cdot (y - x) > 0 \Rightarrow z \cdot [(-y) + x] > 0 \Rightarrow (x - y) \cdot z > 0$$

$$- x^2 > 0$$

$$D/. \text{Si } x > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow x \cdot (-x) > 0 \Rightarrow (-x) \cdot (-x) > 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

$$- \text{Si } 0 < x < y \Rightarrow 0 < y - x < x - 1$$

$$D/. y - x < x - 1 \Rightarrow (y - x) - (x - 1) < 0 \Rightarrow (y - x) \cdot (x - 1) < 0$$

$$x < y \Rightarrow y - x > 0$$

$$x < y \Rightarrow x \cdot y > 0 \text{ (Ax. 7)}$$

$$(Ax. 7)$$

$$(y - x) \cdot (x - 1) < 0$$

Ejercicios:

- Encontrar todos los n° reales que verifican que $2 - x^2 < 4$; " x " !
- Encontrar todos los n° reales que verifican que $x - 1 \cdot (x + 1) - 1 > 0$; " x " !
- Si le sumamos a ambos lados por el mismo valor; la desigualdad no varía.

$$(-2) + 2 - x^2 < 4 - 2$$

$$-x^2 < 2$$

Ahora multiplicamos por un número menor que cero; por lo que la desigualdad cambiará de sentido.

$$(-1) \cdot (-x^2) < 2 \cdot (-1)$$

$$x^2 > -2$$

Como x^2 es siempre mayor que cero (comprobado en las consecuencias de orden); para cualquier valor de x !, será mayor que -2 . Por lo que podemos decir que los valores a encontrar son todos los números reales.

- Para empezar, vemos que para que esa fracción sea positiva, ambos términos deben ser o bien ambos positivos o ambos negativos.

$$\bullet \text{ Si } x - 1 > 0 \text{ " } x + 1 > 0 \text{ ! } x > 1 \text{ " } x > -1 \text{ ! } x > 1$$

$$\{x \text{ " ! } / 1 > x < -1\}$$

$$\bullet \text{ Si } x - 1 < 0 \text{ " } x + 1 < 0 \text{ ! } x < -1 \text{ " } x < 1 \text{ ! } x < -1$$

Raíces cuadradas:

$$a \text{ " !, " } a = x \text{ ! } x^2 = a$$

Si $a < 0$ " $a = x^2$! $x^2 < 0$. Esto es imposible ya que quedó demostrado en una de las consecuencias de los axiomas de orden que x^2 es mayor que 0 siempre, por lo que las raíces cuadradas en las que **a** sea negativo no tendrá resultados reales.

Si $x = "a$! $x^2 = a$, pero $(-x) \cdot (-x) = x^2 = a$; por lo que podemos decir que

$$"a = \pm x.$$

Sólo tendremos estas dos soluciones.

D/. Supongamos lo contrario, es decir que, "a tiene más de dos resultados:

$$"a = \pm x \text{ " " } a = \pm y$$

Entonces tendremos:

Por un lado:

$$x^2 = y^2 \text{ ! } x \cdot x = a \text{ " } y \cdot y = a \text{ !}$$

$$\text{! } x \cdot x = y \cdot y \text{ ! } x^2 = y^2 \text{ ! } x = "y^2 \text{ !}$$

$$\text{! } \underline{x = y}$$

Por otro lado:

$$x^2 = y^2 \Rightarrow (-x)^2 = (-y)^2 \Rightarrow a^2 = (-a)^2 \Rightarrow (-a)^2 = a^2 \Rightarrow (-x)^2 = (-y)^2 \Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\sqrt[n]{(-x)} = \sqrt[n]{y^2} \Rightarrow \sqrt[n]{(-x)} = \sqrt[n]{(-y)}$$

Raíces n-ésimas:

Sea $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n = a$

Casos:

- Si n es par:

– $a > 0 \Rightarrow (-x)^n = x^n = a$, tiene dos soluciones.

– $a < 0 \Rightarrow$ no tiene solución.

- Si n es impar:

– $a > 0 \Rightarrow$ tiene una sola solución.

– $a < 0 \Rightarrow$ también tiene una sola solución.

1.4. Representación geométrica de $\mathbb{R}$.

Dibujamos una recta, en la cual colocamos el 0, el 1 y otros dos valores cuales quiera x e y .

$-1 \quad 0 \quad 1 \quad x \quad y$

Entonces, debido a esta representación, diremos que un número real y será mayor que otro x cuando esté colocado a la derecha de este último, como en la representación están así, podemos decir que

$$x < y$$

Elementos notables de un conjunto: Dado $A \subseteq \mathbb{R}$; Cotas Superiores

. A

- A tiene Cota Superior si $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A$.

. Cotas Inferiores

A

- A tiene Cota Inferior si $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A$.

. $A \cap M$

- A posee Máximo(M) si es cota superior y $M \in A$.

. $m \in A$

- A posee Mínimo(m) si es cota inferior y $m \in A$.

- Existe Supremo en A [Sup.(A)] si: $A \neq \emptyset$
- (A) es cota superior de A.
- Si M es otra cota superior ! $\text{Sup.}(A) < M$. $\text{Sup.}(A)$
- Existe Ínfimo en A [Inf.(A)] si: $A \neq \emptyset$
- Inf.(A) es cota inferior de A.
- Si m es otra cota inferior ! $\text{Inf.}(A) > m$. $\text{Inf.}(A)$

Ejemplo:

Dar los elementos notables del conjunto $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \}$

- Está acotado superior e inferiormente.
- No posee mínimo pero sí máximo .
- Posee ínfimo y supremo. $\text{Inf.}(A) = \text{Sup.}(A) = 1$

Propiedad:

El $\text{Sup.}(A)$ [Inf.(A)] es único.

D/. Supongamos que M y M' son $\text{Sup.}(A)$.

$$\text{Sup.}(A) = M$$

$$M \leq M'$$

$$\text{Sup.}(A) = M'; M' \text{ cota superior}$$

$$\underline{M = M'}$$

$$\text{Sup.}(A) = M'$$

$$M' \leq M$$

$$\text{Sup.}(A) = M; M \text{ cota superior}$$

Supongamos que m y m' son $\text{Inf.}(A)$.

$$\text{Inf.}(A) = m$$

$$m' \leq m$$

$$\text{Inf.}(A) = m'; m' \text{ cota inferior}$$

$$\underline{m = m'}$$

$$\text{Inf.}(A) = m'$$

$$m < m'$$

$$\text{Inf.}(A) = m; m \text{ cota inferior}$$

1.5. Axioma de Completitud o del Supremo (Axioma 10).

Todo subconjunto de números reales distintos del vacío que está acotado superiormente tiene supremo.

$$A \neq \emptyset; A \text{ acotado superiormente} \Rightarrow \sup(A)$$

$$[A \neq \emptyset; A \text{ acotado inferiormente} \Rightarrow \inf(A)]$$

D/. Axioma 10

$$(-A) \text{ acotado superiormente} \Rightarrow \sup(-A) = \inf(A)$$

Consecuencias del axioma 10:

Definición de conjunto inductivo.

Sea $S \neq \emptyset$, será inductivo si:

- $1 \in S$
- $x \in S \Rightarrow x + 1 \in S$

Ejemplo: $\mathbb{N}, \mathbb{N}^+, \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ Conjunto inductivo más pequeño.

Bien, pues centrándonos en el conjunto de los $\mathbb{Z}^+$, propondremos las siguientes consecuencias del axioma 10.

- $\mathbb{Z}^+$ no está acotado superiormente.

D/. Supongamos lo contrario, que $\mathbb{Z}^+$ está acotado superiormente, entonces por el Axioma 10, $\sup(\mathbb{Z}^+) = M$ -1 , ya no es cota superior de $\mathbb{Z}^+ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ / n > M - 1$;

$$n + 1 >$$

Se contradice con la hipótesis de que $M = \sup(\mathbb{Z}^+)$

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{Z}^+$$

$\mathbb{Z}$ es inductivo

$$2) \exists x \in \mathbb{N}; \exists n \in \mathbb{Z}^+ / x < n$$

D/. Si fuese al contrario, entonces estaríamos diciendo que $\mathbb{Z}^+$ está acotado superiormente, en contra de la 1ª consecuencia antes probada.

- Propiedad arquimediana de $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{Z}^+ / nx > y$.

$$D/. (y/x) \in \mathbb{N} \implies \exists n \in \mathbb{Z}^+ / n > (y/x) \implies nx > y$$

$$\bullet a, x, y \in \mathbb{N} / a + (y/n) \in \mathbb{N} \implies x = a$$

D/. Supongamos que $x \in \mathbb{N}$, luego $x > a \implies x - a \in \mathbb{N}$ (Por la prop. Arquim.)

$$\exists n \in \mathbb{N} / (x - a) > y \implies y \in \mathbb{N}$$

$\implies nx - na > y \implies nx > y + na \implies x > a + (y/n)$; lo cual nos contradice la desigualdad del enunciado.

$$\bullet \text{ Si } x \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} / m \nmid x \implies n$$

D/. Si $-x \in \mathbb{N}$, $\exists n' \in \mathbb{Z}^+ / x > -n' = m$ (Se demuestra con la demostración anterior).

$$\bullet x \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z} / n \nmid x \implies n + 1$$

$$\bullet \mathbb{Q} \text{ es denso en } \mathbb{R}. \text{ "x, y" } \in \mathbb{R} / x < r < y$$

D/. $x < y \implies y - x \in \mathbb{R}$ (Por la prop. Arquim.)

$$\exists n \in \mathbb{Z}^+ / n(y - x) > 1$$

$$\exists n \in \mathbb{N} / ny - nx > 1$$

$$\underline{ny > 1 + nx}$$

$$(nx) \in \mathbb{N} / \exists m \in \mathbb{Z} / \underline{m \nmid nx} \implies m+1$$

$$ny > 1 + nx \implies 1 + m > nx \implies ny > 1 + m > nx \implies y > \underline{f(1+m)/n} > x$$

$$r \in \mathbb{Q}$$

$$\bullet \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ! números irracionales.}$$

$$\text{"x, y" } \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} / x < y.$$

1.6. Intervalos. Valor Absoluto. Propiedades.

Intervalos de números reales: $\mathbb{R} = \mathbb{N} \cup \{-, \}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\text{Intervalo cerrado: } [a, b] = \{ x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b \}$$

$$\text{Intervalo abierto: } (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} / a < x < b \}$$

$$\text{Intervalo semiabierto: } [a, b) = \{ x \in \mathbb{R} / a \leq x < b \}$$

$$\text{Intervalo semicerrado: } (a, b] = \{ x \in \mathbb{R} / a < x \leq b \}$$

Casos:

$$(a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > a \} = (a, +\infty)$$

$$[a, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \} = [a, +\infty)$$

$$(-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < b \} = (-\infty, b)$$

$$(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \} = (-\infty, b]$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Valor absoluto:

$$x \text{ si } x > 0$$

$$x \text{ si } |x| = \text{Valor Absoluto, y este es igual a } x^2 = 0 \text{ si } x = 0 \text{ si } |x| = 0$$

$$-x \text{ si } x < 0$$

Propiedades:

$$\bullet -|x| \leq x \leq |x|$$

$$\bullet a \leq |x| \Leftrightarrow -a \leq x \leq a = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a \}$$

D/. Sabemos que $|x| \leq a$

$$x \leq |x| \leq a \Rightarrow x \leq a$$

$$-a \leq x \leq a$$

$$-a \leq -|x| \leq -x \leq -a \Rightarrow x \leq a$$

$$\Rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$x > 0 \quad |x| = x \leq a \Rightarrow \underline{|x| \leq a}$$

$$x < 0 \quad |x| = -x \leq a \Rightarrow \underline{|x| \leq a}$$

$$\bullet \text{ Desigualdad triangular: } |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$D/. -|x| \leq x \leq |x|$$

$$\underline{+ -|y| \leq y \leq |y|}$$

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Propiedad anterior

$$-a \leq x + y \leq a \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$$D/. \ x, y > 0 \ |x \cdot y| = x \cdot y$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x| \cdot |y| = x \cdot y$$

$$x, y < 0 \ |(-x) \cdot (-y)| = |x \cdot y| = x \cdot y$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x| \cdot |y| = x \cdot y$$

$$x > 0, y < 0 \ |x \cdot (-y)| = |-(x \cdot y)| = |x \cdot y| = x \cdot y$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x| \cdot |(-y)| = |x| \cdot |y| = x \cdot y$$

- $|x - y| = |x + (-y)| \Rightarrow |x| + |-y| = |x| + |y|$

- $||x| - |y|| \leq |x - y| \Rightarrow -|x - y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$

$$D/. \ |x| = |x + y - y| \Rightarrow |x - y| + |y| \geq \underline{|x| - |y|} \Rightarrow \underline{|x - y|}$$

$$|y| = |y + x - x| \Rightarrow |y - x| + |x| \geq |y| - |x| \Rightarrow |x - y| \geq \underline{|x - y|} \Rightarrow \underline{|x| - |y|}$$

$$-|x - y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Ejercicios:

- ¿Qué x " !, verifican que $|-x| = x$?

$$(-x) \text{ si } (-x) > 0 \text{ } -x \text{ si } x < 0$$

$$|-x| = 0 \text{ si } (-x) = 0 = 0 \text{ si } x = 0$$

$$-(-x) \text{ si } (-x) < 0 \text{ } x \text{ si } x > 0$$

En conclusión, cumplen todas las $x \geq 0$

- ¿Qué x " !, verifican que $|2x - 1| < 1$?

Por un lado: Por otro lado:

$$(2x - 1) < 1 \Rightarrow -1 < (2x - 1)$$

$$2x < 2 \Rightarrow 0 < 2x$$

$$\underline{0 < 2x < 2} \Rightarrow \underline{0 < x < 1}$$

Resultado: $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

- ¿Qué $x \in \mathbb{R}$!, verifican que $|(5x + 1)/3| > 1$?

Por un lado: Por otro lado:

$$|(5x + 1)/3| > 1 \quad |(5x + 1)/3| < -1$$

$$(5x + 1) > 3 \quad (5x + 1) < -3$$

$$5x > 2 \quad 5x < -4$$

$$x > 2/5 \quad x < -4/5$$

Resultado: $\{x \in \mathbb{R} \mid 2/5 < x < -4/5\} = (-\infty, -4/5) \cup (2/5, +\infty)$

- ¿Qué $x \in \mathbb{R}$!, verifican que $x^2 = |x|$?
- ¿Qué $x \in \mathbb{R}$!, verifican que $|x - 1| < |x|$?

$$|-x| \leq |x - 1| \leq |x|$$

Si $x > 0$:

$$(|x - 1| : |x|) < |x| : |x| \quad (|x - 1| : |x|) < 1 \quad |1 - (1/x)| < 1$$

$$-1 < [1 - (1/x)] < 1$$

$$-2 < 1/x < 0$$

$$0 < 1/x < 2$$

$$1/2 < x$$

Resultado: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1/2\} = (1/2, +\infty)$

- ¿Qué $x \in \mathbb{R}$!, verifican que $|(2x + 1)/2x| < 2$?

$$-2 < [(2x + 1)/2x] < 2$$

$$-2 < [1 + (1/2x)] < 2$$

$$-3 < 1/2x < 1$$

Llegado aquí los tomaremos por separado:

Para $x > 0$:

$$-3 < 1/2x \quad 1/2x < 1$$

$$-3x < 1/2 \quad x > 1/2$$

$$x > -1/6 \quad 1/2 < x$$

Para $x < 0$! Rstdo: $(-, -1/6) \cup (1/2, +)$

$$-3 > 1/2x \quad 1/2x < 1$$

$$-3x > 1/2 \quad ! \quad x < -1/6$$

$$x < -1/6 \quad 1/2 > x$$

Propiedades del Supremo y del Infimo de un conjunto.

- a) $\text{Sup}(A)$

$$\forall a \in A \quad a < \text{Sup}(A) + h.$$

$$h > 0$$

- b) $\text{Inf}(A)$

$$\forall b \in A \quad b > \text{Inf}(A) - h.$$

$$h > 0$$

D/. a) Supongamos que $\forall a \in A \quad a < \text{Sup}(A) - h$; de esta manera nos damos cuenta que sería una contradicción porque si $\text{Sup}(A) - h$ es una cota superior más pequeña que el supremo, se convertiría en el supremo y es una contradicción a la definición de supremo.

b) Se demostraría de la misma manera que el apartado a.

$$2. \text{ Si } C = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$$

$$\text{!} \quad \text{Sup}(C) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$$

$$\text{Si } \text{Sup}(A) = \text{Sup}(B)$$

$$3. a \in A, b \in B \quad \text{!} \quad \text{Sup}(A) = \text{Inf}(B) = \text{Sup}(A) = \text{Inf}(B)$$

1.7. Representación decimal de un número real. Nota: $E(x)$! Parte entera de x .

$$r = a_0 + (a_1/10) + (a_2/10^2) + \dots + (a_n/10^n) \quad a_0 \text{ entero no negativo.}$$

$$r = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

Ejm:

Dar una representación decimal a $28'3452$:

$$28'3452 = 28 + (3/10) + (4/10^2) + (5/10^3) + (2/10^4)$$

$$r = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4$$

- Si el número r admite una representación finita entonces se puede poner de esta forma $a_n/10^n$ y además es racional.

Ejm:

$$1/2 = 0,5 = 0 + (5/10)$$

- Pero si es racional, puede ser que no admita una representación decimal finita.

Ejm:

$$2/9 = 0,22222 = 0,2$$

$$x = a_0 + (a_1/10) + (a_2/10^2) + \dots + (a_n/10^n)$$

Es decir, se puede hacer una aproximación de x si este no admite una representación decimal finita, a esto se llega haciendo n lo suficientemente grande y que de esta manera la diferencia entre los valores hallados y x sea diminuta.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, este siempre admite una representación infinita.

Nota:

Las aproximaciones de números irracionales, se basan en el teorema de intervalos encajados que se verán en el siguiente punto 1.8.

¿Cómo hacer una representación decimal?

Tenemos $x \in \mathbb{R}$ y también :

$$a_0 = \text{mayor entero } \leq x = [x] = E(x)$$

$$a_1 = \text{mayor entero que verifica que } a_0 + (a_1/10) \leq x$$

$$a_2 = \text{mayor entero que verifica que } a_0 + (a_1/10) + (a_2/10^2) \leq x$$

$$a_n = \text{mayor entero que verifica que } a_0 + (a_1/10) + (a_2/10^2) + \dots + (a_n/10^n) \leq x$$

Llamaremos representación decimal a S .

$S = \{x \leq a_0 + (a_1/10) + (a_2/10^2) + \dots + (a_n/10^n) \mid x; n = 0, 1, \dots\}$, por esto diremos que está acotado superiormente y $\sup(S) = x$.

También diremos que un número racional, admite una representación periódica.

Ejms:

$$1/7 = 0,142857 \dots \text{ Número racional}$$

Hallar la forma fraccionaria de $x = 1,23$

$$x = 1,23$$

$$100x = 123,3$$

$$-10x = 12,3$$

$$90x = 112$$

$$x = 112 / 90$$

• Teorema de los intervalos encajados.

Si tenemos I_i , que es el conjunto de intervalos, la representación de los intervalos encajados se basa en:

$$I_1 = [a_1, b_1] \supset I_2 = [a_2, b_2] \supset I_3 = [a_3, b_3] \supset I_4 = [a_4, b_4] \supset \dots \supset I_n = [a_n, b_n]$$

$$I_i \cap I_j = \{c\}; c \in \mathbb{R}$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq c \geq b_n \geq b_3 \geq b_2 \geq b_1$$

$$D/. A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \text{ Prop. 3}$$

$$\bullet \sup(A) = \inf(B) = \sup(A) = \inf(B)$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

Probemos que $c = \sup(A) = \inf(B)$, para ello, supongamos que son distintos es decir:

$$\sup(A) < \inf(B) \text{ o } \inf(B) < \sup(A)$$

Fijémonos ahora en $[\sup(A), \inf(B)]$ que es un intervalo al que llamaremos I_k , pero si es un intervalo, $a_k \in I_k$ y esto nos contradice la definición del supremo y del infimo al encontrarse donde se encuentra, por lo que podemos asegurar que:

$$c = \sup(A) = \inf(B)$$

TEMA 2: Sucesiones de números reales.

2.1. Definición.

Una sucesión de números reales, es una aplicación de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, a la que notaremos como $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Al conjunto de los términos de $\{a_n\} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y a_n será el término n -ésimo del conjunto.

Ejms: Cambiar la sucesión extendida a una función de n .

$$\bullet \{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \text{ o } \{a_n\} = \{2n\} \text{ ya que:}$$

!!

- 2
- 4
- 6
- 8

$$n \leq 2n$$

- $\{a_n\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \quad \{a_n\} = \{2n - 1\}$
- $\{a_n\} = \{1/2, 2/3, 3/4, \dots\} \quad \{a_n\} = \{n / (n+1)\}$

$$a_1 = -3$$

- $\{a_n\} = \{-3, 1, 5, 9, \dots\} \quad \{a_n\}$

$$a_{n+1} = a_n + 4$$

- $\{a_n\} = \{2, 4, 8, 16, \dots\} \quad \{a_n\} = \{2^n\}$

Tipos de sucesiones:

- Una sucesión es divergente, si no posee un número al que se va acercando conforme va creciendo n !. Por ejemplo $\{n\}$ ya que diverge a $+\infty$.
- Una sucesión es convergente, cuando posee un número al que se acerca a la vez que crece n !. Por ejemplo $\{1/n\}$ ya que converge a 0, esto quiere decir que se acerca pero que nunca llega a ser 0.
- Es oscilante, cuando varía siempre entre los mismos valores. Por ejemplo $\{(-1)^n\}$ ya que cuando n es par, el elemento toma el valor 1, y cuando n es impar, toma el valor de -1 ; de ahí que los valores sean 1, -1 , 1, -1 , 1, -1 ,

2.2. Sucesiones convergentes.

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ tiene un límite o converge hacia a denotándose como

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, cuando a partir de un elemento en adelante, todos sus elementos están muy cerca de a sin llegar a ser este.

definición

$\{a_n\} \rightarrow a$ ó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$! dado un número real cualquiera ($\epsilon > 0$) existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - a| < \epsilon$!

$$-\epsilon < a_n - a < \epsilon$$

$$-\epsilon < a_n < a + \epsilon$$

$$a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

2.3. Unicidad del límite de una sucesión.

Lo que quiere decir en este apartado es que el límite de una sucesión es único.

D/. Supongamos lo contrario, es decir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \quad \forall \epsilon_1 > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad |a_n - a_1| < \epsilon_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_2 \quad \forall \epsilon_2 > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad |a_n - a_2| < \epsilon_2$$

$$\text{Tomo: } 0 < \epsilon \mid - \epsilon \leq a_n - a_{n-1} \leq \epsilon \mid - \epsilon \leq a_n - a_{n-2} \leq \epsilon \mid \dots \mid a_n - a_{n-k} \leq \epsilon \mid a_n - a_{n-k} \geq -\epsilon \mid$$

Si además tomamos: $n > \max\{N_1, N_2\} \mid \mid a_n - a \mid + \mid a_n - a_{n-1} \mid < 2\epsilon$

Número real cualquiera

De ahí sabemos que el único número 0 y además que sea menor que cualquier número positivo es 0 , por lo que:

$$\mid a - b \mid = 0 \mid b = a$$

2.4. Sucesiones acotadas.

$\{a_n\}$ es acotada, si $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado.

$\{a_n\}$ está mayorada ! está acotada superiormente si $\exists M \in \mathbb{R} \mid a_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$!

$\{a_n\}$ está minorada ! está acotada inferiormente si $\exists m \in \mathbb{R} \mid a_n \geq m \forall n \in \mathbb{N}$!

$\{a_n\}$ está acotada ! $\exists k \in \mathbb{R} \mid \mid a_n \mid \leq k \forall n \in \mathbb{N}$!

Proposición:

Toda sucesión convergente está acotada ($\{a_n\}$ convergente ! $\{a_n\}$ acotada

D/. $\{a_n\}$ convergente ! $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \mid \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \mid \mid a_n - l \mid < \epsilon$!

($\epsilon = 0.01$, o cualquier otro número real)

$$\mid a_n - l \mid < 0.01$$

$$-0.01 < a_n - l < 0.01$$

$$-0.01 - l < a_n < 0.01 + l$$

$$m_1 \leq a_n \leq m_2$$

Está acotada por arriba y por abajo

2.5. Propiedades de las sucesiones acotadas.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = l + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m$$

$$\text{D/. } \{a_n + b_n\} \text{ ! } l + m \mid \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \mid \mid (a_n + b_n) - (l + m) \mid$$

$$\mid (a_n + b_n) - (l + m) \mid \leq \mid a_n - l \mid + \mid b_n - m \mid$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

$$N_1 / n \leq N_1 \leq N_2 / n \leq N_2$$

Si tomamos un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $n > N$ y $N_1 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ y $N_2 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$

- Si tenemos $\{a_n\} \rightarrow 0$

$$\{a_n + b_n\} \rightarrow 0$$

$\{b_n\}$ acotada

Ejm:

$$\{ \sin n / n \} = \{ 1/n \cdot \sin n \} \rightarrow 0$$

$$D/. \{a_n\} \rightarrow 0 \text{ y } \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow |a_n| < \epsilon$$

$$\{b_n\} \text{ acotada } \Rightarrow \exists M > 0 \text{ tal que } n \in \mathbb{N} \Rightarrow |b_n| \leq M$$

$$\{a_n + b_n\} \rightarrow 0 \text{ y } \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow |a_n + b_n| < \epsilon = |a_n| + |b_n| < \epsilon$$

$$< \epsilon / k < \epsilon$$

- $\{a_n\} \rightarrow 0$

$$\{a_n + b_n\} \rightarrow 0$$

$\{b_n\} \rightarrow 0$

$$D/. \{a_n\} \rightarrow 0 \text{ y } \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow |a_n| < \epsilon$$

$$\{ |a_n| \} \rightarrow 0$$

$$\{ (b_n + a_n) - (b_n) \} \rightarrow 0$$

$\{b_n\}$ convergente y $\{b_n\}$ acotada

$$\{b_n\} \rightarrow 0 \text{ y } \{ |b_n| \} \rightarrow 0 \Rightarrow \{ (b_n) - (b_n) \} \rightarrow 0$$

$$\text{Tenemos: } \{ (b_n + a_n) - (b_n) \} = \{ |b_n + a_n - b_n| \} \rightarrow 0$$

- 0

- $\{a_n\} \rightarrow 0$

$$\{ 1/n \} \rightarrow 0$$

$a_n = 1/n$

$$D/. \{1/n\} \rightarrow 0 \text{ y } \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow |1/n| < \epsilon$$

$$\{ (1/n) - (1/n) \} \rightarrow 0$$

Sabemos que $\{ | - an | \} \neq 0$ por prop. 2

$\{ 1/an \} \neq 1 /$

Y que $\{ 1 / . an \}$ es acotada

- $\{ an \} \neq$

$\{ an / bn \} \neq /$

$\{ bn \} \neq$

Esta propiedad queda probada con las propiedades 3 y 4.

- $\{ an \} \neq$

" an " bn "n " ! ! "

$\{ bn \} \neq$

D/. Supongamos lo contrario, es decir que $> ! - " ! +$

$\{ an \} \neq ! | an - | < ! = [(-) / 2]$

$-[(-) / 2] < an < + [(-) / 2]$

$\{ bn \} \neq ! | bn - | < ! = [(-) / 2] !$

$-[(-) / 2] < bn < + [(-) / 2]$

$! an > [(-) / 2] > bn ! an > bn$ lo cual, contradice la hipótesis de que $an " bn$

- $\{ an \} \neq$

" $\{ an \}$ " $\{ cn \}$ " $\{ bn \} ! \{ cn \} !$

$\{ bn \} \neq$

D/. $\{ an \} \neq ! ! " ! > 0 " N1 " ! / n " N ! | an - | < ! ! - ! < an < + !$

$\{ bn \} \neq ! ! " ! > 0 " N2 " ! / n " N ! | bn - | < ! ! - ! < bn < + !$

Tomamos un $n > \max. \{ N1, N2 \} = N ! - ! < an " cn " bn < + ! !$

$! | cn - | < ! ! \{ cn \} ! - _$

2.6. Sucesiones monótonas.

Siendo el conjunto de elementos de una sucesión $\{ an \}$ el que se presenta: $A = \{ an / n " ! \}$ entonces:

Diremos que una sucesión es creciente si en una sucesión, un elemento es menor o igual a su posterior, es decir: $an " an + 1 " an / an + 1 " 1$ y de igual manera, será decreciente si $an " an + 1$.

Y por fin diremos que una sucesión es monótona, si es creciente o decreciente.

Propiedad:

Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$ $\{a_n\}$ es creciente $\Leftrightarrow a_n < a_m$ (D/. por inducción).

De la misma manera si $\{a_n\}$ es decreciente $\Leftrightarrow a_n > a_m$.

Teorema:

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Es decir:

– Si $\{a_n\}$ monótona (!) y acotada superiormente $\Leftrightarrow \{a_n\}$ convergente

– Si $\{a_n\}$ monótona (!) y acotada inferiormente $\Leftrightarrow \{a_n\}$ convergente

D/. Si $\{a_n\}$ monótona (!) y acotada superiormente $\Leftrightarrow \{a_n\}$ convergente

$\{a_n\}$ acotada superiormente $\Rightarrow A = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$ acotado superiormente por ax. 10

$\Rightarrow \sup(A) = a$

$A \subset \mathbb{R}$

Dado $\epsilon > 0$ $\exists m \in \mathbb{N} / a_m > \sup(A) - \epsilon = a - \epsilon$

$\Rightarrow a - \epsilon < a_m \leq a_n \leq a < a + \epsilon$

Si $\{a_n\}$ es creciente $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} / a_n < a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$

$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq m$

Igual demostraríamos $\{a_n\}$ decreciente y acotada inferiormente $\Leftrightarrow \{-a_n\}$ creciente acotada.

Ejm: Probar que la sucesión dada de forma recurrente, es convergente y hallar su límite:

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2a_1 = 2$$

$$a_3 = 2a_2 = 4$$

A primera vista vemos que parece que va creciendo.

$$a_{n+1} = 2a_n$$

Nota:

Para probar que una propiedad $P(n)$ es cierta por inducción deben darse los siguientes pasos:

- Probar que es cierto para $P(n_0)$.
- Hipótesis de inducción (H. I.), suponemos que $P(k)$, con $k > n_0$
- Probar que se cumple para $P(k+1)$

Si se cumplen los tres casos entonces podemos decir que $P(n)$, es cierta.

Veamos que $\{a_n\}$ es creciente y está acotada superiormente, de esta manera veremos que es convergente. Ambas pruebas las haremos por inducción y empezaremos por ver si es creciente:

$$a) P(n) = a_n + 1 \leq a_{n+1}$$

- Probemos que es cierta $P(n_0)$, $n_0 = 1$

$$¿a_2 \leq a_1 + 1?$$

Si se cumple ya que $2 = 1 + 1 > 1$, por lo que la primera premisa es cierta.

- H. I. Suponemos que $P(k)$ es cierta, $a_{k+1} \leq a_k + 1$
- Probemos ahora que se cumple $P(k+1)$, ¿ $a_{k+2} \leq a_{k+1} + 1$?

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k = a_{k+1} + 1$$

H.I.

$$a_{k+1} \leq a_k + 1$$

$$2a_{k+1} - a_k \leq a_{k+1} + 1$$

$$a_{k+1} \leq a_k + 1$$

* $a_{k+2} \leq a_{k+1} + 1$ es cierta.

Así que si $P(n)$ es cierta, $\{a_n\}$ es creciente

b) Probemos ahora si está acotada superiormente, es decir $P(n) = a_n \leq 3$:

- Probemos $P(1)$:

$$a_1 = 1 \leq 3 \text{ Sí es cierto.}$$

- H. I. Suponemos que es cierta $P(k)$, es decir $a_k \leq 3$.
- Probemos ahora $P(k+1)$, ¿ $a_{k+1} \leq 3$?

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} < 3$$

$$a_{k+1} < 3.$$

Por lo que $P(n)$ es cierta, es decir $\{a_n\}$ está acotada superiormente.

Y si $\{a_n\}$ está acotada superiormente y es creciente, entonces es convergente y tiene límite.

c) Hallemos ahora el límite de la sucesión $\{a_n\}$! a .

¿límn $\{a_n\}$?

$$a_{n+1} = 2a_n$$

$$a = 2a$$

$a = 2a \Rightarrow a = 0$, este resultado no puede ser, ya que la sucesión

$a_n = 2^n$ empieza en 1 y es creciente, así que

$$a = 2$$

2.7. Subsucesiones. Teorema de Bolzano–Weirstrass.

Aplicación estrictamente creciente (a. e. c.)

: !!

$$f(n) / f(n+1) > f(n)$$

Propiedad.

Si f es una a. e. c. ! $f(n+1) > f(n) \forall n \in \mathbb{N}$

D/. Por inducción:

- $P(1)$: $f(1) > 1$, es cierto por ser una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ donde $f(1)$ es 1

$f(1) > 1$.

- H. I. $P(k)$, $f(k) > k$, suponemos que es cierto.
- ¿ $P(k+1)$? $f(k+1) > k+1$. $f(k+1) > f(k) > k \Rightarrow f(k+1) > k+1$ por hipótesis inductiva

De aquí sacamos que $f(n) > n \forall n \in \mathbb{N}$ a.e.c. H. I.

Subsucesión o sucesión parcial.

$\{b_n\}$ será una subsucesión de $\{a_n\}$ si $b_n = a_{k(n)}$ con a a. e. c.

Ejm(1): Si $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$

y $\{b_n\} = \{a_1, a_7, a_{23}, a_5, a_{81}, \dots\}$

Vemos de inmediato, que $\{b_n\}$ no es una subsucesión de $\{a_n\}$, ya que $k(n) = 1, 7, 23, 5, 81$, y estos no van en orden ascendente.

Ejm(2): Si $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$

$b_n = a_{2n} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$ $k(n) = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$ $\{b_n\}$ si es subsucesión de $\{a_n\}$

$cn = a_{2n-1} = \{-1, -1, -1, -1, -1, -1, \dots\} \quad (n) = 1, 3, 5, 7, 11, \dots$ $\{cn\}$ si es subsucesión de $\{an\}$

Teorema:

Toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y tiene el mismo límite que la sucesión a la que pertenece.

$\{bn\} \subset \{an\}$ $\{an\}$ convergente $\Rightarrow \{bn\}$ convergente

D/. $bn = a(n)$ $(n) = a.e.c. \quad (n) \rightarrow \infty$

$\epsilon \{a(n)\} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a(n) - L| < \epsilon$

Sabemos que $\{an\}$ $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |an - L| < \epsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}$, concluimos con que sí existe un N para el que se cumple $|a(n) - L| < \epsilon$

Lema: (Es cierto aunque no está demostrado)

Tenemos $\{an\}$ y podemos asegurar que esta sucesión tiene al menos una subsucesión monótona.

$\{an\} \Rightarrow \{a(n)\} \subset \{an\}$ que es monótona.

Teorema de Bolzano-Weirstrass.

Si $\{an\}$ acotada $\Rightarrow \{an\}$ admite una subsucesión convergente.

D/. Si $\{an\}$ subsucesión monótona $\{a(n)\}$

$\{a(n)\}$ convergente

Si $\{an\}$ acotada $\Rightarrow \{a(n)\}$ acotada

2.8. Sucesiones de Cauchy.

Diremos que $\{an\}$ es de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geq N \quad |ap - aq| < \epsilon$

(Teorema: $\{an\}$ de Cauchy $\Leftrightarrow \{an\}$ convergente)

Propiedad: $\{an\}$ si $0 < k < 1 \quad |an+1 - an| < kn \Rightarrow \{an\}$ convergente

D/. Dado un $h \in \mathbb{N}$

$|an + h - an| = |an + h - an + h - 1| + |an + h - 1 - an + h - 2| + \dots + (h + |an + 1 - an| <$

$$\bullet < kn + h - 1 + kn + h - 2 + \dots + kn = kn [kh - 1 + kh - 2 + \dots + 1] =$$

progresión geométrica

$$= kn \cdot [(1 - kh)/(1 - k)] < kn/(1 - k) \Rightarrow |an + h - an| < kn/(1 - k)$$

Si tomamos

$$\text{Si } k < 1 \text{ " } \{k^n\} \rightarrow 0 \text{ " } k^n/(1-k) < \epsilon \text{ " } |a_n + h - a_n| < \epsilon \text{ " } p = n + h$$

$$q = n$$

$$\epsilon \text{ " } |a_p - a_q| < \epsilon \text{ " } \{a_n\} \text{ de Cauchy " } \{a_n\} \text{ convergente}$$

Demostración de: si $k < 1$ " $\{k^n\} \rightarrow 0$

$$\{k^n\} \rightarrow 0 \text{ " } \epsilon > 0 \text{ " } \exists N \text{ " } \forall n \geq N \text{ " } |k^n| < \epsilon$$

!!

$$\epsilon \text{ " } n \ln k < \ln \epsilon$$

$$n > \ln \epsilon / \ln k$$

$$\exists N > \ln \epsilon / \ln k \text{ ó } N = E(\ln \epsilon / \ln k) + 1$$

Resumen de conclusiones:

" $\{a_n\}$ de Cauchy

" $\{a_n\}$ monótona y acotada " $\{a_n\}$ convergente

" $\{a_n\}$ acotada " $\{a_n\}$ admite una subsucesión convergente

Ejercicio:

Sea $\{a_n\}$ " $a_n \rightarrow l$; " n

$$\text{y } \{b_n\} / b_{2n-1} = a_n$$

$$b_{2n} = a_{n^2} - 6$$

Probar que si $\{b_n\}$ convergente " $\{a_n\}$ convergente y calcular el límite de ambas sucesiones.

La comprobación de que si $\{b_n\}$ convergente " $\{a_n\}$ convergente, viene dada por el enunciado, ya que nos está diciendo que $\{a_n\}$ " $\{b_n\}$, y ya quedó probado que si $\{b_n\}$ convergente una subsucesión suya llamada en este caso $\{a_n\}$ también es convergente.

Y su límite, llamando a $n = l$, el enunciado nos dice que:

$$l = l^2 - 6$$

$$l^2 - l - 6 = 0$$

$$l = 3 \text{ ó } l = -2$$

de estos dos resultados, tomamos $l = 3$, ya que hablamos de $a_n \rightarrow l$

2.9. Sucesiones divergentes.

Definición:

Una sucesión divergente es aquella a partir de uno de sus términos, todos los restantes serán superiores ó inferiores a cualquier número real dado.

- $\{a_n\}$ diverge positivamente ($\{a_n\} \rightarrow +\infty$) $\exists k \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n > k$
- $\{a_n\}$ diverge negativamente ($\{a_n\} \rightarrow -\infty$) $\exists k' \in \mathbb{R} \exists N' \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall n \geq N' : a_n < k'$

Ejemplo:

Probar que $\{a^n\} \rightarrow +\infty, a > 1$

$$\{a^n\} \rightarrow +\infty \iff \forall k \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a^n > k$$

$$n \ln a > \ln k$$

$$n > \ln a / \ln k$$

Entonces nos damos cuenta que queda probado, ya que existe un $N > \ln a / \ln k$ ó

$$N = E(\ln a / \ln k) + 1$$

$\{a_n\}$ será divergente si $\{a_n\}$ diverge positiva o negativamente.

Propiedades:

- Si $\{a_n\}$ divergente $\implies \{|a_n|\}$ diverge positivamente

!

Ejemplo de que ! no se cumple:

$\{a_n\} = \{(-1)^n \cdot n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$ no es divergente ni tampoco convergente.

$\{|a_n|\} = \{|(-1)^n \cdot n|\} = \{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ divergente.

- a) Si $\{a_n\} \rightarrow +\infty$

minorada $\implies \{a_n \cdot b_n\} \rightarrow +\infty$

$\{b_n\}$ verifica $\rightarrow +\infty$

converge

Indeterminación ($\infty - \infty$)

- b) Si $\{a_n\} \rightarrow -\infty$

mayorada $\implies \{a_n \cdot b_n\} \rightarrow -\infty$

$\{b_n\}$ verifica $\rightarrow -\infty$

converge

Ejm:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^2 - n\} = \infty - \infty$ (indeterminación)

!

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n(n-1)\} = \infty \cdot \infty = +\infty$

2. a) Si $\{a_n\} \rightarrow +\infty$

$\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow +\infty$

$\{b_n\} \rightarrow +\infty$

b) Si $\{a_n\} \rightarrow +\infty$

$\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow -\infty$

$\{b_n\} \rightarrow -\infty$

c) Si $\{a_n\} \rightarrow -\infty$

$\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow +\infty$

$\{b_n\} \rightarrow -\infty$

d) Si $\{a_n\} \rightarrow +\infty$ $b > 0$ $\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow +\infty$

$\{b_n\} \rightarrow b$ $b < 0$ $\{a_n \cdot b_n\} \rightarrow -\infty$

$b = 0$! Indeterminación ($\infty \cdot 0$) " ∞ / ∞ ")

3. a) Si $\{a_n\} \rightarrow 0$ $\{1 / |a_n|\} \rightarrow +\infty$

b) Si $\{a_n\}$ divergente $\{1 / |a_n|\} \rightarrow 0$

4. $\{a_n b_n\} \rightarrow L$

a) $\{a_n\} \rightarrow a > 0$

$\{b_n\} \rightarrow b$

$\{a_n b_n\} \rightarrow ab$

b) $\{a_n\} \rightarrow 0$

$\{b_n\} \rightarrow b$

$\{a_n b_n\} \rightarrow 0$

$b = 0$! Indeterminación (00)

c) $\{a_n\} : a > 0, a > 1$! $L = +\infty$

$a < 1$! $L = 0$

$\{b_n\} : +\infty, a = 1$! Indeterminación (1")

d) $\{a_n\} : +\infty$

$+\infty$! $L = +\infty$

$\{b_n\} : b > 0$

$b = 0$! Indeterminación ("0)

¿Qué hacer con las indeterminaciones?

Si nos encontramos la indeterminación 00 pasaremos a "0 de aquí a $(0 \cdot \infty)$ y por fin a (∞ / ∞) " $(0 / 0)$

Si nos encontrásemos la indeterminación de 1", la resolveríamos mediante el número e.

(criterio de

Stolz)

EJERCICIOS

Calcular los siguientes límites:

1.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(n \cdot \cos n) / (n^2 + 24)\} = \infty / \infty$ (Indeterminación)

!!

$$\{[(n/n^2) \cdot (\cos n / n^2)] / [(n^2/n^2) + (24 / n^2)]\} = \{(1/n) \cdot (\cos n/n^2)\} / [1 + (24 / n^2)] !$$

$$\bullet (0 \cdot 0) / (1 + 0) = 0$$

2.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(n^2 - 3) / (n - 8)\} = \infty / \infty$ (Indeterminación)

!!

$$\{[(n^2 - 3) / n^2] / [(n - 8) / n^2]\} = \{(1 - 3/n^2) / (1/n - 8/n^2)\} ! (1 - 0) / (0 - 0) = \pm \infty$$

3.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(2n + 1) / (2n + n)\} = \infty / \infty$

!!

$$\{[(2n + 1) / 2n] / [(2n + n) / 2n]\} = \{(1 + 1/2n) / (1 + n/2n)\} ! (1 + 0) / (1 + 0) = 1$$

4.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \{((n + 9) - n) \cdot ((n+5))\} = \infty - \infty$ (Indeterminación) Utilizamos lo antes escrito.

!!

$$\{[(n+9) - n] \cdot (n+5)\} / [(n+9) + n] / [(n+9) + n] =$$

$$= \{(n+9 - n) \cdot (n+5)\} / [(n+9) + n] \quad ! \quad / \quad (Indeterminación)$$

$$\{[(n+9 - n) \cdot (n+5)] / n\} / [(n+9) + n] / n = \{(9[(n/n) + (5/n)]) / (n/n + 9/n + n/n)\} =$$

$$= \{[9(1+5/n)] / [(1 + 9/n) + 1]\} \quad ! \quad (9 \cdot 1) / (1 + 1) = \underline{9/2}$$

Cuando hay " para ahorrarnos las indeterminaciones, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la diferencia en cuestión.

$$5.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{3^n(n+3) - 3^n(n+1)\} = \infty - \infty \quad (Indeterminación)$$

$$a = 3^n(n+3) \quad ! \quad a_3 = n+3; \quad a_2 = 3^n(n+3)^2$$

$$a \cdot b = 3^n(n+3)(n+1)$$

$$b = 3^n(n+1) \quad ! \quad b_3 = n+1; \quad b_2 = 3^n(n+1)^2$$

$$\text{Sabemos que } (a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad ! \quad (a - b) = (a^3 - b^3) / (a^2 + ab + b^2)$$

$$\{3^n(n+3) - 3^n(n+1)\} = \{[(n+3) - (n+1)] / [(3^n(n+3)^2 + 3^n((n+3)(n+1)) + 3^n(n+1)^2)]\} =$$

$$= \{2 / [(3^n(n+3)^2 + 3^n((n+3)(n+1)) + 3^n(n+1)^2)]\} \quad ! \quad \underline{0}$$

$$6.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{n^n(an + bn)\} \text{ con } a \text{ y } b > 0 = \infty \quad (Indeterminación)$$

$$a = b \quad ! \quad \{n^n(an + bn)\} = \{n^{2a}n\} = \{a \cdot n^{2a}\} \quad ! \quad \underline{a}$$

$$a > b \quad ! \quad \{n^n(an + bn)\} = \{n^n[(an + bn)an] / an\} = \{a \cdot n^n[(an/an) + (bn/an)]\} =$$

$$\{a \cdot n^n[1 + (b/a)n]\} \quad ! \quad a \cdot \infty(1 + 0) = a \cdot \infty = \underline{a}$$

$$a < b \quad ! \quad \{n^n(an + bn)\} = \{n^n[(an + bn)bn] / bn\} = \{b \cdot n^n[(an/bn) + (bn/bn)]\} =$$

$$\{b \cdot n^n[1 + (a/b)n]\} \quad ! \quad b \cdot \infty(1 + 0) = b \cdot \infty = \underline{b}$$

$$7.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{[(n^2 + 3)/(n^2 - 1)][(n, n - 3)/(2n, n - 1)]\} \quad ! \quad \underline{1}$$

$$8.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{[(n^2 + 3)/(n^3 - 1)][2n, n/(n, n - 1)]\} \quad ! \quad \underline{0}$$

$$9.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{[(n^3 + 1)/(n^2 + 1)]n\} = \infty / \infty \quad (Indeterminación)$$

$$\{[(n^3/n^3) + (1/n^3)] / [(n^2/n^3) + (1/n^3)]\}n = \{[1 + (1/n^3)] / [(1/n) + (1/n^3)]\}n \quad !$$

$$\quad ! \quad [(1+0)/(0+0)] = \infty = \pm \infty$$

$$10.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{[n^3/(n^2+1)]n^{4/2n}\} = \infty / \infty \quad (Indeterminación)$$

$$\{[(n^3/n^3)/[(n^2/n^3)+(1/n^3)]]n^{4/2n}\} = \{[1/[(1/n)+(1/n^3)]]^{1/2}\} \quad ! \quad [1/(0+0)]^{1/2} = \pm \infty$$

Lema:

Sea $\{a_n\} \neq 1; a_n > 1$

Sea $\{b_n\} \neq 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n b_n\} = e^b$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - 1)b_n\} = b$!

D/.

$\{a_n b_n\} = \{[1 + (a_n - 1)]^{1/(a_n - 1)} (a_n - 1)b_n\}$ Si $c_n = 1/(a_n - 1)$!

$\{a_n b_n\} = \{[1 + (1/c_n)]^{c_n} (a_n - 1)b_n\}$

$e^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = e^b$

EJERCICIOS

11.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \{[n^3/(n^3+1)]^{(3n^4+2)/n}\} = 1$ (Indeterminación)

$a_n = n^3/(n^3+1)$

$b_n = (3n^4+2)/n$

$(a_n - 1)b_n = [n^3/(n^3+1)] - 1 \cdot [(3n^4+2)/n] = [-1/(n^3+1)] \cdot [(3n^4+2)/n] = [(3n^4+2)/(n^4+n)]$!

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{[(3n^4+2)/(n^4+n)]\} = -3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{[n^3/(n^3+1)]^{(3n^4+2)/n}\} = e^{-3} = \underline{1/e^3}$

12.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(1 + \ln(n+1) - \ln n)^n\} = e^{-1}$ (Indeterminación)

Por una parte:

$\{\ln(n+1) - \ln n\} = \{\ln[(n+1)/n]\} = \{\ln[1 + (1/n)]\} \rightarrow 0$!

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(1 + \ln(n+1) - \ln n)^n\} = 1$ (Indeterminación)

$a_n = 1 + \ln[1 + (1/n)]$

$b_n = n$

$\{(a_n - 1)b_n\} = \{\ln[1 + (1/n)] \cdot n\} = 0$ (Indeterminación)

$\{\ln[1 + (1/n)] \cdot n\} \rightarrow \ln[1 + (1/n)]^n \rightarrow \ln e = 1 = b$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(1 + \ln(n+1) - \ln n)^n\} = \underline{e^{-1}}$

13.- ¿Cuánto ha de valer a ! para que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{[\ln(n+a)]/\ln n\}^n = 2 = L$?

$a_n = [\ln(n+a)]/\ln n$

$$b_n = n \ln n$$

$$\{(a_n - 1)b_n\} = \{[\ln(n+a) - \ln n] / \ln n \cdot (n \ln n)\} = \{[\ln(n+a) - \ln n] n\} = \\ = \{n \ln[(n+a)/n]\} = \{n \ln[1 + (a/n)]\} \rightarrow \ln(ea) = a$$

$$\{[1 + (a/n)]^n\} \rightarrow e^a \text{ (Indeterminación)}$$

$$\rightarrow e^a$$

$$[1 + (a/n) - 1]^n = a$$

$$L = 2 = e^a$$

$$a \ln e = \ln 2$$

$$a = \ln 2 / \ln e = \underline{\ln 2}$$

2.10. Criterio de Convergencia (Criterio de Stolz).

$\{a_n\}$ cualquiera

$\{b_n\}$; $b_n > 0$; no mayorada y estrictamente creciente L

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n/b_n\} = +\infty$$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)\} = +\infty \text{ o } -\infty$$

—

Ejms:

$$1.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{n / \ln(n!)\} = \infty / \infty \text{ (Indeterminación)}$$

$$a_n = n$$

$$b_n = \ln(n!)$$

$$\{(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)\} = \{(n+1) - n / [\ln(n+1)! - \ln(n!)]\} = \{1 / [\ln(n+1)! - \ln(n!)]\} = \\ \{1 / \ln[(n+1)!/n!]\} = \{1 / \ln(n+1)\} \rightarrow 1/\infty = 0 \text{ por lo que:}$$

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \{n / \ln(n!)\} = 0}$$

$$2.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{(1! + 2! + 3! + \dots + n!) / n!\} = \infty / \infty \text{ (Indeterminación)}$$

$$a_n = \{1! + 2! + 3! + \dots + n!\}$$

$$a_n / b_n = \{(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)\} =$$

$$b_n = \{n!\} \text{ divergente}$$

$$= \{[(1! + 2! + 3! + \dots + n! + (n+1)!) - (1! + 2! + 3! + \dots + n!)] / [(n+1)! - n!]\} =$$

$$= \{(n+1)! / [(n+1)n! - n!]\} = \{[n!(n+1)] / [n!(n+1-1)]\} = \{(n+1)/n\} \rightarrow 1$$

$$3.- \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) / n^4 \}$$

$$a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n / b_n\} \text{ " } \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_{n+1} - a_n) / (b_{n+1} - b_n)\} =$$

$$b_n = n^4 \text{ divergente}$$

$$\{[(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)] / [(n+1)^4 - n^4]\} =$$

$$= \{(n+1)^3 / [(n+1)^4 - n^4]\}$$

!

$$(n+1)^4 - n^4 = [(n+1) - n] \cdot [(n+1)^3 + n(n+1)^2 + n^2(n+1) + n^3] =$$

$$= [(n+1)^3 + n(n+1)^2 + n^2(n+1) + n^3]$$

$$\rightarrow \{(n+1)^3 / [(n+1)^3 + n(n+1)^2 + n^2(n+1) + n^3]\} \rightarrow 1/4$$

Entonces por el criterio de Stolz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) / n^4 \} = 1/4$$

Daremos ahora como aplicaciones del criterio de Stolz algunos criterios más:

Criterio de la media aritmética

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

Si $\{a_n\}$!!!

$$\pm \infty \text{ " } n \pm \infty$$

D/.

Sea $\{a_n\} = \{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n\}$ $\{b_n\} = \{n\}$ creciente y divergente

con

$$y \{a_{n+1}\} = \{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}\} \{b_{n+1}\} = \{n+1\}$$

a

$$(a_{n+1} - a_n) / (b_{n+1} - b_n) = a_{n+1} / (n+1 - n) = a_{n+1}, \text{ por tanto si } \{a_{n+1}\} \rightarrow$$

$\pm \infty$

Por el criterio de Stolz, $\{a_n\}$ posee el mismo límite.

Ejm:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + (1/2) + (1/3) + \dots + (1/n)}{n} \right\}$ media aritmética de $\{1/n\} \neq 0$, y ya que esta tiende a 0, la del enunciado, también tiende a 0.

Criterio de la media geométrica

a a

Si $\{a_n\} \neq 0$ con $a_i > 0 \forall n (a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \neq 0$

+ " + "

D/. Por Stolz

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = L \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 \dots a_n}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = L$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \ln (a_1 a_2 a_3 \dots a_n) \right\} = \ln L$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \dots + \ln a_n}{n} \right\}$ que es la media aritmética de $\{\ln a_n\} \neq \ln L$

Si $\{a_n\} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$

! Si $\{a_n\} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$

Si $\{a_n\} \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$

$\ln a = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n$

$\ln L = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln L = 0$ que es igual al $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n$

+ " e+ "

Criterio de la raíz.

a a a

Sea $\{a_n\}$; $a_n > 0$; si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

+ " + " + "

D/. Sea a_1 con $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

! $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ que es la media geométrica de a_n , de donde:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1} / a_n} = L$

EJERCICIOS

14.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (Indeterminación)

Si $a_n = n! \cdot \{(n+1)/n\} = \{(n+1)/n\} \cdot 1! \cdot \{n^n\} \cdot 1$

15.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^n / n\} = 0$ (Indeterminación)

$a_n = n! / n^n \cdot \{(n+1)/n\} = \{n! / (n+1)^n\} = \{n^n / (n+1)^n\} = \{[n/(n+1)]^n\} \cdot 1$ (Indeterminación)
 $\{[n/(n+1)]^n\} = \{[1 + (1/n)]^{-n}\} \cdot e^{-1}$

16.- Sabiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = a$, probar que

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2a$$

$$2n, 2n-1, 2n-2, \dots, 2$$

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^na_n$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = ? \text{ Por Stolz}$$

$$2n, 2n-1, 2n-2, \dots, 2, 2n$$

$$[a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^na_n + 2^{n+1}a_{n+1}] - [a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^na_n]$$

$$=$$

$$(2^{n+1}) - (2^n)$$

$$2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 2^n (2a_{n+1} - a_n)$$

$$= = = \{2a_{n+1}\} \cdot 2^n$$

$$2(2^n) - (2^n) = 2^n$$

17.- $\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^n (n+1)\} = (n+1)^{1/n} = 0$ (Indeterminación)

Por el criterio de la raíz

Si $a_n = n + 1! \cdot \{(n+2)/(n+1)\} \cdot 1! \cdot \{n^n (n+1)\} \cdot 1$

18.- (Ejercicio 4, apartado g)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^n (2n)! / n!\} = 0$ (Indeterminación)

$$2(n+1)! / (2n+2)!$$

$$(2n)! \text{ Por C. Raíz } (n+1)! / (n+1)! (2n+2)! / n!$$

$$a_n = 1 = = =$$

$$n! (2n)! / (2n)! (n+1)! (2n)!$$

$$n! / n!$$

$$(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot n! (2n+2)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n!}$$

$$(2n)! (n+1) n! (n+1)$$

19. – (Ejercicio 4, apartado h)	Nota:
$n+k$	$m \cdot m!$
k	$=$
$\lim_{n \rightarrow \infty}$	$n \cdot n! (m-n)!$
$(n+k)^k$	

$$n+k (n+k)! (n+k)!$$

$$k$$

$$k! (n+k-k)! = k! \cdot n! =$$

$$(n+k)^k =$$

$$(n+k)^k (n+k)!$$

$$(n+k)(n+k-1)(n+k-2) \dots n! (n+k)(n+k-1) (k (n+1))$$

$$= k! \cdot n! = k! =$$

$$(n+k)! (n+k)!$$

$$(n+k)(n+k-1) (k (n+1))$$

$$= \frac{1}{k!}$$

$$k! (n+k)!$$

$$\frac{1}{(1+2)^2} + \frac{1}{(1+3)^2} + \dots + \frac{1}{(1+n)^2}$$

$$20. – \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$1+n^2$$

$$a_n = \left\{ \frac{1}{(1+2)^2} + \frac{1}{(1+3)^2} + \dots + \frac{1}{(1+n)^2} \right\} \text{ Por Stolz}$$

$$!$$

$$b_n = \{1+n^2\}$$

$$\left[\frac{1}{(1+2)^2} + \frac{1}{(1+3)^2} + \dots + \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{[1 + (n+1)^2]} \right] - \left[\frac{1}{(1+2)^2} + \frac{1}{(1+3)^2} + \dots + \frac{1}{(1+n)^2} \right]$$

=

$$[1+(n+1)^2] - [1 + n^2]$$

$$"[1 + (n+1)^2] "[1 + (n+1)^2] "[1 + (n+1)^2]$$

= = = =

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

$$"[n^2 + 2n + 2] "[(n^2 + 2n + 2)/(2n + 1)]$$

$$= = ! \frac{1}{2}$$

$$2n + 1 = (2n+1) / n$$

21.-

$$a_1 = 2$$

Dada $\{a_n\}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$$

- Probar que está acotada inferiormente por "2.
- Probar que es creciente.
- Calcular si límite

$$a) a_n > "2 "n " !$$

$$1) P(1) ! ¿a_1 > "2?$$

$$¿2 > "2? Sí lo cumple.$$

- H.I. Suponemos que P(k) es cierta.
- ¿Se cumple P(k+1)? ! ¿a_{k+1} > "2?

$$\text{Veamos, } a_{k+1} = \frac{1}{2} (a_k + \frac{2}{a_k}) = \frac{(a_k^2 + 2)}{(2a_k)} !$$

$$! a_k^2 + 2 > ("2) 2a_k !$$

$$! a_k^2 + 2 - 2("2)a_k > 0 !$$

$$\bullet (a_k - "2)^2 > 0$$

Este resultado lo podemos asegurar ya que todos los cuadrados son positivos, por lo que podemos asegurar que $a_n > "2 "n " !$

TEMA 3: Funciones de variable real. Límites. Continuidad.

3.1 Definición de función real de variable real. Dominio y recorrido.

Sea f , una aplicación de un conjunto A en $\mathbb{R}$, será una función real, si esta es biyectiva, es decir, para cada x del conjunto A , $\exists! y \in \mathbb{R} / y = f(x)$.

Ejm:

$$f(x) = 3x + 8$$

$$g(x) = \sqrt{2x - 1}$$

Dominio de f : $\{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ está definida}\} = \text{Dom.}(f)$

Recorrido de f : $\{y \in \mathbb{R} / y = f(x); x \in \text{Dom.}(f)\} = \text{Rec.}(f)$

Gráfica de f : $\{(x, f(x)) / x \in \text{Dom.}(f)\}$

Ejemplos de funciones:

1)

$y = f(x) = cte.$	Gráfica:
$\text{Dom.}(f) = \mathbb{R}$	
$\text{Rec.}(f) = k = cte.$	

2)

$y = g(x) = x$	Gráfica:
$\text{Dom.}(g) = \mathbb{R}$	
$\text{Rec}(g) = \mathbb{R}$	

3)

$y = h(x) = x^2$	Gráfica:
$\text{Dom.}(h) = \mathbb{R}$	
$\text{Rec}(h) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	

4) $y = i(x) = ax^2 + bx + c$ $\text{Dom.}(i) = \mathbb{R}$ $\text{Rec}(i) =$

5) $n \text{ par } \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$y = j(x) = x^n$ $\text{Dom.}(j) = \mathbb{R}$ $\text{Rec}(j) =$

$n \text{ impar } \mathbb{R}$

6) $y = k(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ $\text{Dom.}(k) = \mathbb{R}$

7)

$y = l(x) = x $	Gráfica:
$\text{Dom.}(l) = \mathbb{R}$	
$\text{Rec}(l) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	

8)

$y = m(x) = x - 2 $	Gráfica:
$Dom.(m) = \mathbb{R}$	
$Rec(m) = [0, +\infty)$	

9)

$y = n(x) = x - 2$	Gráfica:
$Dom.(n) = \mathbb{R}$	
$Rec(n) = [-2, +\infty)$	

10)

$y = E(x) = P.$ $entera$	Gráfica:
$Dom.(E) = \mathbb{Z}$	
$Rec(E) = \mathbb{Z}$	

11)

$y = f_1(x) = 1/x$	Gráfica:
$Dom.(f_1) = \mathbb{R} - \{0\}$	
$Rec(f_1) = \mathbb{R} - \{0\}$	

12)

$y = f_2(x) = 1/(x-2)$	Gráfica:
$Dom.(f_2) = \mathbb{R} - \{2\}$	
$Rec(f_2) = \mathbb{R} - \{0\}$	

13)

$y = f_3(x) = (x-1)^2$	Gráfica:
$Dom.(f_3) = \mathbb{R}$	
$Rec(f_3) = [0, +\infty)$	

14)

$y = f_4(x) =$	Gráfica:

$"(x^2 - 25)$	
$Dom.(f_4) = [5, +\infty)$	
$Rec(f_4) =]-\infty, 0] \cup \{0\}$	

$$15) y = f_6(x) = (x - 2)/(x + 1)$$

$$Dom.(f_6) =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

$$16) y = f_7(x) = \ln[(x - 2)/(x + 1)]$$

$$Dom.(f_7) = (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$$

$$17) y = f_8(x) = \ln[(1 - x)/(1 + x)]$$

$$Dom.(f_8) =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty)$$

18)

$y = f_9(x) = 3x$	Gráfica:
$Dom.(f_9) = \mathbb{R}$	
$Rec(f_9) = \mathbb{R}$	

• Operaciones con funciones.

Tenemos f y g dos aplicaciones del conjunto A en B .

$f, g: A \rightarrow B$

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$Dom.(f + g) = Dom.(f) \cap Dom.(g)$$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$Dom.(f \cdot g) = Dom.(f) \cap Dom.(g)$$

Cociente: $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$

$$Dom.(f / g) = Dom.(f) \cap Dom.(g) - \{0\}$$

Composición: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$Rec(g) \cap Dom.(f)$$

Ejemplos: Dados $f(x) = x$ y $g(x) = 1/x$

1.- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + (1/x)$

2.- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x / x$

$$3.- (f/g)(x) = f(x)/g(x) = x^2/x$$

$$4.- (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[1/x] = 1/(1/x) \text{ Dom.}(f \circ g) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$5.- (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2] = 1/[x^2] \text{ Dom.}(g \circ f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\text{Dados } f(x) = x^3 - 1 \text{ y } g(x) = 1/(1-x)$$

$$6.- (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[1/(1-x)] = (1/(1-x))^3 - 1 \text{ Dom.}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

$$7.- (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^3 - 1] = 1/(1 - (x^3 - 1)) \text{ Dom.}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \neq 2\}$$

Inversas:

Diremos que f y g son inversas si $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

$$f = g^{-1} \text{ ó } g = f^{-1}$$

Ejemplos de comprobación de inversas:

$$1) f(x) = 2x^3 - 1$$

$$g(x) = 3^{1/3}[(x+1)/2]$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[3^{1/3}[(x+1)/2]] = 2(3^{1/3}[(x+1)/2])^3 - 1 = 3^{1/3}x^3 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[2x^3 - 1] = 3^{1/3}[(2x^3 - 1 + 1)/2] = 3^{1/3}x^3 = x$$

$$2) f(x) = \ln x$$

$$g(x) = e^x$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[e^x] = \ln e^x = x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\ln x] = e^{\ln x} = x$$

Todas las gráficas de funciones inversas, son simétricas respecto de la diagonal del eje de coordenadas.

Cálculo de inversas:

•

$$\bullet f(x) = 1/(1-x)$$

Veamos si es inyectiva para poder tener inversa:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ó

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$! 1/(1 - x_1) = 1/(1 - x_2) !$$

$$! 1 - x_1 = 1 - x_2 !$$

$$! x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) ! x_1 = x_2$$

$$x f 1/(1-x) = y$$

$$f^{-1}$$

$$y = 1/(1-x) ! 1-x = 1/y ! x = 1 - (1/y) ! f^{-1}(y) = f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = 1 - (1/x) = g(x)$$

Comprobemos ahora que son inversas:

$$f(x) = 1/(1 - x)$$

$$g(x) = 1 - (1/x)$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[1 - (1/x)] = 1/[1 - (1 - (1/x))] = 1/[1 - ((x-1)/x)] = 1/(1/x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[1/(1 - x)] = 1 - [1/(1/(1-x))] = 1 - (1 - x) = x$$

Comprobado, son inversas.

- $f(x) = x/(x - 1)$

Veamos si es inyectiva para poder tener inversa:

$$x_1 \neq x_2 ! f(x_1) \neq f(x_2)$$

ó

$$f(x_1) = f(x_2) !$$

$$! x_1/(x_1 - 1) = x_2/(x_2 - 1) !$$

$$! x_2(x_1 - 1) = x_1(x_2 - 1) !$$

$$! x_2x_1 - x_2 = x_1x_2 - x_1 !$$

$$! x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x \cdot f(x/(x-1)) = y$$

$$f^{-1}$$

$$y = x/(x-1) \Rightarrow y(x-1) = x \Rightarrow yx - x = x \Rightarrow x(y-1) = y \Rightarrow x = y/(y-1)$$

$$f^{-1}(x) = x/(x-1) = g(x)$$

Comprobemos ahora que son inversas:

$$f(x) = x/(x-1)$$

$$g(x) = x/(x-1)$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x/(x-1)] = [x/(x-1)]/[x/(x-1) - 1] =$$

$$= [x/(x-1)]/[x - (x-1)/(x-1)] = [x(x-1)]/(x-1) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x/(x-1)] = [x/(x-1)]/[x/(x-1) - 1] =$$

$$= [x/(x-1)]/[x - (x-1)/(x-1)] = [x(x-1)]/(x-1) = x$$

Comprobado, son inversas.

- $f(x) = 2x - 3$

Veamos si es inyectiva para poder tener inversa:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{ó}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow$$

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow$$

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow$$

$$2x_1 = 2x_2 - 3 + 3 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x f''(2x - 3) = y$$

$$f^{-1}$$

$$y = (2x - 3) \Rightarrow y^2 = 2x - 3 \Rightarrow x = (y^2 + 3) / 2$$

$$f^{-1}(x) = (x^2 + 3) / 2 = g(x)$$

Comprobemos ahora que son inversas:

$$f(x) = (2x - 3)$$

$$g(x) = (x^2 + 3) / 2$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f[(x^2 + 3) / 2] = (2[(x^2 + 3) / 2] - 3) = (x^2 + 3 - 3) = x^2 = x \\ (g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g[2x - 3] = ((2x - 3)^2 + 3) / 2 = (4x^2 - 12x + 9 + 3) / 2 = (4x^2 - 12x + 12) / 2 = 2x^2 - 6x + 6 \end{aligned}$$

Comprobado, son inversas.

3.3. Propiedades de las funciones. Algunas funciones elementales.

- Paridad:

- f se dice que es par, cuando $f(-x) = f(x)$ (es simétrico respecto del eje 0y).
- f se dice impar, cuando $f(-x) = -f(x)$ (es simétrico respecto del origen 00).
- f puede que no sea ni par, ni impar.

Ejemplos:

$$f_1(x) = 1/x$$

$$f_1(-x) = 1/(-x) = -[1/x] = -f_1(x) \text{ Impar}$$

$$f_2(x) = x^2$$

$$f_2(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_2(x) \text{ Par}$$

$$f_3(x) = |x| / x$$

$$f_3(-x) = |-x| / (-x) = -[|x| / x] = -f_3(x) \text{ Impar}$$

- Periodicidad:

Se dice que f es periódica de periodo t si $f(x + t) = f(x)$.

- Crecimiento y decrecimiento:

- f se dice creciente en un intervalo (I) si;

$$x < y$$

$$f(x) < f(y)$$

$$x, y \in I$$

- f se dice estrictamente creciente en un intervalo (I) si;

$$x < y$$

$$f(x) < f(y)$$

$$x, y \in I$$

- f se dice decreciente en un intervalo (I) si;

$$x < y$$

$$f(x) > f(y)$$

$$x, y \in I$$

- f se dice estrictamente decreciente en un intervalo (I) si;

$$x > y$$

$$f(x) > f(y)$$

$$x, y \in I$$

Ejemplos:

$$f(x) = 1/x$$

$$x < y \Rightarrow 1/x > 1/y \text{ decreciente en } I$$

$$f(x) > f(y)$$

$$f_1(x) = x^2$$

$$x, y > 0 \Rightarrow x^2 < y^2 \text{ creciente en } x > 0$$

$$x < y$$

$$x, y < 0 \Rightarrow x^2 > y^2 \text{ decreciente en } x < 0$$

$$f_2(x) = 1/(x - 3)$$

$$x < y \Rightarrow 1/(x - 3) > 1/(y - 3) \text{ decreciente en } I$$

$$f_2(x) > f_2(y)$$

- Acotación:

Se dice que f está acotada en un intervalo I si " k " $\leq |f(x)| \leq k$ $\forall x \in I$

Ejemplos:

$$f(-3) \leq f(3)$$

$$f(x) = x^2 \text{ en } [2, 3]$$

$$Cota \text{ sup.} = 9 \leq f(x) \leq 9 \forall x \in [2, 3]$$

$$f(x) = 1/x \text{ en } [-2, 2]$$

No está acotada

Ejercicio:

$$f(x) = (x + 1)/x$$

- ¿Cuál es su paridad?
- Hallar su inversa si la posee.
- Comprobar que es esa su inversa.
- Hallar su crecimiento.
- ¿Cuál es su acotación?
- $f(x) = (x+1)/x$

$$f(-x) = (-x+1)/-x = -(-x+1)/x = (x-1)/x \neq f(x) \text{ ! No tiene paridad.}$$

- Primero veamos si puede tener inversa, comprobamos si es inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ !}$$

$$(x_1 + 1)/x_1 = (x_2 + 1)/x_2 \text{ !}$$

$$x_2(x_1 + 1) = x_1(x_2 + 1) \text{ !}$$

$$x_2x_1 + x_2 = x_1x_2 + x_1 \text{ !}$$

$$x_2 = x_1x_2 + x_1 - x_2x_1 \text{ !}$$

$$x_2 = x_1 \text{ !}$$

! comprobado, puede tener inversa.

Hallemos ahora la inversa:

$$f(x) = y = (x + 1)/x$$

$$yx = x + 1$$

$$yx - x = 1$$

$$x(y - 1) = 1$$

$$x = 1 / (y - 1)$$

$$f^{-1}(x) = g(x) = 1 / (x - 1)$$

c) Comprobamos que es verdaderamente su inversa.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[1 / (x - 1)] = ([1 / (x - 1)] + 1) / [1 / (x - 1)] =$$

$$= [(1 + (x - 1)) / (x - 1)] / [1 / (x - 1)] = [(x - 1)(1 + (x - 1))] / (x - 1) = 1 + (x - 1) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[(x + 1) / x] = 1 / [(x + 1) / x - 1] = 1 / [(x + 1 - x) / x] = 1 / (1 / x) = x$$

Comprobado, son inversas.

$$d) f(x) = (x + 1) / x$$

Si $x > 0$ y $x < -1$ $f(x) = (x + 1) / x$ Es decreciente en x !

e) No está acotada.

Algunas funciones elementales, trigonométricas:

$$\text{Sen: } [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$$

Arc sen

$$\text{Arc sen } x = y \text{ ! Sen } y = x$$

$$\text{Sen}(\text{Arc sen } x) = x$$

$$\text{Cos: } [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

Arc cos

$$\text{Arc cos } x = y \text{ ! Cos } y = x$$

$$\text{Cos}(\text{Arc cos } x) = x$$

$$\text{Tg: } (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$$

Arc tg

$$\text{Arc tg } x = y \text{ ! Tg } y = x$$

$$\text{Tg}(\text{Arc tg } x) = x$$

3.4. Concepto de límite de una función.

El concepto de este tipo de límite es muy parecido al de límite de una sucesión, y se define como el valor al que tiende la función, cuando la variable tiende a un valor concreto, en el que la diferencia entre el valor al

que va la función y el valor del límite esta, es tan pequeño, que dado cualquier número real (tomando el valor de este tan pequeño como se quiera o se imagine) siempre el valor de este número real será mayor que el valor absoluto de la diferencia entre el límite y el valor de la función.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

D/. $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$?

$$\epsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad \forall |x - 2| < \delta \quad |(x - 2) - 0| < \epsilon$$

Tomemos $\epsilon = 1$

$$\epsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad \forall |x - 2| < \delta \quad |x^2 - 4| < \epsilon$$

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$$

" "

$$(4 + \delta)$$

$$|x^2 - 4| < \epsilon \quad \text{sii} \quad (4 + \delta) < \epsilon$$

Así que se cumplirá si tomamos un δ que cumpla lo anteriormente expuesto.

Límites laterales:

Por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x - a) < \delta \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

$$x > a$$

Por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (a - x) < \delta \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

$$x < a$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) = 0$$

$$f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6 \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6$$

tiende a 6 ! ! tiende a 0

Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

• **Propiedades de los límites.**

- El límite, si existe, es único
- $f(x)$!

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a}$$

- $f(x)$!

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a}$$

- $f(x)$!

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) / \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a}$$

- Si $f(x) \sim g(x) \sim h(x)$

$f(x)$! Teorema del

$$\lim_{x \rightarrow a} \text{emparejado } \lim_{x \rightarrow a} g(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a}$$

3.6. Límites infinitos.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$! " M " ! " > 0 / $|x - a| < \delta$! $f(x) > M$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$! " $N < 0$ " " > 0 / $|x - a| < \delta$! $f(x) < N$

Probar:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 1/(x-1) = +\infty$$
 ! " $M > 0$ " " > 0 / $(x-1) < \delta$! $1/(x-1) > M$

$$x - 1 <$$

$$1/(x-1) > 1/$$

Tomamos un $M = 1/\delta$ y se cumple que $1/(x-1) > M$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{!} \quad "N < 0 \quad \epsilon" > 0? / (2-x) < \quad ! \quad 1/(x-2) < N$$

$$2-x <$$

$$x-2 > -$$

$$1/(x-2) < -(1/)$$

Tomamos un $N = -(1/)$ y se cumple así que, $1/(x-2) < N$

Límites en el infinito:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$! " " !+ " > 0 / x > ! |f(x) - | < !
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$! " " !+ "n < 0 / x < n ! |f(x) - | < !

Probar:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{!} \quad "m > 0 / x > m \quad ! \quad |1/x| < !$$

$$x > m$$

$$x > m$$

$$1/x < 1/m$$

Tomando un $m > 1/!$, se cumplirá el enunciado.

Definir el:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

3.7. Cálculo de límites.

Infinitésimos:

Diremos que $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow 0$ si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Propiedades de los infinitésimos:

- Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = \neq 0$! son infinitésimos del mismo orden.
- Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 1$! son infinitésimos del mismo orden ($f(x) \sim g(x)$).
- Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 0$! $f(x)$ es un infinitésimo de orden mayor a $g(x)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/(g(x))^n = \neq 0$! $f(x)$ es un infinitésimo de orden n respecto de $g(x)$.
- Si $f(x) \sim f_1(x)$! $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)/g(x)$

Tabla de infinitésimos ($x \rightarrow 0$):

Sen x	"	x
Tg x	"	x
Cos x	"	No es un infinitésimo
1 - Cos x	"	x ² / 2
ln 1 + x	"	x
ln (1 + x ^k)	"	x ^k
ax - 1	"	x ln a
Arc tg x	"	x
Arc sen x	"	x

Nota:

El uso de esta tabla es para el cálculo de límites, ya que los límites de infinitésimos equivalentes son iguales y pueden cambiarse los términos para facilitar así la resolución de ejercicios.

EJERCICIOS

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} [(4x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (x/2)) / (\cos x (\sin 3x)^2)] = \lim_{x \rightarrow 0} [(4x (x/2)) / (9x^2 \cos x)] = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} [2x^2 / (9x^2 \cos x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [2 / 9 \cos x] = 2 / 9 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - \cos x) / x^4] = \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 / 2x^4] = \lim_{x \rightarrow 0} [(1/x^2)/2] = + \infty$$

En este tipo de límites (ejercicios 3 y 4), manda el monomio de mayor exponente.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4 + 2x^2 + 5x - 1) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 + 1) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1} [(3x^2 + 2x + 5) / (x^3 + 2x^2 + 7x - 5)] = 10 / 5 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2} [(x^3 + 3x^2 - 9x - 2) / (x^3 - x - 6)] = (\text{Indeterminación } 0 / 0)$

Observando esto, podemos decir que $(x - 2)$ es un factor de ambos polinomios, ya que, al sustituir la x en ambos casos por 2, nos da 0 como resultado así que podemos operar de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [((x - 2)(x^2 + 5x + 1)) / ((x - 2)(x^2 + 2x + 3))] = 15 / 11$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} [(-3x^3 + 5x^2 - 2x + 1) / (x^2 + x + 1)] = +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(4x^3 + 2x + 1) / (-3x^3 + 2x^2 + x)] = [(4 + (2/x^2) + (1/x^3)) / (-3 + (2/x) + (1/x^2))] = -$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(-2x^2 + 7x - 2) / (8x^3 + x - 3)] = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -1} [(1 + 3^x) / (1 + 5^x)]$ tomamos $x = t$; por lo que si $x \rightarrow -1$, $t \rightarrow 15$; $-1 = -1$!

$$! \lim_{x \rightarrow -1} [(1 + 3^x) / (1 + 5^x)] = \lim_{t \rightarrow 15} [(1 + t^5) / (1 + t^3)] = (\text{Indeterminación } 0 / 0) !$$

$$! \lim_{t \rightarrow 15} [((t + 1)(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1)) / ((t + 1)(t^2 - t + 1))] = (1+1+1+1+1) / (1+1+1) = 5/3$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} [(2x - 2) / (3^x(26 + x) - 3)] = (\text{Indeterminación } 0 / 0)$ tomemos $t^3 = (26 + x)$!

si $x \rightarrow 1$ $t \rightarrow ?$

$$t^3 = 26 + x$$

$$t = 3''(26 + x)$$

$$\text{como } x \rightarrow 1 \quad t = 3''27 = 3$$

$$\text{y además } x = t^3 - 26$$

Por lo que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - 2)}{(3''(26 + x) - 3)} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(2(t^3 - 26) - 2)}{(t - 3)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(2t^3 - 54)}{(t - 3)} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(2(t - 3)(t^2 + 3t + 9))}{(t - 3)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 3} 2(t^2 + 3t + 9) = 54$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{(2x + 1)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 2x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} = -2$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{((9x^2 + 1) - 3x)}{((9x^2 + 1) + 3x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{((9x^2 + 1) - 3x)}{((9x^2 + 1) + 3x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[9x^2 + 1 - (3x)^2]}{[9x^2 + 1 + 3x]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(9x^2 + 1 + 3x)} = 0$$

Nota: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) [f(x) - 1]$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 - 1)}{x^3} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-2}] = e^{-2}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\ln \cos x)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\ln (1 - \sin^2 x))}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\frac{1}{2} \ln 1 + (-\sin^2 x))}{x^2} \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\frac{1}{2} - \sin^2 x)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{(x/2)}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{(x/2x^2)}{x^2} \right] = -\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1 + \tan x)}{(1 + \sin x)} \right]^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1 + \tan x)}{(1 + \sin x)} - 1 \right]$; operemos el exponente por otro lado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} \right) \left[\frac{(1 + \tan x)}{(1 + \sin x)} - 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(\tan x - \sin x)}{[(1 + \sin x) \sin x]} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{[(\sin x / \cos x) - \sin x]}{[(1 + \sin x) \sin x]} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{[(1 / \cos x) - 1]}{[1 + \sin x]} \right]; \text{ ya que vamos a dar el valor del límite coloquemos el exponente ya operado en su lugar.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1 + \tan x)}{(1 + \sin x)} \right]^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} \right) \left[\frac{(1 + \tan x)}{(1 + \sin x)} - 1 \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{[(1 / \cos x) - 1]}{[1 + \sin x]} \right] = e^0 = 1$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} [e^{1/x}]$

Veamos si existe límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [e^{1/x}] = +\infty \quad \text{!} \quad e^{1/x} \rightarrow +\infty \quad \text{Como podemos observar, los límites no}$$

coinciden, por lo que podemos decir que no

$\lim_{x \rightarrow 0} [1/x] = -\infty$! $e^{1/x} = -\infty$ existe límite de esta función.

- $\lim_{x \rightarrow 1} [\text{Arc tg } 1/(x-1)]$

Veamos, como en el ejercicio anterior si existe límite:

$$x \rightarrow 1^+ : (x-1) \rightarrow 0^+ : 1/(x-1) \rightarrow +\infty : \lim_{x \rightarrow 1^+} [\text{Arc tg } 1/(x-1)] = \pi/2$$

$$x \rightarrow 1^- : (x-1) \rightarrow 0^- : 1/(x-1) \rightarrow -\infty : \lim_{x \rightarrow 1^-} [\text{Arc tg } 1/(x-1)] = -\pi/2$$

Volvemos a ver que los límites no coinciden, por lo que tampoco existe límite.

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 7x^4) / \ln(1+x)]$

$$f(x) = (x^2 + 7x^4) / \ln(1+x) \quad (x^2 + 7x^4)/x = [x(1 + 7x^2)]/x =$$

$$\text{Si } x < 0 : = -(1+7x^2) : \lim_{x \rightarrow 0^-} [-(1+7x^2)] = -1$$

$$\text{Si } x > 0 : = (1+7x^2) : \lim_{x \rightarrow 0^+} [(1+7x^2)] = 1$$

Los límites vuelven a ser distintos, luego no hay límite.

- $\lim_{x \rightarrow 0} [(1+x) - 1] / (3(1+x) - 1)$; tomemos $x + 1 = t$!

$$x \rightarrow 0$$

$$x + 1 = t$$

$t \rightarrow 1$; luego:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(1+x) - 1] / (3(1+x) - 1) = \lim_{t \rightarrow 1} [(t-1) / (3t-1)] = (\text{Indeterminación } 0/0) !$$

$$! \lim_{t \rightarrow 1} [(t-1) / (3t-1)] = \lim_{t \rightarrow 1} [(t-1)(t+1) / ((t-1)(t+1)) / ((t-1)(t+1))] = (1+1+1) / (1+1) =$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} [(x + e^{2x})^{1/x}] = \lim_{x \rightarrow 0} [1/x (x + e^{2x} - 1)]$; operemos el exponente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1/x (x + e^{2x} - 1)] = \lim_{x \rightarrow 0} [(x + 2x \ln e) / x] = \lim_{x \rightarrow 0} [3x / x] = 3 !$$

$$! \lim_{x \rightarrow 0} [(x + e^{2x})^{1/x}] = e^3$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 (1 - \cos(1/x))] = \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 ((1/x)^2/2)] = \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 / 2x^2] = 1/2$

- **Concepto de continuidad de funciones. Tipos de discontinuidades.**

Función continua en un punto.

Una función es continua en un punto, cuando en los puntos que rodean a este también es continua.

Para que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$! !, donde f es continua en 'a' !

! Dado $\epsilon > 0$: $\exists \delta > 0 / |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$!

Puede ser también: $x \in (a-, a+) \Rightarrow f(x) \in (f(a)-, f(a)+)$

1º debe existir $f(a)$

Se dice que f es continua en $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$! 2º existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

3º $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Si de estos tres, falta alguno aparecerán diversas discontinuidades dependiendo de cual de las tres están ausentes.

Diremos que f es continua a la derecha de $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

Y será continua a la izquierda de $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Función continua en un intervalo cerrado.

- f continua en todo $x \in (a, b)$

"

Se dice que f es continua en $[a, b]$! – continua a la derecha de a

"

- f continua a la izquierda de a

Discontinuidades:

1ª Discontinuidad Evitable: Cuando la función no está definida en el punto ó

" $f(a)$! se puede definir una nueva.

cuando existe el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ "

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

2ª Discontinuidad de 1ª especie ó de salto: Cuando " $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ por no ser iguales los límites laterales o alguno de los dos es infinito.

3ª Discontinuidad de 2ª especie: Cuando no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, por que no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Ejemplos:

$g(x) = x \cdot a$

- $g(x) =$ es una DISCONTINUIDAD EVITABLE

$\lim_{x \rightarrow a} f(x); x = a$

- $h(x) = \sin(1/x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ porque no existe alguno de los límites laterales o los dos.

3.9. Propiedad de las funciones continuas

Sean f, g dos funciones continuas en un punto a , entonces:

1º $(f + g)$ es continua en a

2º $(f \cdot g)$ es continua en a

3º (f/g) es continua en a para $g(a) \neq 0$

4º (f/g) es continua en a si $g(a) = 0$

5º Sea f continua en a y g continua en $f(a)$! $(g \circ f)$ es continua en a , e incluso puede ser que ellas no sean continuas pero su composición si lo sea.

Ejm: $f(x) = \sin x^2$! es una composición de x^2 y $\sin x$.

3.10. Teoremas sobre continuidad

Teorema de mantenimiento de signo:

Si f es continua en a y $f(a) > 0$! " $> 0 / f(x) > 0$ " $x \in (a-, a+)$

$[f(a) < 0$! " $> 0 / f(x) < 0$ " $x \in (a-, a+)$]

$D/. f$ continua en a ! " $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

$a- < x < a+$

$x \in (a-, a+)$

si $f(a) = 0$ y tomamos $\epsilon = f(a) / 2$! $|f(x) - f(a)| < f(a) / 2 \Rightarrow 0 < f(x) < f(a)$

Teorema de Bolzano:

Si tenemos f continua en $[a, b]$ si y las aplicaciones de los extremos del intervalo son de signos opuestos, una positiva y otra negativa, entonces podemos asegurar que en algún instante la función se hará al menos una vez cero.

f continua en $[a, b]$! " $f(a) \cdot f(b) < 0$ " ! al menos un punto $c \in [a, b] / f(c) = 0$

Ejemplos:

Nota:

Pasos para la resolución de ejercicios del tipo que a continuación aparecen:

1º Construir una función $f(x), h(x)$, con la expresión dada.

2º Ver la continuidad de dicha función.

3° Observar un intervalo donde la función sea continua y exista un cambio de signo.

1.- Probar que: $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 1 = 0$

$$1^\circ f(x) = x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 1$$

2° $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

3° Veamos donde existe un cambio de signo

$$f(0) = -1 \quad f(0) < 0$$

$$f(1) = 1 \quad f(1) > 0$$

Sabemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$,

por lo cual también en el intervalo $(0, 1)$ Por el Teorema de Bolzano

En el intervalo antes citado existe un

cambio de signo en las aplicaciones de los extremos

Existe un momento en que la función se hace cero, por lo que aseguramos que el enunciado es cierto.

2.- Probar que existe algún número real de tal forma que $x = \cos x$.

$$1^\circ f(x) = x - \cos x$$

2° $f(x)$ es continua en toda $\mathbb{R}$, ya que x es continua en $\mathbb{R}$.

3° Veamos ahora donde existe un cambio de signo.

$$f(0) = 0 - 1 = -1 \quad f(0) < 0$$

$$f(\pi/2) = (\pi/2) - 0 = \pi/2 \quad f(\pi/2) > 0$$

Sabemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$,

por lo cual también en el intervalo $(0, \pi/2)$ Por el Teorema de Bolzano

En el intervalo antes citado existe un

cambio de signo en las aplicaciones de los extremos

Existe un momento en que la función se hace cero, por lo que aseguramos que el enunciado es cierto.

3.- Probar que todo $n!$ tiene al menos una raíz n -ésima positiva, es decir, " x " $n!$ $=$ " r " $n!$ $=$ x^n

$$x^n - r^n = 0$$

$$1^\circ h(y) = y^n - x^n$$

2º $h(y)$ es continua en I , ya que y puede ser cualquier número real.

3º Veamos ahora en que puntos puede darse el cambio de signo:

$$h(0) = -x f(0) < 0$$

$$h(1+x) = (1+x)n - x f(1+x) > 0$$

Sabemos que f es continua en todo I ,

por lo cual también en el intervalo $(0, 1+x)$ Por el Teorema de Bolzano

En el intervalo antes citado existe un

cambio de signo en las aplicaciones de los extremos

Existe un momento en que la función se hace cero, por lo que aseguramos que el enunciado es cierto.

4.- Sea la función, $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua

Probar que existen $a, b \in [0, 1]$ / $f(a) = a$ / $f(b) = 1 - b$

Caso 1º

$$1^\circ h(x) = f(x) - x$$

2º Es continua en todo el intervalo, pues lo dice el enunciado.

3º Veamos si existe un cambio de signo:

$$h(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \text{ ya que } f(0) \in [0, 1] \text{ que es } \geq 0$$

$$h(1) = f(1) - 1 \text{ diremos que es } \leq 0 \text{ ya que } f(1) \text{ puede tomar valores entre } 0 \text{ y } 1 \text{ y todos estos valores serán } \leq 1$$

Vemos que si existe un momento en la función en que esto se cumple basándonos en el Teorema de Bolzano.

Caso 2º

$$1^\circ m(x) = f(x) - (1 - x)$$

2º $m(x)$ es continua en el intervalo, ya que dice el enunciado que f es continua.

3º Veamos si existe cambio de signo en algún momento:

$$m(0) = f(0) - 1 + 0 \text{ diremos que es } \leq 0 \text{ ya que } f(1) \text{ puede tomar valores entre } 0 \text{ y } 1 \text{ y todos estos valores serán } \leq 1$$

$$m(1) = f(1) - 1 + 1 = f(1) \text{ que es positivo al estar en el intervalo } [0, 1]$$

Vemos que si existe un momento en la función en que esto se cumple basándonos en el Teorema de Bolzano.

Teorema de valores intermedios (Es una aplicación del teorema de Bolzano):

Si tenemos f continua en $[a, b]$ y tenemos un y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$! " al menos un punto 'c' de (a, b) / $f(c) = y_0$.

D/. En $[a, b]$ "c" (a, b) / $f(c) = y_0$! $h(x) = f(x) - y_0$

1º Observemos si está en las condiciones para ser del Teorema de Bolzano.

- $h(x)$ es continua en $[a, b]$, por serlo $f(x)$ y ser y_0 una constante.
- $h(a) = f(a) - y_0$! $f(a) < y_0 < f(b)$! $h(a) < 0$ " $h(b) > 0$
- $h(b) = f(b) - y_0$! $f(b) < y_0 < f(a)$! $h(b) < 0$ " $h(a) > 0$

Vemos que siempre existe un cambio de signo entre los extremos, por lo que por el Teorema de Bolzano, podemos afirmar que "c" (a, b) / $h(c) = 0$! $f(c) = y_0$

Ejemplo: ¿Toma la función $f(x) = (x^3/4) - \sin x + 3$, el valor de 4 en el intervalo $[-2, 2]$?

1º) $y_0 = 4$ f es continua en ! ! f es continua en $[-2, 2]$

2º) Veamos si existe un cambio de signo:

- $f(-2) = -2 - 0 + 3 = 1$

$y_0 = 4$ " $(1, 5)$! "c" $[-2, 2]$ / $f(c) = 4$

- $f(2) = 2 - 0 + 3 = 5$

1er Teorema de acotación:

Si f es continua en 'a' ! f está acotada en (a^-, a^+) , es decir,

" $> 0 / x$ " (a^-, a^+) ! $f(x)$ está acotada.

D/. f continua en a sii dado $\epsilon > 0$ " $\exists \delta > 0$ / $|x - a| < \delta$! $|f(x) - f(a)| < \epsilon$!

Si por ejemplo tomamos un $\epsilon = 12,3$! $|f(x) - f(a)| < 12,3$!

! $f(a) - 12,3 < f(x) < f(a) + 12,3$, donde vemos que f está acotada.

2º Teorema de acotación:

Si f es continua en $[a, b]$! f está acotada en todo el intervalo.

Teorema de Weirstrass (aplicación del teorema anterior):

Si f es continua en $[a, b]$! f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$.

D/. f alcanza su máximo en $[a, b]$

Sea $B = \{f(x) / x \in [a, b]\}$

2º Teorema Axioma de Completitud

Si f es continua en $[a, b]$! f está acotada en todo $[a, b]$! B acotado ! " $\sup(B) = y_0$

Supongamos que $x_0 \in [a, b] / f(x_0) = y_0$, es decir, $f(x) \rightarrow y_0$ $x \rightarrow [a, b]$

Tomemos un $g(x) = 1/(f(x) - y_0)$, con $x \in [a, b]$ y g continua en el intervalo ! g al ser supremo, puede tomar cualquier valor tan grande como nos imaginemos, entonces de esto podemos deducir que no está acotada, pero como $g \in [a, b]$, según el 2º teorema g debe estar acotada, por lo que podemos concluir una contradicción y que:

$$x_0 \in [a, b] / f(x_0) = y_0$$

Teorema en consecuencia del T. de Weirstrass:

Si f es continua en $[a, b]$! $f([a, b]) = [m, M]$ acotado y cerrado

Siendo: $M = \max(f)$ en $[a, b]$

$m = \min(f)$ en $[a, b]$

D/.

$$\bullet f([a, b]) \subset [m, M]$$

$$! f([a, b]) = [m, M]$$

$$\bullet [m, M] \subset f([a, b])$$

$$a) x \in [a, b] ! f(x) \in f([a, b])$$

f es continua en $[a, b]$! f alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$!

$$\bullet x_1 \in [a, b] / M = f(x_1)$$

$$\bullet x_0 \in [a, b] / m = f(x_0)$$

$$m \in f(x) \subset M \in f(x) \subset [m, M] ! f([a, b]) \subset [m, M]$$

T.V.I.

$$b) y \in [m, M] ! y_0 \in [f(x_0), f(x_1)] ! \exists c \in [x_0, x_1] \subset [a, b] / f(c) = y_0 !$$

$$! f(c) = y_0 \in f([a, b]) !$$

$$! [m, M] \subset f([a, b])$$

Por lo que concluimos que:

$$[m, M] = f([a, b])$$

TEMA 4: Funciones derivables. Teorema de Taylor.

• Concepto de derivada. Interpretaciones.

Definición: Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es derivable en un punto a si existe el $\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] / h = f'(a)$.

$$\text{Si } (a + h) = x \text{ ! } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] / (x - a)$$

$$h = (x - a)$$

Una función derivable, no tiene porque estar definida.

Derivadas laterales:

- Existe f derivable a la derecha de 'a' ! " $\lim_{h \rightarrow 0^+} [f(a + h) - f(a)] / h = f'(a)$
- Existe f derivable a la izquierda 'a' ! " $\lim_{h \rightarrow 0^-} [f(a + h) - f(a)] / h = f'(a)$

$$f'(a)$$

Diremos que f es derivable si " $f'(a) = f'(a)$

$$f'(a)$$

Ejemplos: 1) Probar que $f(x) = n^x$ está definida en !.

$$a \text{ ! } \lim_{h \rightarrow 0} [n^{(a+h)} - n^a] / h = \lim_{h \rightarrow 0} [h / (n^{(a+h)} - 1) + n^{(a+h)}] / h = 1 / [n^{(a-1)}]$$

$$f(x) = n^x \text{ ! } f'(x) = 1 / [n^{(x-1)}] \text{ "x" } 0$$

2) ¿Cuál es la función derivada de $f(x) = bx$?

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [b(x+h) - bx] / h = \lim_{h \rightarrow 0} [bx + bh - bx] / h = \lim_{h \rightarrow 0} [bx(bh - 1)] / h =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [bx h \ln b] / h = bx \ln b$$

$$f(x) = bx \text{ ! } f'(x) = bx \ln b$$

4.2. Relación de la continuidad.

Sea f, si f es derivable en 'a' ! f es continua en 'a'

D/. Si f es derivable ! " $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] / (x - a)$ ¿ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$?

$$\text{Expresamos } f(x) = [[f(x) - f(a)] / (x - a)] (x - a) + f(a)$$

$$x \rightarrow a \text{ ! } x \rightarrow a \text{ ! } x \rightarrow a$$

$$f(a) \text{ ! } f(a) \text{ ! } f(a)$$

Podemos afirmar que f es continua.

Como ejemplo de que ! no se cumple, utilizaremos $f(x) = |x|$

$$\text{¿" } f'(0) \text{ ?}$$

$$(h - 0) / h = 1 = f'(0)$$

$$h > 0$$

$$f'(0) = [f(0+h) - f(0)] / h = [f(h) - f(0)] / h$$

$$h < 0$$

$$(-h - 0)/h = -1 = f'(0)$$

- Hallar la derivada de $f(x) = |x|^5$

Veamos primero si es continua $(h^5 - 0)/h = h^4 \rightarrow 0 = 0$

$$h > 0$$

$$f'(0) = [f(0+h) - f(0)] / h = [f(h) - f(0)] / h \neq f'(0) = 0$$

$$h < 0$$

$$((-h)^5 - 0)/h = (-h)^4 \rightarrow 0 = 0$$

$$5x^4 \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \quad x = 0$$

$$-5x^4 \quad x < 0$$

- Hallar la derivada de $f(x) = |x - 1|^3$

$$(x - 1)^3 \text{ con } (x - 1) > 0 \quad (x - 1)^3 \text{ si } x > 1$$

$$f(x) = |x - 1|^3, \text{ que puede tomar los valores } 0 \text{ con } (x - 1) = 0 = 0 \text{ si } x = 1$$

$$-(x - 1)^3 \text{ con } (x - 1) < 0 \quad -(x - 1)^3 \text{ si } x < 1$$

Debido a lo anterior, la derivada puede tomar tres valores distintos, dependiendo de la x , luego:

$$3(x - 1)^2 \quad x > 1$$

$$f'(x) = 0 \quad x = 1 \text{ pero, ¿existe derivada en este punto?}$$

$$-3(x - 1)^2 \quad x < 1$$

$$h > 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} [(1 + h - 1)^3 - 0] / h = \lim_{h \rightarrow 0} h^3 / h = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(1+h) - f(1)] / h =$$

$$h < 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} [-(1 + h - 1)^3 - 0] / h = \lim_{h \rightarrow 0} -h^3 / h = \lim_{h \rightarrow 0} -h^2 = 0$$

Vemos que si existe, y que es 0.

4.3 Algebra de derivadas. Derivada de la función inversa.

Sean $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$!!!

- Si f, g son derivables en $a \in I$! $(f + g)$ derivable en a " $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- Si f, g son derivables en $a \in I$! $(f \cdot g)$ derivable en a " $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$
- Si g es derivable en $a \in I$ " $g(a) \neq 0$! $1/g$ derivable en a " $(1/g)'(a) = -g'(a)/[g(a)]^2$

Ejemplos:

$$(1/4x)' = (-4x \ln 4)/42x$$

$$(1/\operatorname{cosec} x)' = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = (1/\operatorname{sen} x)' = (-\cos x/\operatorname{sen}^2 x)$$

- Si f es derivable en $a \in I$! $(\cdot f)$ derivable en a " $(\cdot f)'(a) = \cdot f'(a)$
- Si f, g son derivables en $a \in I$ " $g(a) \neq 0$! (f/g) derivable en a "

$$(f/g)'(a) = [f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)] / g^2(a)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (tg x)' &= (\operatorname{sen} x / \cos x)' = [\cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x] / \cos^2 x = [\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x] / \cos^2 x = \\ &= 1/\cos^2 x = \underline{\sec^2 x} \end{aligned}$$

- Regla de la cadena (composición de funciones)

$x \in f(x) \in g(gf)(x)$ Si f es derivable en $a \in I$

!

fg y g es derivable en $f(a)$

! (fg) derivable en a " $(fg)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Ejemplos:

$$x \in x^2 \in tg x^2$$

$$(tg x^2)' = 1 / \cos^2(x^2) \cdot 2x = 2x / \cos^2(x^2)$$

$$x \in 1/x \in \operatorname{sen}(1/x)$$

$$[\operatorname{sen}(1/x)]' = \cos(1/x) \cdot (-1/x^2) = (-1/x^2) \cdot \cos(1/x)$$

- Derivada de la función inversa.

Si f es derivable en $a \in I$, con f inyectiva y continua, y $f'(a) \neq 0$! $(f^{-1})(f(a)) = 1 / f'(a)$

$D/$.

f es inyectiva y derivable en a con $f'(a) \neq 0$

$$! (f^{-1})'(b) = \lim_{k \rightarrow 0} [f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)]/k =$$

$f^{-1}(b)$ también es derivable

$$k = f(a+h) - f(a)$$

$$k \neq 0 \quad h \neq 0$$

$$b+k = f(a) + f(a+h) - f(a) = f(a+h)$$

$$= [(f^{-1}(f(a+h)) - f^{-1}(f(a))) / [f(a+h) - f(a)]] = [a + h - a] / [f(a+h) - f(a)] =$$

$$= h / [f(a+h) - f(a)]$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} ([f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)] / k) = \lim_{h \rightarrow 0} (h / [f(a+h) - f(a)]) = 1 / f'(a)$$

Ejemplos:

1)

$$x \exp b \quad b^x(y) \log b \quad x$$

$$(\log b)'(y) = 1 / [f'(f^{-1}(y))]$$

$$(\log b)'(x) = 1 / [b^x \cdot \ln b]$$

2)

$$x \cos \cos x \arccos x \quad x$$

$$(\arccos x)' = 1 / [-\sin(\arccos x)] = -1 / \sqrt{1 - x^2}$$

$$3) (\arctg x)' = 1 / [tg'(\arctg x) = \cos^2(\arctg x)] = 1 / (1 + x^2)$$

Derivación logarítmica.

Ejemplos:

$$f(x) = x^x$$

$$\ln f(x) = x \ln x \quad (x \ln x)' = 1 + \ln x$$

$$(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$$

$$[\ln f(x)]' = f'(x) / f(x) = 1 + \ln x$$

$$f_1(x) = \ln x \quad f_1'(x) = 1/x$$

$$f_2(x) = \ln x^2 \quad f_2'(x) = 2/x$$

$$[\ln f_3(x)]' = f_3'(x) / f_3(x)$$

$$f_4(x) = x^x \quad x^{1/x} \quad [\ln f_4(x)]' = [(1/x) \ln x]' = (1/x^2) \ln x + (1/x^2) = 1/x^2 - (1/x^2) \ln x =$$

$$= (1/x^2)(1 - \ln x)$$

!

$$! [\ln f_4(x)]' = f_4'(x) / f_4(x) = (x''x)' / x''x = (1/x^2)(1 - \ln x)$$

$$! (x''x)' = (1/x^2)(1 - \ln x) \cdot x''x$$

4.4. Extremos relativos.

Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, esta poseerá un máximo (mínimo) absoluto en A si $c \in A$ /

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in A$$

$$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

A tendrá máximo y/o mínimo relativos si:

- Si $c \in A$ / $f(c) \geq f(x)$ a un intervalo que contenga a c (para el máximo relativo)
- Si $c \in A$ / $f(c) \leq f(x)$ a un intervalo que contenga a c (para el mínimo relativo)

Se les llama a estos también, Extremos de una función.

Condición necesaria de extremos:

Si f tiene un extremo en c (máximo ó mínimo local) y f es derivable en c ! $f'(c) = 0$

Pero veamos algunos contra ejemplos de que ! no se cumple:

Aquí vemos que $f(x) = 0$, pero también podemos observar que no posee ni máximo ni mínimo.

Aquí aparece un máximo, pero $f(x)$ no es derivable.

D/. Sea $f(c) = \text{máx. de } f$! $f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in (c-, c+)$! $f'(c)$

Tomemos ahora un $h \in (c-, c+)$; para lo cual $|h| < \delta$, y de lo que podemos sacar que $f(c+h) \geq f(c)$.

$$f'(c) \geq 0$$

! Como $f'(c) = f'(c) = f'(c) = 0$, tienen que ser 0 para que sean iguales.

$$f'(c) \leq 0$$

Ejemplo:

$g(x) = x^3 - x$, en el intervalo $[-1, 2]$

g es continua en ! ! g es continua en $[-1, 2]$ y además alcanza sus máximo y mínimo absolutos en $[-1, 2]$

¿Cuáles serán los posibles puntos donde se encuentren el máximo y mínimo?, estos serán:

- $x = -1$

- $x = 2$
- $x \in [-1, 2] / g'(x)$, estos puntos no existen, ya que g es derivable en $\mathbb{R}$
- $x \in (-1, 2) / g'(x) = 0$

Por lo cual veamos donde se hace 0 $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 1 ; 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1/3} \in [-1, 2]$$

Así que el máximo y el mínimo se podrán encontrar en cuatro puntos, pues probemos con los cuatro:

- $g(-1) = -1 + 1 = 0$
- $g(-\sqrt{1/3}) = (-1/\sqrt{3})^3 - (-1/\sqrt{3}) = (-1/\sqrt{3}^3) + (1/\sqrt{3}) = (1/\sqrt{3})(1 - (1/3))$
- $g(\sqrt{1/3}) = (1/\sqrt{3})^3 - (1/\sqrt{3}) = (1/\sqrt{3}^3) - (1/\sqrt{3}) = (1/\sqrt{3})((1/3) - 1)$
- $g(2) = 6$

Ya podemos decir que:

- Máximo = $g(2) = 6$
- Mínimo = $g(\sqrt{1/3}) = (1/\sqrt{3})((1/3) - 1)$

4.5. Teorema de Rolle.

Sea f continua en $[a, b]$

f derivable en $(a, b) \Rightarrow$ al menos un $c \in (a, b) / f'(c) = 0$

$$f(a) = f(b)$$

D/. f continua en $[a, b]$ entonces tiene máximo y mínimo en $[a, b]$; supongamos que el máximo es un punto intermedio, sabemos también que $(\text{máximo})' = 0$, por lo que así queda probado y si el máximo y el mínimo están en a , al ser $f(a) = f(b)$, aseguramos que la función es constante y que su derivada es 0 en todo el intervalo.

Ejemplos:

- En qué tipos de intervalos podemos aplicar el Teorema de Rolle a:

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ en } [a, b]$$

f es continua en $\mathbb{R}$, por lo que también lo es en $[a, b]$

f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f(a) = f(b)$$

Podemos asegurar, que el teorema se podría aplicar en intervalos simétricos para que se cumpliera la 3ª condición, pero este tipo de intervalos contienen al 0 donde la función no es derivable, por lo que concluimos que el teorema no se puede aplicar a esta función.

- Sea $e^x = 1 + x$, probar que sólo tiene una solución real, y que esta es 0.

$$e^x = 1 + x$$

$$e^x - (1 + x) = 0$$

$$e^x - 1 - x = 0$$

$$f(x) = e^x - 1 - x$$

Supongamos que posee más soluciones, ya que sabemos por el enunciado que el 0 es una de ellas.

$$x_1 \neq 0 / f(x_1) = 0$$

f continua en $!!$ f continua en $[0, x_1]$

f derivable en $!!$ f derivable en $(0, x_1)$ T. Rolle " c " $(0, x_1) / f'(c) = 0$

$$f(0) = f(x_1) = 0$$

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \iff x = 0 \notin (0, x_1) \iff \text{"c"} \notin (0, x_1) / f'(c) = 0$, esto nos contradice al teorema, por lo que la suposición ha sido falsa y sólo existe una solución que es el 0.

- Sea la ecuación $2^{-x} = x$, probar que sólo tiene una solución real.

Veamos que al menos posee 1 solución real:

$$2^{-x} = x$$

$$f(x) = 2^{-x} - x$$

- Vemos que f es continua en $!$
- Encontramos ahora un intervalo con cambio de signo:

$$f(0) = 1 > 0$$

T. Bolzano " $\text{al menos una solución de } f(x) = 0$ "

$$f(1) = -\frac{1}{2} < 0$$

- Para probar que sólo tiene una solución, supongamos que posee dos:

$$f(x_1) = 0 = f(x_2)$$

f continua en $!!$ f continua en $[x_1, x_2]$ T. Rolle " c " $(x_1, x_2) / f'(c) = 0$

f derivable en $!!$ f derivable en $[x_1, x_2]$

$f'(x) = -2^{-x} \ln 2 - 1 \neq 0$, nunca se hará 0, de aquí nos surge una contradicción al teorema de Rolle, por lo que concluimos que sólo existe una solución.

4.6. Ampliación del teorema de Rolle, Teorema del Valor Medio de Lagrange.

f continua en $[a, b]$

$!$ " $\text{al menos un } c \in (a, b) / f'(c) = [f(b) - f(a)] / (b - a)$ "

f derivable en (a, b)

pendiente de la recta:

$[(a, f(a)), (b, f(b))]$

Lo que el gráfico anterior nos está diciendo, es que existe un punto en que la tangente de ese punto es paralela a la pendiente de la recta que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

$$D/. g(x) = f(x) - [(f(b) - f(a)) / (b - a)](x - a)$$

g es continua en $[a, b]$

g es derivable en (a, b) T. Rolle

$$g(a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - [(f(b) - f(a)) \cdot (b - a)] / (b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

$$\exists c \in (a, b) / g'(c) = 0$$

$$g'(c) = f'(c) - [(f(b) - f(a)) / (b - a)] = 0 \Rightarrow f'(c) = [f(b) - f(a)] / (b - a)$$

EJERCICIOS

Sea $f(x) = \ln x$, comprobar que se puede aplicar el Teorema del Valor Medio en $[1, e]$ y calcular un c que lo ratifique.

f continua en $[1, e]$

$$TVM \exists c \in (1, e) / f'(c) = [f(b) - f(a)] / (b - a)$$

f derivable en $(1, e)$

$$1/c = (1 - 0) / (e - 1)$$

$$c = e - 1$$

Estudiar si se puede aplicar el Teorema del Valor Medio a:

$$(3 - x^2) / 2x \text{ en } [1, 2]$$

$$f(x) = \ln x \text{ en } [0, 2]$$

$$1/x \text{ en } x > 1$$

1º Estudiaremos la continuidad de $f(x)$ en $[a, b]$

$$(3 - x^2) / 2x \text{ en } [1, 2] \text{ es continua}$$

$$1/x \text{ en } x > 1 \text{ es continua}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$! hay continuidad en $[0, 2]$

hay continuidad

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

2º Veamos ahora si existe derivabilidad en (a, b)

$(3 - x^2) / 2$ es derivable

$1/x$ es derivable

$h > 0 \quad [(1/(1+h)) - 1] / h = [1 - 1 - h] / [h(1+h)] \xrightarrow{h \rightarrow 0} -1$

$f'(x) = [f(1+h) - f(1)] / h$

$h < 0 \quad [(3 - (1+h)^2)/2 - 1] / h = [3 - 1 - h^2 - 2h - 2] / 2h = (-h^2 - 2h) / 2h \xrightarrow{h \rightarrow 0} -1$

También es derivable en el 1:

$-x$ es derivable

$f'(x) = -1$

$1/x^2$ es derivable

f continua en $[0, 2]$

$f'(c) = [f(2) - f(0)] / 2 - 0 = [1/2 - 3/2] / 2 = -1/2$

f derivable en $(0, 2)$

$c = 1/2 \in (0, 2)$

$-1/c^2 = -1/(1/2)^2 = -4$! Sabiendo que $-2 \in (0, 2)$

$1/2$

$c =$

$+2$

A las 16.00 h. Un coche pasa por el kilómetro 400 de la A-7 a 70 km./h, diez minutos después, pasa a 80 km./h por el kilómetro 425, le para la policía y le multa por exceso de velocidad, ¿tenía razón la policía?

$v(t) = e'(t)$

$e'(t) = [e(4 + 1/6) - e(4)] / [4 + 1/6 - 4] =$

$= [425 - 400] / (1/6) = 6 \times 25 = 150 \text{ km./h}$

La policía tenía razón.

Consecuencias del Teorema de Lagrange:

- $f'(x) = 0 \forall x \in I \Rightarrow f(x) = \text{cte. en todo } I$

D/. Sean a y b cualesquiera de I .

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(a) = f(b) \forall a, b \in I \Rightarrow f \text{ es cte.}$$

- Condición suficiente de crecimiento (con la primera derivada):
- Si $f'(x) > 0 \forall x \in I \Rightarrow f$ es creciente en I .
- Si $f'(x) < 0 \forall x \in I \Rightarrow f$ es decreciente en I .

D/. Sean a y b del intervalo I , con $a < b$. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow$ creciente
- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$, ya que $b > a \Rightarrow$ decreciente
- Condición suficiente de extremos (con la segunda derivada):

a) Si $f''(c) > 0$ en c hay un mínimo de f .

$$f'(c) = 0$$

b) Si $f''(c) < 0$ en c hay un máximo de f .

$$D/. f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)h}{h}$$

$h > 0 \Rightarrow f'(c+h) > 0 \Rightarrow$ a la derecha de c es creciente

$$a) f'(c) > 0 \Rightarrow f'(c+h)/h > 0$$

$h < 0 \Rightarrow f'(c+h) < 0 \Rightarrow$ a la izquierda de c es decreciente

En $x = c$ existe un mínimo.

c

$h > 0 \Rightarrow f'(c+h) < 0 \Rightarrow$ a la derecha de c es decreciente

$$b) f'(c) < 0 \Rightarrow f'(c+h)/h < 0$$

$h < 0 \Rightarrow f'(c+h) > 0 \Rightarrow$ a la izquierda de c es creciente

En $x = c$ existe un máximo.

c

EJERCICIOS

- Calcular el crecimiento, decrecimiento y extremos de $f(x) = 3x^2 - x^3$

$f(x) = 3x^2 - x^3$ está definida en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = (2x - 3x^2) / (3x^2 - x^3)^2; \text{ de aquí vemos que } f'(x) \text{ en }] - \{0, 1\}$$

$$f'(x) = 0 \text{ ! } x = 2/3$$

$f'(x) > 0$ si $2x - 3x^2 > 0 = x(2 - 3x) > 0$; esto ocurrirá si $x > 0$ y $(2 - 3x) > 0$, o bien si $x < 0$ y $(2 - 3x) < 0$, sabemos despejando que $x > 2/3$ y que por otro lado, $x < 2/3$! esto ocurrirá ya que $x(2 - 3x) > 0$ si $x > 0$! f es creciente en $(0, 2/3)$

$x > 0$ " $x < 2/3$ decreciente en $(2/3, 1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) < 0 \text{ ! } x(2 - 3x) < 0$$

$x < 0$ " $x > 2/3$ decreciente en $(-\infty, 0)$

Por lo que podemos concluir, que existe un mínimo, que además es igual a 0, en $f(0)$, por haber un decrecimiento a la izquierda y un crecimiento a la derecha; que en $f(2/3)$, existe un máximo = $3^{1/3}[(4/9) - (8/27)]$, y que en $f(1)$, no existe ni máximo ni mínimo.

- ¿Para qué valor de la función $f(x) = a \sin x + 1/3 \sin 3x$, presenta un extremo en $x = \pi/3$, determinar la naturaleza de este extremo?

Lo primero que haremos será determina el valor de 'a':

$$f(x) = a \sin x + 1/3 \sin 3x$$

$$f'(x) = a \cos x + \cos 3x$$

Sabemos que $f'(\pi/3) = 0$, luego:

$$a \cos x + \cos 3x = 0$$

$$a = -\cos \pi/3 / \cos \pi/3 = 1 / (1/2) = 2$$

$$f''(x) = -2 \sin x - 3 \sin 3x$$

$$f''(\pi/3) = -2 \sin \pi/3 - 3 \sin \pi = -2... < 0$$

En $x = \pi/3$ existe un máximo = $2 \sin \pi/3 = \sqrt{3}$

4.7. Teorema del Valor Medio de Cauchy.

Sean f y g continuas en $[a, b]$

Sean f y g derivables en (a, b) ! " c " (a, b) / $[f'(c)/g'(c)] = [f(b) - f(a)] / [g(b) - g(a)]$

Con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(b) \neq 0$ en (a, b)

Cuando $g(x) = x$, entonces se tendrá el teorema de Lagrange.

Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

! Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) / g(x) =$

si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g'(x) = L$!

Esta regla la utilizaremos normalmente, cuando:

- $x \rightarrow a$ y tengamos una indeterminación de la forma $0/0$
- $x \rightarrow \pm\infty$ y la indeterminación sea de ∞/∞

Ejemplo:

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x - 1/\arctg x$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x - 1/\arctg x = \infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x - 1/\arctg x = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\arctg x - x] / (x \arctg x) = 0/0$

$f(x) = \arctg x - x$; $f'(x) = (1/(1+x^2)) - 1 = -x^2/(1+x^2)$

$g(x) = x \arctg x$; $g'(x) = \arctg x + (x/(1+x^2)) = [(1+x^2) \arctg x + x] / (1+x^2)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) / g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-x^2/(1+x^2)] / [(1+x^2) \arctg x + x] / (1+x^2) =$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 / [(1+x^2) \arctg x + x] = 0/0$

$F(x) = -x^2$; $F'(x) = -2x \rightarrow 0$

$G(x) = [(1+x^2) \arctg x + x]$; $G'(x) = 2x \arctg x + (1/(1+x^2)) + (1/(1+x^2))x^2 + 1$

! $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x - 1/\arctg x = 0$

4.8. Derivadas sucesivas.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in I$ $f'(a)$

$f''(a)$

$f'''(a)$

$f^{(4)}(a)$

$f^{(n)}(a)$

!

!

$f^{(n)}(a)$

$f^{(n)}(a) = [f^{(n-1)}(a)]'$

Ejemplos:

$$1. f_1(x) = e^x$$

$$f_1'(x) = e^x$$

$$f_1''(x) = e^x$$

$$f_1'''(x) = e^x \quad (f_1^{(m)}(x) = e^x)$$

$$f_1^{(n)}(x) = e^x$$

D/. del ejemplo 1, por el principio de inducción.

$$\bullet P(1) : f_1'(x) = e^x$$

$$f_1'(x) = e^x \text{ Cumple.}$$

$$\bullet \text{H.I. } P(r) : f_1^{(r)}(x) = e^x$$

$$\bullet P(r+1) : f_1^{(r+1)}(x) = e^x?$$

$$f_1^{(r+1)}(x) = [f_1^{(r)}]' = (e^x)' = e^x = f_1^{(r+1)}(x) \text{ Cumple.}$$

Es cierto $\forall n$

$$2. f_2(x) = (x - a)^m$$

$$f_2'(x) = m(x - a)^{m-1}$$

$$f_2''(x) = m(m-1)(x - a)^{m-2}$$

$$f_2'''(x) = m(m-1)(m-2)(x - a)^{m-3}$$

$$\text{Si } n = m : f_2^{(n)}(x) = m!(x - a)^0 = m!$$

$$\text{Si } n < m : f_2^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(x - a)^{m-n}$$

$$\text{Si } n > m : f_2^{(n)}(x) = 0$$

$$3. f_3(x) = (x - a)^{-1/3}$$

$$f_3'(x) = (-1/3)(x - a)^{-4/3}$$

$$f_3''(x) = (-1/3)(-4/3)(x - a)^{-7/3}$$

$$f_3^{(n)}(x) = (-1/3)(-4/3)\dots(-(n-1)/3)(x - a)^{-1/3-n}$$

$$4. f_4(x) = (x - 1)^{1/3}$$

$$f_4^{(n)}(x) = (1/3)(-2/3)(-5/3)\dots(1/3 - (n-1))(x - 1)^{1/3-n}$$

$$5. f_5(x) = 1/(x - a)$$

$$f_5'(x) = (-1)/(x - a)^2$$

$$f_5''(x) = [2(-1)2(x - a)] / (x - a)^4 = [2(-1)2]/(x - a)^3$$

$$f_5'''(x) = [2(-1)2 \cdot 3(-1)(x - a)^2] / (x - a)^6 = [2 \cdot 3(-1)^3]/(x - a)^4$$

$$f_5^{IV}(x) = [4(-1)^3(-1)3^2(x - a)^3]/(x - a)^8 = [2 \cdot 3 \cdot 4(-1)^4]/(x - a)^5$$

$$f_5^n(x) = [n! (-1)^n]/(x - a)^{n+1}$$

$$6. f_6(x) = \ln(x - a)$$

$$f_6'(x) = 1/(x - a)$$

$$f_6''(x) = f_5'(x) \cdot f_6'(x) = [(-1)^{n-1}(n-1)!]/(x - a)^n$$

Fórmula de Leibnitz:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

$$7. h_7(x) = x^4 e^{2x}$$

$$f = x^4$$

$$g = e^{2x}$$

$$h_7^{(n)}(x) = (n)_0 f_0(x) g_n(x) + (n)_1 f_1'(x) g_{n-1}(x) + (n)_2 f_2''(x) g_{n-2}(x) + \dots$$

$$h_7^{(n)}(x) = x^4 2^n e^{2x} + 4x^3 2^{n-1} e^{2x} + \frac{[n(n-1)]}{2} 12x^2 2^{n-2} e^{2x} + \frac{[n(n-1)(n-2)]}{3!} 24x 2^{n-3} e^{2x} + \frac{[n(n-1)(n-2)(n-3)]}{4!} 24 \cdot 2^{n-4} e^{2x}$$

$$8. f_8(x) = \sin x = \sin(x + 0)$$

$$f_8'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$$

$$f_8''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$f_8'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2)$$

$$f_8^{IV}(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$$

$$f_8^n(x) = \sin(x + n\pi/2)$$

Proposiciones de las derivadas sucesivas:

Primera proposición: Para esta proposición, necesitamos una función derivable en 'n' en un punto.

Si $f_n(a)$ (continua y derivable) "!" Existe un único polinomio de grado "n", verificando las siguientes condiciones:

$$P_n(a) = f(a)$$

$$P_n'(a) = f'(a)$$

$$\text{De la forma } P_n(a) = f(a)$$

$$P_{nn}(a) = f_n(a)$$

Basándonos en lo anteriormente expuesto, podemos adentrarnos algo más viendo la forma del Teorema de Taylor para f en a :

$$T_n(f, a) \text{ " } P_n(x) = f(a) + [f'(a)/1!](x - a) + [f''(a)/2!](x - a)^2 + \dots + [f_n(a)/n!](x - a)^n$$

Supongamos que $P_n(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \dots + C_n(x - a)^n$, verificando las condiciones $(n + 1)$, comprobar que es el polinomio de Taylor.

$$P_n(a) = f(a) = C_0$$

$$P_n'(a) = f'(a) \text{ ! } P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x - a) + 3C_3(x - a)^2 + \dots + nC_n(x - a)^{n-1}$$

$$P_n''(a) = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3(x - a) + \dots + n(n - 1)C_n(x - a)^{n-2}$$

$$P_n''(a) = 2C_2 = f''(a)$$

$$P_n'''(a) = f'''(a) = 3!C_3$$

$$P_{nn}(x) = n!C_n \text{ ! } P_{nn}(a) = f_n(a) = n!C_n$$

De donde podemos sacar que:

$$C_1 = f'(a); C_2 = f''(a)/1!; C_3 = f'''(a)/2!; \dots; C_n = f_{n-1}(a)/(n-1)!$$

Segunda proposición: Relación del polinomio con la función, teniendo las mismas condiciones que en la propiedad anterior: $f_n(a)$ y teniendo $P_n(x) = T_n(f, a)$!

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - P_n(x)] / (x - a)^n = 0$ sabiendo que $f(a) - P_n(x)$ es un infinitésimo y $(x - a)^n$ también es un infinitésimo.

La diferencia entre la función y el polinomio es el grado n , $f(x) - P_n(x)$ se acerca a 0 de la misma manera que $(x - a)^n$.

El error o resto del polinomio asociado a la función es $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Con lo anterior y el polinomio de Taylor, tenemos que una función se puede descomponer en otra función más un error, sabiendo que el error tiende a 0 si $f_n(a) \text{ ! } f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ donde $\{E_n(x) / (x - a)^n\} \text{ ! } x \text{ ! } a \text{ ! } 0$, a esto se le llama **Fórmula de Taylor con resto ó extensión del error**.

4.9. Teorema de Taylor.

Teniendo f_n continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) para cada $x \in (a, b)$.

$$f(x) = f(a) + (f'(a)/1!)(x - a) + (f''(a)/2!)(x - a)^2 + \dots + (f_n(a)/n!)(x - a)^n + E_n$$

$$E_n = \text{Error} = (f_{n+1}(c) / n!p)(x - a)^p(x - c)^{n-p+1} \text{ (Resto de Schlömilch)}$$

Si sustituimos $n=0$ y $p=1$, entonces tenemos el Teorema del Valor Medio de Lagrange.

Además de en resto de Schlömilch, podemos utilizar otros, como pueden ser:

- Resto de Cauchy ($p=1$) ! $En(x) = (f^{n+1}(c) / n!)(x - a)(x - c)^n$
- Resto de Lagrange ($p= n+1$) ! $En(x) = (f^{n+1}(c) / (n + 1)!)(x - a)^{n+1}$

$D/. F: [a, x] ! !$

$t ! Tn(f, t)$

$G: t ! (x - t)^p$

$F(t) = f(t) + (f'(t)/1!)(x - t) + (f''(t)/2!)(x - t)^2 + \dots + (f^{(n)}(t)/n!)(x - t)^n$

$F(x) = f(x)$

$f'(t) f''(t) f'''(t) f^{(n+1)}(t) f^{(n)}(t)$

$F'(t) = f'(t) + (x - t) + (-1) + (x - t)^2 + 2(x - t)(-1) + \dots + (x - t)^n + (n - 1)(-1)(x - t)^{n-1}$

$1! 1! 2! 2! n! n!$

$! F'(t) = (f^{n+1}(t) / n!)(x - t)^n$

$F(a) = Tn(f, a)$

$G(t) = (x - t)^p$

$G(x) = 0$

$G(a) = (x - a)^p$

$G'(t) = -p(x - t)^{p-1}$

Si F, G son continuas en $[a, x]$

$!T. C.! "c"(a, x)/[F(x)-F(a)]/[G(x)-G(a)]=F'(c) / G'(c)!$

Si F, G son derivables en (a, x)

$! En(x)/(x - a)^p = [(f^{n+1}(c)/n!)(x - c)^n]/[p(x - c)^{p-1}] ! En(x) = (f^{n+1}(c)/n!p)(x - c)^{n-p+1}(x - a)^p$

Cuando se nos dé el caso de que $a=0$, $Tn(f, 0)$ Taylor de f en el cero, el teorema toma el nombre de Mac-Laurin

EJERCICIOS

1. Calcular el polinomio de Taylor en el cero para $f(x) = 1 / \sqrt{1 + x}$.

$f(x) = 1 / \sqrt{1 + x} = (1 + x)^{-1/2}$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = (-1/2)$$

$$f''(0) = (-1/2)(-1/2 - 1)$$

$$f'''(0) = (-1/2)(-1/2 - 1)(-1/2 - 2)$$

$$f^{(n)}(0) = (-1/2)(-1/2 - 1)(-1/2 - 2) \dots (-1/2 - n + 1)$$

$$f(x) = 1 + [(-1/2)/1!]x + [(-1/2)(-1/2 - 1)/2!]x^2 + \dots + [(-1/2)(-1/2 - 1)(-1/2 - 2) \dots (-1/2 - n + 1)/n!]x^n + E_n(x)$$

$$E_n(x) = \text{Resto de Schlömilch} = [((-1/2)(-1/2 - 1)(-1/2 - 2) \dots (-1/2 - n + 1 + 1))/(n!p)]x^p(x - c)^{n-p+1}$$

En próximos ejercicios, utilizaremos en resto de Lagrange que es más sencillo.

2. Aproximar la $3''(1/3)$ utilizando el T_n , decir el error cometido si nos quedamos en $n=4$ y acotar el mismo.

$$f(x) = 3''(1 + x) \quad f(0) = 1$$

$$x = 0/3 \quad f'(0) = [(1+x)^{1/3}] = 1/3 \quad 3''(1+x)^{-2} = 1/3(1+x)^{-2/3} = 1/3$$

$$a = 0 \quad f''(0) = (-1/3)(1+x)^{-5/3} = -1/3$$

$$\text{Con el Resto de Lagrange } f'''(0) = (5/6)(1+x)^{-8/3} = 5/6$$

$$c''(0, 0/3) \quad f^{(IV)}(0) = (-20/9)(1+x)^{-11/3} = -20/9$$

$$f^{(V)}(0) = (220/27)(1+x)^{-14/3}$$

$$E_4(c) = [f^{(V)}(c)/5!](x - a)^5$$

$$f(0/3) = 1 + (1/3)(0/3) + [(-1/3)(0/3)^2]/2! + [(5/6)(0/3)^3]/3! + [(-20/9)(0/3)^4]/4! + E_4(c)$$

$$E_4(c) = [(220/27)(1 + c)^{-14/3}(0/3)^5] / 5!$$

Acotemos ahora el error, para ello acotaremos:

$$\varnothing(1 + c)(1/3)^{-5} \varnothing M$$

sería de este modo:

$$\varnothing E_4(0/3) \varnothing \llbracket [(1/3)(1/3 - 1)(1/3 - 2)(1/3 - 3)(1/3 - 4)] / 5! \rrbracket (0/3)^5 M$$

luego:

$$\varnothing(1+c)^{-14/3} \varnothing = 1/[(1+c)^{14/3}]$$

$$0 < c < 0,3$$

$$1 < 1 + c < 1/3$$

$$114 < (1 + c)^{14} < 1'314$$

$$1 < (1 + c)^{14/3} < 1'314/3$$

$$1/[1'314/3] < 1/[(1+c)^{14/3}] < 1 \quad \underline{M=1}$$

3. Cálculo del polinomio de Mac-Laurin de grado 3, de $f(x) = \ln(1 - x)$. Utilizarlo para el cálculo del $\ln 0'9$, con $x = 0'1$, acotar el error cometido. A saber que $a = 0$.

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = -3/(1 - x)^4$$

$$f(x) = 0 + [(-\frac{1}{2})/1!]x + [(-\frac{1}{2})/2!]x^2 + [(-1)/3!]x^3 + E_3(x)$$

$$E_3(x) = [(-3/(1 - c)^4)/4!]x^4$$

$$f(0'1) = \ln 0'9 = -\frac{1}{2}(0'1) - \frac{1}{4}(0'1)^2 - \frac{1}{6}(0'1)^3$$

$$0E_3(0'1) \leq M \leq 0[(-3/(1 - c)^4)/4!]x^4 = 0x^4 / [8(1 - c)^4] = 0E_3(x)$$

Tomamos para acotar la expresión de 'c', es decir $1/[1 - c]^4$

$$0 < c < 0'1$$

$$0'9 < 1 - c < 1$$

$$0'94 < (1 - c)^4 < 1$$

$$1 < 1/(1 - c)^4 < 1/0'96 \quad M = 1/0'96$$

4. Cálculo por Mac-Laurin de los 3 primeros términos de e^x , acotar el error por Lagrange. Cuál debe ser el grado del polinomio para que el error $< 10^{-4}$.

$$f(x) = e^x$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = 1 + 1/1!x + 1/2!x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$f(1/3) = 1 + 1/3 + 1/18$$

$$E_2(x) = [f'''(c)/3!]x^3$$

$$E_2(1/3) = (ec/6)(1/27)$$

Sabiendo que $c''(0, 1/3)$, entonces podemos acotarlo de la siguiente manera:

$$ec/162 < e/162$$

Para saber con que grado el error $< 10^{-4}$, deberíamos ir dando valores a n (en la fórmula de $E_n(1/3)$) y cuando lográsemos el error menor a ese valor nos pararíamos.

5. Calcular el polinomio de grado 3 de Mac-Laurin para $f(x) = \ln \left[\frac{(1+x)}{(1-x)} \right]$. Utilizar $x = 0.8$ para aproximar el $\ln 3$, dar el resto si nos quedamos en el grado 3.

$$f(x) \approx f(0) + [f'(0)/1!]x + [f''(0)/2!]x^2 + [f'''(0)/3!]x^3$$

$$f(x) = \ln \left[\frac{(1+x)}{(1-x)} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1+x)}{(1-x)} \right] = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right] \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \right] \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1-x)^3} \quad f'''(0) = 2$$

$$f(x) \approx x + \frac{1}{3}x^3$$

$$\ln 3 \approx x?$$

$$\ln \left[\frac{(1+x)}{(1-x)} \right] = 3$$

$$\frac{(1+x)}{(1-x)} = 9$$

$$1+x = 9 - 9x$$

$$10x = 8$$

$$x = 0.8$$

$$\ln 3 \approx \ln 3 \approx 0.8 + 0.8^3 / 3$$

$$E_3(x) = [f^{(IV)}(c)/4!]x^4 = \left[\left[\frac{-3}{(1+c)^4} + \frac{3}{(1-c)^4} \right] / 4! \right] x^4$$

$$E_3(0.8) = \left[\left[\frac{-3}{(1+c)^4} + \frac{3}{(1-c)^4} \right] / 4! \right] (0.8)^4$$

6. Ordenar en potencias de $x+1$, el polinomio: $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 1$.

$$f(x) = f(a) + [f'(a)/1!](x-a) + [f''(a)/2!](x-a)^2 + \dots + [f^{(n)}(a)/n!](x-a)^n + E_n$$

$$a = -1$$

$$P(x) = P(-1) + [P'(-1)/1!](x+1) + [P''(-1)/2!](x+1)^2 + [P'''(-1)/3!](x+1)^3 + [P^{IV}(-1)/4!](x+1)^4$$

$$P(-1) = 1 - 3 - 2 + 1 = -3$$

$$P'(x) = 4x^3 - 6x + 2 \quad P'(-1) = -4 + 6 + 2 = 4$$

$$P''(x) = 12x^2 - 6 \quad P''(-1) = 12 - 6 = 6$$

$$P'''(x) = 24x \quad P'''(-1) = -24$$

$$P^{IV}(x) = 24 \quad P^{IV}(-1) = 24$$

$$P(x) = -3 + 4x + 4 + 3(x+1)^2 + [-24/3!](x+1)^3 + [24/4!](x+1)^4$$

Cálculo de límites por Taylor.

Probar que $e^x - 1 \sim x \ (x \rightarrow 0)$

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n!$$

$$e^x = 1 + x + E_1(x) \quad [E_1(x)/x] \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$e^x - 1 = x + E_1(x)$$

$$(e^x - 1)/x = 1 + [E_1(x)/x] \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1 \quad \therefore e^x - 1 \sim x$$

Probar que $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2 \ (x \rightarrow 0)$

$$\cos x = 1 + (0/1!)x + (-1/2!)x^2 + E_2(x) \quad [E_2(x)/x^2] \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$\cos x - 1 = -x^2/2 + E_2(x)$$

$$[\cos x - 1/(-x^2/2)] = 1 + [E_2(x)/(-x^2/2)] \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x - 1/(-x^2/2)] = 1 \quad \therefore \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

Ejemplo: Calcular el límite de:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(e^x + e^{-x} - 2)/x^2]$$

Desarrollaremos e^x y e^{-x} por Taylor, hasta llegar al grado del denominador:

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + E_2(x) \quad [E_2(x)/x^2] \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$e^{-x} = 1 - x + (-x)^2/2 + E'_2(x) \quad [E'_2(x)/x^2] \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$[(ex + e^{-x} - 2)/x^2] = [(2 + x^2 + E^2(x) + E'^2(x) - 2) / x^2] = x^2/x^2 + E^2(x)/x^2 + E'^2(x)/x^2 !$$

• 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(ex + e^{-x} - 2)/x^2] = 1$$

4.10. Estudio local de una función.

Condición suficiente de extremos:

Si tenemos $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$!

a.1. Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$! f tiene un mínimo en $x = a$

a.2. Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$! f tiene un máximo en $x = a$

• Si n es impar ! f no tiene ni mínimo, ni máximo

D/. Por la fórmula de Taylor:

$$f^{(n)}(a) f(x) = f(a) + [f'(a)/1!](x - a) + [f''(a)/2!](x - a)^2 + \dots + [f^{(n)}(a)/n!](x - a)^n + E_n /$$

$$/[E_n(x)/(x - a)^n] x! a ! 0$$

Con las condiciones anteriores:

$$f(x) = f(a) + [f^{(n)}(a)/n!](x - a)^n + E_n(x)$$

$$E_n(x) = f(x) - f(a) - [f^{(n)}(a)/n!](x - a)^n$$

$$[E_n(x)/(x - a)^n] = \{ [f(x)/(x - a)^n] - [f(a)/(x - a)^n] - [[f^{(n)}(a)/n!](x - a)^n / (x - a)^n \} x! a ! 0$$

• Si n es par y $(x - a) > 0$

! $f(x) - f(a) > 0$! $f(x) > f(a)$! En $x = a$ hay un mínimo.

Si $f^{(n)}(a) > 0$

• Si n es par y $(x - a) < 0$

! $f(x) - f(a) < 0$! $f(x) < f(a)$! En $x = a$ hay un máximo.

Si $f^{(n)}(a) < 0$

• Si n es impar y $(x - a)^n > 0$ si $x > a$

! no hay ni máximo ni mínimo

! $(x - a)^n < 0$ si $x < a$

Ejemplo: Calcular los extremos relativos de $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$

Como vemos f es continua en $!$ y también es derivable en $!$.

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = x^2(5x^2 - 12x + 3)$$

¿Cuándo se hace $f'(x) = 0$?

$$x = 0$$

$$f'(x) = 0 \quad x = 1$$

$$x = 3/5$$

$$f'(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6x = x(20x^2 - 24x + 6)$$

¿Qué valores toma $f'(x)$, para la x en que $f'(x)$ se hace 0?

$$f'(0) = 0$$

$$f'(1) = 2$$

$$f'(3/5) = 140/53 - (24 \cdot 45)/53 + (18 \cdot 25)/53$$

$f''(x) = 60x^2 - 48x + 6$, esta función nunca se hará 0; por lo que como $n = 3$ impar, $f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos.

Concavidades:

Una función f , será cóncava hacia arriba (U) en un intervalo I , si " a, b " I , la gráfica de f está por debajo del segmento que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

Por otro lado, f será cóncava hacia abajo (") en un intervalo I , si " a, b " I , la gráfica de f está por encima del segmento que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

Cuando $x = a$, haya una cambio de concavidad, diremos que en este ' x ' hay un punto de inflexión.

Condición suficiente de concavidad:

Si $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$!

- Si n es impar ! en $x = a$ hay un punto de inflexión.
- " x " I ; $f^{(n)}(x) > 0$! f es cóncava hacia arriba.
- " x " I ; $f^{(n)}(x) < 0$! f es cóncava hacia abajo.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^3/(1+x)^2$, estudiar todo a esta función.

Veamos donde está definida:

$$\text{Dom.}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Paridad:

$$f(-x) = -x^3/(1-x)^2 = -[x^3/(1-x)^2] \neq f(x) \neq -f(x) \text{ ! ni par, ni impar.}$$

Derivabilidad:

Derivable en todo el dominio de la función.

Crecimientos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [3x^2(1+x)^2 - 2x^3(1+x)]/(1+x)^4 = [(1+x)(3x^2(1+x) - 2x^3)]/(1+x)^4 = \\ &= [(x^3 + 3x^2)(1+x)]/(1+x)^4 = [(1+x)x^2(x+3)]/(1+x)^4 \end{aligned}$$

! f'(x) > 0 ! (1+x)(x+3) > 0 ! x > -1 " x < -3 ! en (-∞, -3) U (-1, +∞) es creciente.

! f'(x) < 0 ! (x+1)(x+3) < 0 ! x < -1 " x > -3 ! en (-3, -1) es decreciente

$$! f'(x) = 0 ! x = 0; x = -3$$

En el x = -3, existe un máximo f(-3) = -27/4

$$f''(x) = 6x/(1+x)^4$$

$$f''(0) = 0 ! f''(x) > 0 ! x > 0$$

! en x = 0 existe un punto de inflexión en (0, 0)

$$! f''(x) < 0 ! x < 0$$

Definición de asíntotas a la gráfica de una función:

Asíntotas oblicuas: una recta $y = mx + n$, es una asíntota oblicua de una función f , si $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)/x$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - mx$$

Si $n = 0$ y $m = 0$! $y = n$, que sería una asíntota horizontal.

Asíntotas verticales: una recta $x = a$ es una asíntota vertical de una función f , si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$

Hecho este inciso, continuemos con el ejercicio:

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1/0 = -\infty ! \text{ en } x = -1, \text{ existe una asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [x^3/(1+x)^2]/x = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [x^3/(1+x)^2] - x = -2$$

$y = mx + n = x - 2$, esta sería la asíntota oblicua de la función.

Esbozo de la gráfica:

TEMA 5: Integral de Riemann.

• Introducción.

Las integrales, fueron utilizadas en un principio para calcular el área de una función con el eje OX en un intervalo (a, b) para funciones que no tienen por qué ser continuas.

Ahora se utilizan para definir: el $\ln y = \int \frac{1}{x} dx$; sabiendo que cualquier función continua se puede poner como una integral de una función, es decir, no sólo se puede utilizar para hallar áreas, sino también volúmenes, trabajo, ...

5.2. Integral de Riemann.

5.2.1. Partición de un intervalo.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada

Hagamos una partición de este intervalo; $P([a, b]) = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ (La partición es coger un conjunto finito de puntos que se encuentren entre a y b que a su vez dividen al intervalo en subintervalos más pequeños).

Si $I = [a, b]$! $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

$|I| =$ amplitud de $[a, b] = b - a$

$|I_k| = x_k - x_{k-1}$

Al conjunto de todas las particiones, lo vamos a denominar:

$\mathcal{P}([a, b]) = \{P \mid \text{particiones de } [a, b]\}$

Si transformamos $[a, b]$ y hacemos otra partición diferente; si esta partición es la anterior pero con algunos puntos más añadidos se dirá entonces que $P' > P$ donde P' es más fina que P , es decir, la amplitud de los subintervalos en los que se divide, es más pequeña.

Ejemplo: $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$P' = \{x_0, x_1, x_2, y, x_3, x_4\}$

También podemos definir de este modo, el hecho de que si f está acotada en $[a, b]$, entonces los subintervalos también lo están, por tanto:

$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}$

$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}$

5.2.2. Sumas inferiores y superiores. Propiedades.

Sabiendo esto, vamos a llamar sumas superiores de una función f en una partición P ($S(f, P)$) = $\sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$ y del mismo modo, llamaremos sumas inferiores de una función f en una partición P a ($s(f, P)$) = $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$

Propiedades de las sumas:

- $s(f, P) \leq S(f, P) \forall P$ en $[a, b]$

La demostración es muy sencilla ya que es simplemente por interpretación geométrica, esto es común y lo que cambia es M_k o m_k .

- $P \leq P'$; si tomamos una partición más fina:
 - $s(f, P) \leq s(f, P')$; las sumas inferiores crecen.
 - $S(f, P) \geq S(f, P')$; las sumas superiores decrecen.

Esto es debido a que si para obtener P' añadimos puntos, si hallamos las sumas inferiores, estas se van agrandando y del mismo modo, las sumas superiores van decreciendo.

Esta es la base de la Integración tomando partes infinitas.

- Si P_1 y P_2 son particiones no comparables, es decir, no tienen los mismos puntos, entonces: $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$

5.2.3. Integrales superior e inferior.

Sea $A = \{s(f, P) / P \text{ en } [a, b]\}$ = conjunto finito $\neq \emptyset$, entonces tomando todas las particiones del intervalo, haciendo las sumas inferiores y sabiendo que están acotadas superiormente; tenemos un conjunto de números, acotado y distinto del vacío, en el que $\sup(A) = \underline{I}$ = Integral inferior de f en $[a, b]$.

Del mismo modo, sea $B = \{S(f, P) / P \text{ en } [a, b]\}$ = conjunto finito $\neq \emptyset$, entonces tomando todas las particiones del intervalo, haciendo las sumas superiores y sabiendo que están acotadas inferiormente; tenemos un conjunto de números, acotado y distinto del vacío, en el que $\inf(B) = \bar{I}$ = Integral superior de f en $[a, b]$.

5.2.4. Integral de una función acotada.

Definición: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f acotada, donde tenemos P , una partición de $[a, b]$ con $m_k; M_k; S(f, P); s(f, P), \underline{I}; \bar{I}$, todo ello definido, diremos que existe la integral de Riemann si:

$$\underline{I} = \bar{I} = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx \quad \text{Integral de Riemann en } [a, b]$$

Ejemplos: Probar que la función constante es integrable:

$$f(x) = c \text{ en } [a, b]$$

$$m_k = c \quad \forall k$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a)$$

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b - a)$$

Luego $\underline{I} = c(b - a); \bar{I} = c(b - a); \underline{I} = \bar{I}$! la función es integrable y vale: $\int_a^b c dx = c(b - a)$

Probar que no es integrable en ningún intervalo $[a, b]$:

$$0 \text{ si } x'' \neq 1 \text{ y } 1 \text{ si } x'' = 1$$

$$f(x) =$$

$$1 \text{ si } x'' = 1$$

$$M_k = \sup \{f(x) / x'' = 1\} = 1$$

$$m_k = \inf \{f(x) / x'' = 1\} = 0$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \Delta x_k = b - a$$

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = 0$$

$$I = \sup \{s(f, P) / P \text{ es una partición de } [a, b]\} = 0$$

$$I = \inf \{S(f, P) / P \text{ es una partición de } [a, b]\} = b - a$$

$I \neq I$! f no es integrable Riemann en $[a, b]$

5.2.5. Caracterizaciones.

Primera caracterización:

f será integrable Riemann en $[a, b]$! Dado un $\epsilon > 0$ $\exists P$ / $|S(f, P) - s(f, P)| < \epsilon$

$\Delta x_k \leq \epsilon / (b-a)$

f es integrable Riemann en $[a, b]$! $I = I = \int_a^b f(x) dx$

$$\epsilon / 2$$

S

$$\sup \{S\}$$

$$\epsilon / 2$$

S

$$\inf \{S\}$$

$$\text{Dado } \epsilon / 2 \exists P' \text{ y } s(f, P') < \inf \{S\} + \epsilon / 2 \text{ y } s(f, P') < \int_a^b f(x) dx + \epsilon / 2$$

$$\exists P'' \text{ y } S(f, P'') > \sup \{S\} - \epsilon / 2 \text{ y } S(f, P'') > \int_a^b f(x) dx - \epsilon / 2$$

$$s(f, P') \leq s(f, P'')$$

$$\text{Tomamos } P = P' \cup P''$$

$$S(f, P'') - S(f, P') =$$

$$S(f, P') - s(f, P') = S(f, p'') - s(f, P'') < ab(f + \epsilon/2) - [ab(f - \epsilon/2)] = \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

$$\epsilon \cdot P' / S(f, P') - s(f, P') < \epsilon$$

$$\therefore \text{Sabemos que } S(f, P') - s(f, P') < \epsilon$$

$$I = \inf\{S\} \leq S(f, P') < s(f, P') + \epsilon \leq \sup\{s\} + \epsilon = \underline{I} + \epsilon$$

ϵ

$$I > \underline{I} + \epsilon$$

ϵ

$$I = \underline{I}$$

$$\therefore \underline{I} = I \text{ } f \text{ es integrable Riemann (int-R)}$$

$$\text{Sabemos que } \underline{I} = I$$

$$0 \text{ si } x=1$$

$$\text{Ejemplo: Estudiar si es integrable } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=1 \\ 1 & \text{si } x \neq 1 \end{cases} \text{ en } [0, 3].$$

$$1 \text{ si } x \neq 1$$

$$\text{Gráfica de la función:}$$

$$\text{Tomemos una } P' = \{1, t_1, \dots, t_{n-1}, 3\} \text{ y } \epsilon > 0$$

$$0 \text{ si } k = i$$

$$M_k = \sup\{f(x) / x \in I_k\} =$$

$$1 \text{ si } k \neq i$$

$$m_k = \inf\{f(x) / x \in I_k\} = 0 \text{ } k \neq i$$

$$\text{De aquí sacamos que:}$$

$$S(f, P') = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = M_1 \Delta x_1 + \dots + M_i \Delta x_i + \dots + M_n \Delta x_n = 2 \Delta x_i$$

$$s(f, P') = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = 0$$

$$S(f, P') - s(f, P') = 2 \Delta x_i < \epsilon \text{ } f \text{ es int-R en } [0, 3]$$

$$2 \text{ si } x = 1$$

$$\text{Ejercicio: Estudiar si es integrable } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 2 \\ 1 & \text{si } x \neq 2 \end{cases} \text{ en } [1, 5].$$

$$4 \text{ si } x = 1 \text{ y } x = 2$$

Gráfica de la función:

Tomemos $P = [1, 2]$ con $\|P\| = 1/3$

$$M_k = \sup\{f(x) / x \in I_k\} = 4 - x$$

$$1 \text{ si } k = 1$$

$$m_k = \inf\{f(x) / x \in I_k\} =$$

$$4 \text{ si } k = 1$$

Con lo anterior y sabiendo que $\|P\| > 0$, podemos decir que:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = n(4 - \|P\|) = (n - 4) / n = 16$$

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \|P\| + (n - 1)(4 - \|P\|) = (4/n) + [(4n - 4)(4/n)] = (4/n) + 16 - (16/n) = 16 - (12/n) = 16 - 3\|P\|$$

$$S(f, P) - s(f, P) = 16 - [16 - 3\|P\|] = 3\|P\| < \epsilon \text{ si } f \text{ es int-R en } [1, 5]$$

Definición: Norma de una partición P , es igual a $\|P\|$, que es la amplitud del mayor de los subintervalos.
 $\|P\| = \max\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1})\}$

Proposición: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, acotada. $I = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$

!

$$\{P_n\} / \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0 \implies I = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$$

Teorema: (Caracterización de la integral de Riemann)

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, acotada

f es int-R en $[a, b]$ si

$$\{P_n\} / \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0 \implies$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) = \int_a^b f$$

Ejemplo 1: $f(x) = x$ en $[0, 2]$ ¿es integrable?

$$(b - a) / n$$

$$x_0 = a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_n = b$$

$$\{P_n\} / \|P_n\| \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} [S(f, P_n) - s(f, P_n)] = 0$$

$$\|P_n\| = 2/n$$

$$\Delta I_k = 2/n \quad I_k = [x_{k-1}, x_k] = [(k-1)2/n, 2k/n]$$

$$P = \{x_0 = 0, x_1 = 2/n, x_2 = 4/n, \dots, x_k = 2k/n, \dots, x_n = 2n/n = 2\}$$

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta I_k = 2/n \sum_{k=1}^n M_k$$

$$! S(f, P_n) = 2/n \sum_{k=1}^n 2k/n$$

$$M_k = \sup\{f(x) / x \in I_k\} = f(x_k) = 2k/n$$

$$s(f, P_n) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta I_k = 2/n \sum_{k=1}^n m_k$$

$$! s(f, P_n) = 2/n \sum_{k=1}^n 2(k-1)/n$$

$$m_k = \inf\{f(x) / x \in I_k\} = f(x_{k-1}) = 2(k-1)/n$$

$$\{S(f, P_n) - s(f, P_n)\} = \{[2/n \sum_{k=1}^n 2k/n] - [2/n \sum_{k=1}^n 2(k-1)/n]\} =$$

$$= \{[2/n \sum_{k=1}^n 2k/n] - [2/n \sum_{k=1}^n 2k/n] + [2/n \sum_{k=1}^n 2/n]\} = \{(2/n) \sum_{k=1}^n 1\} = \{4n/n^2\} = \{4/n\} \rightarrow 0$$

Viendo esto, podemos decir que f es integrable Riemann en $[0, 2]$. Por lo cual:

$$\int_0^2 x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(2/n) \sum_{k=1}^n k\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{4/n^2 [n(n+1)/2]\} = 2$$

Ejemplo 2: $f(x) = x^2$ en $[1, 2]$ ¿es integrable?

$$\Delta I_k = (b - a)/n = (2 - 1)/n = 1/n$$

$$P_n = \{x_0 = 1, x_1 = 1 + 1/n, x_2 = 1 + 2/n, \dots, x_k = 1 + k/n, \dots, x_n = 1 + n/n = 2\}$$

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta I_k = 1/n \sum_{k=1}^n M_k$$

$$! S(f, P_n) = 1/n \sum_{k=1}^n (1 + k/n)^2$$

$$M_k = \sup\{f(x) / x \in I_k\} = f(x_k) = (1 + k/n)^2$$

$$s(f, P_n) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta I_k = 1/n \sum_{k=1}^n m_k$$

$$! S(f, P_n) = 1/n \sum_{k=1}^n [1 + (k-1)/n]^2$$

$$m_k = \inf\{f(x) / x \in I_k\} = f(x_{k-1}) = [1 + (k-1)/n]^2$$

$$S(f, P_n) = 1/n \sum_{k=1}^n (1 + k/n)^2 = 1/n [\sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n k^2/n^2 + \sum_{k=1}^n 2k/n] = 1/n [-\sum_{k=1}^n 1/n^2 + \sum_{k=1}^n 2/n + \sum_{k=1}^n 2k/n^2]$$

$$s(f, P_n) = 1/n \sum_{k=1}^n [1 + (k-1)/n]^2 = 1/n [\sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n (k-1)^2/n^2 + \sum_{k=1}^n 2(k-1)/n] =$$

$$= 1/n [-\sum_{k=1}^n 1/n^2 + \sum_{k=1}^n 2/n + \sum_{k=1}^n 2(n-1)/n^2]$$

$$\{S(f, P_n) - s(f, P_n)\} = \{1/n [-\sum_{k=1}^n 1/n^2 + \sum_{k=1}^n 2/n + \sum_{k=1}^n 2k/n^2] - 1/n [-\sum_{k=1}^n 1/n^2 + \sum_{k=1}^n 2/n + \sum_{k=1}^n 2(n-1)/n^2]\} =$$

$\rightarrow 0$! f es integrable en $[1, 2]$, y además:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{S(f, P_n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n k^2 \right] \right\} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[n + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right] \right\} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[n + \frac{1}{n^2} \frac{(n(n+1)(2n+1))}{6} \right] \right\} = \\
 &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

5.2.6. Propiedades de las funciones integrables.

Sean f y g , funciones integrables Riemann en $[a, b]$, entonces:

- $(f + g)$ es integrable Riemann en $[a, b]$, y además: $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Sea $f \in \mathcal{R}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$! λf es $\mathcal{R}$ y además: $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$
- $(f - g)$, es $\mathcal{R}$ en $[a, b]$
- Si $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$! $\int_a^b f \leq \int_a^b g$
- $\int_a^a f = 0$

Definición: $\int_b^a f = - \int_a^b f$

- Si f es $\mathcal{R}$ en $[a, c]$ y f es $\mathcal{R}$ en $[c, b]$! f es $\mathcal{R}$ en $[a, b]$ y además:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- Si f es $\mathcal{R}$ en $[a, b]$! f es $\mathcal{R}$ en $[a, x] \forall x \in [a, b]$

5.2.7. Teoremas del valor medio para integrales.

1er teorema: Si f es continua en $[a, b]$! $\exists c \in [a, b] / \int_a^b f = f(c)(b - a)$

Proposición: Si $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$! $m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$

D/. Sea $M \leq f(x) \leq m$! $S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \geq \int_a^b f = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \geq m(b - a)$

D/. $M(b - a) \geq \int_a^b f \geq m(b - a)$

$$M \geq \frac{\int_a^b f}{(b - a)} \geq m$$

Este será el valor medio de f en $[a, b]$; $y_0 =$

f continua ! $\exists c \in [a, b] / f(c) = \frac{\int_a^b f}{(b - a)}$

2º teorema:

Sean:

f continua en $[a, b]$

! $\exists c \in [a, b] / \int_a^b f(x)g(x) = f(c) \int_a^b g(x)$

$g \in \mathcal{R}$ en $[a, b]$, con $g(x) < 0 \leq g(x) > 0 \forall x \in [a, b]$

el valor medio ponderado de f por $g = (\int_a^b f g) / (\int_a^b g)$

D/. $m \leq f(x) \leq M$

$g(x) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) \leq M \int_a^b g(x)$

$m \int_a^b g \leq \int_a^b f g \leq M \int_a^b g$

$\int_a^b f g$

$m \leq f(x) \leq M$

$\int_a^b g$

y_0

f continua en $[a, b]$! $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

5.3. Relación entre integración y derivación.

5.3.1. Integral definida.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, integrable en $[a, b]$

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$F(x)$ es una integral indefinida para f .

5.3.2. Primer teorema fundamental del Cálculo.

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, integrable en $[a, b]$

!

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / F(x) = \int_a^x f$

! a) F continua en $[a, b]$

b) Si f es continua en $c \in [a, b]$! F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$

c) Si f es continua en $[a, b]$! F es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$

Ejemplo: $F(x) = \int_a^x e^{-t^2} dt$! $F'(x) = e^{-x^2}$

D/. a) F es continua en $[a, b]$

Sea $c \in [a, b]$, probar que $\lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) = F(c)$! Dado $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$!

$0 < F(c+h) - F(c) < \epsilon$! { * Hablar de funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ significa que se están restando * }

$h > 0 \Rightarrow F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t) dt \leq Mh$

$$\text{luego } -M \leq f(x) \leq M \Rightarrow F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x) dx = hf + acf$$

$$h < 0 \Rightarrow -cc + hf$$

De aquí podemos deducir que $\epsilon F(c+h) - F(c) \leq M\epsilon h \Rightarrow$

Si tomamos un $\epsilon < \epsilon / M \Rightarrow \epsilon F(c+h) - F(c) \leq M\epsilon h < \epsilon$ y por tanto F continua en $[a, b]$

f continua en $[a, b] \Rightarrow F$ es derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$?

Si f es continua en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ para $\xi \in [a, b] \Rightarrow T.V. Integrable.$

Ahora para F :

T.V.I.:

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x) dx = f(\xi)h \quad \text{donde } F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} [F(c+h) - F(c)]/h$$

{* Para ver si es derivable, hay que calcular en cociente incremental de h }

$$\{ [F(c+h) - F(c)]/h \} = \{ f(\xi) \} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [F(c+h) - F(c)]/h = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(c) \quad \text{"c" en } [a, b]$$

f continua

$\xi \in [c, c+h]$

$h \rightarrow 0$

5.3.3. Función primitiva para f .

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, f admitirá una primitiva G , si $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- G continua en $[a, b]$
- G derivable en (a, b)
- $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Nota:

Si G_1 y G_2 , son dos primitivas de f , la diferencia entre las dos, será una constante:

$$[G_1(x) - G_2(x)]' = G_1'(x) - G_2'(x) = 0 \Rightarrow G_1(x) - G_2(x) = \text{cte.} \Rightarrow G_1(x) = G_2(x) + \text{cte.}$$

Si f es continua en $[a, b]$ admite una primitiva; esto es porque estaríamos en el teorema fundamental, siendo $F(x)$ la primitiva.

5.3.4. Regla de Barrow.

La regla de Barrow, es una consecuencia del teorema fundamental, y nos dice lo siguiente: Si f es continua en $[a, b]$ y G una primitiva para $f \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$

D/. f continua en $[a, b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(x) dx$ es derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$; por el teorema fundamental. $\Rightarrow F(x)$ es una primitiva de f en $[a, b]$

$$! F(x) = G(x) + k$$

$G(x)$ es otra primitiva de f en $[a, b]$

$$F(x) = G(x) + k$$

$$! F(b) = G(b) + k = G(b) - G(a) = \int_a^b f$$

$$0 = F(a) = G(a) + k \quad ! k = -G(a)$$

5.3.5. Segundo teorema fundamental del Cálculo.

Sean: f integrable en $[a, b]$

$$! \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

G primitiva para f

D/. Tomemos el siguiente intervalo con su partición:

$$a = x_{k-1} < x_k < b$$

$$x_0 < x_n$$

$$I_k$$

$$T.V.M.!$$

$$G(x_k) - G(x_{k-1}) = G'(k) \times (x_k - x_{k-1}) = f(k) \cdot \Delta x_k$$

G continua en $[a, b]$

Por ser primitiva G derivable en (a, b)

$$G'(x) = f(x) \text{ en } (a, b)$$

$$m_k \leq f(k) \leq M_k$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = s(f, P)$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (G(x_k) - G(x_{k-1})) =$$

$$= [G(x_1) - G(x_0)] + [G(x_2) - G(x_1)] + [G(x_3) - G(x_2)] + \dots + [G(x_n) - G(x_{n-1})] = G(x_n) - G(x_0) = G(b) - G(a)$$

$$\sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = S(f, P)$$

$$s(f, P) \leq G(b) - G(a) \leq S(f, P)$$

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Pero como f es integrable !

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

5.4. Cálculo de primitivas.

Formulario básico:

-
- $\int f(x) dx = F(x) + C$ / $F'(x) = f(x)$
- $\int [f(x)]^n f'(x) dx = ([f(x)]^{n+1}/(n+1)) + C$
- $\int af(x) f'(x) dx = [af(x)] / \ln a + C$
- $\int f'(x) / f(x) dx = \ln |f(x)| + C$
- $\int f'(x) / (1 + [f(x)]^2) dx = \arctg(f(x)) + C$
- Integración por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplos:

- $\int 3 dx = G(x) / G'(x) = 3 \Rightarrow G(x) = 3x$
- $\int x^2 dx = G(x) / G'(x) = x^2 \Rightarrow G(x) = x^3/3$
- $\int (2x)^2 dx = G(x) / G'(x) = (2x)^2 \Rightarrow G(x) = 4x^3/3$
- $\int (x+1)^n dx = \int 1 + 1/x dx = \int dx + \int x^{-1/2} dx = x + x^{1/2}/1/2 = x + 2\sqrt{x} + C$
- $\int \sin x \cos x dx = \sin^2 x / 2 + C$
- $\int \cos^5 x \sin x dx = -\cos^6 x / 6$
- $\int \cos x dx = \sin x$
- $\int \sin x dx = -\cos x$
- $\int 1/x dx = \ln x + C$
- $\int 2x / (x^2 + 1) dx = \ln(x^2 + 1) + C$
- $\int dx / \tan x = \int \cos x / \sin x dx = \ln |\sin x| + C$
- $\int e^x / (1 + e^x) dx = \ln(1 + e^x) + C$
- $\int \ln x / x dx = \ln x (1/x) = (\ln x)^2 / 2$
- $\int 3^x dx = 3^x / (2 \ln 3) + C$
- $\int 2x e^{-x^2} dx = -e^{-x^2} + C$
- $\int \cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + C$

- $dx/(1+x^2) = \arctg x$

- $dx/(3+4x^2) = 1/3 \cdot dx/(1+(2x/\sqrt{3})^2) = 1/3 \arctg (2x/\sqrt{3})$

$$3+4x^2 = 3(1+4/3x^2) = 3(1+(2x/\sqrt{3})^2) !$$

- *Cálculo de integrales por sustitución:*

– $ex/(3+e^{2x})$, dada la integral, ahora realizamos las sustituciones del siguiente modo: $ex = t \Rightarrow ex \, dx = dt$! $e^{2x} = t^2$; luego la nueva integral que nos queda será:

$dt/(3+t^2)$, y ahora resolvemos:

$$3+t^2 = 3(1+t^2/3) = 3(1+(t/\sqrt{3})^2) ! \quad dt/(3+t^2) = dt/3(1+(t/\sqrt{3})^2) =$$

$$= 1/3 \cdot dt(\sqrt{3})/(1+(t/\sqrt{3})^2) = \sqrt{3}/3 \arctg t/\sqrt{3}; \text{ volviéndonos ahora a la sustitución del comienzo, el resultado será: } ex/(3+e^{2x}) = \sqrt{3}/3 \arctg ex/\sqrt{3}$$

– $ex \, \text{sen } ex \, dx = \text{sen } t \, dt = -\cos t = -\cos ex + C$

Sustituciones:

$$ex = t$$

$$ex \, dx = dt$$

– $[\arctg x]^4/(1+x^2) \, dx = t^4 \, dt = t^5/5 = [\arctg x]^5/5$

Sustituciones:

$$\arctg x = t$$

$$1/(1+x^2) \, dx = dt$$

- *Cálculo de integrales por partes:*

- $x \, ex \, dx = x \, ex - \int ex \, dx = x \, ex - ex = ex(x-1)$

- $\ln x \, dx = x \ln x - \int (x \, dx)/x = x \ln x - x + C$

- $\arctg x \, dx = x \arctg x - \int x \, dx/(1+x^2) = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

Cálculo de primitivas de funciones racionales del tipo $P(x)/Q(x) \, dx$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

Con el grado de $Q >$ grado de P

Lo primero que haremos será hallar las raíces de Q, de forma que:

$$Q(x) = (x - r_1)^{s_1} (x - r_2)^{s_2} \dots (x - r_k)^{s_k} (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{r_1} \dots (a_hx^2 + b_hx + c_h)^{r_p}$$

Raíces reales Raíces irreducibles

Una vez halladas las raíces de Q(x), se descompone la fracción de polinomios inicial del siguiente modo:

$$P(x) = A_1 + \frac{A_2}{x - r_1} + \frac{A_3}{(x - r_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - r_k)^{s_k}} + \frac{M_1x + N_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \dots + \frac{M_px + N_p}{a_hx^2 + b_hx + c_h}$$

$$= \dots + \dots + \dots + \dots +$$

$$Q(x) = (x - r_1)^{s_1} (x - r_2)^{s_2} \dots (x - r_k)^{s_k} (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{r_1} (a_2x^2 + b_2x + c_2)^{r_2} \dots (a_hx^2 + b_hx + c_h)^{r_p}$$

Cuando tenemos ya descompuesto todo, ¿qué integrales son las que nos aparecen?

- $\int \frac{A}{(x - r)^n} dx = \frac{A}{n-1} \ln|x - r|$ (for $n > 1$)
- $\int \frac{B}{(x - r)^n} dx = \frac{B}{n-1} \ln|x - r|$ (for $n > 1$)

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{1}{n-1} \ln|ax^2 + bx + c| + \dots$$

- $\int \frac{(Mx + N)}{(ax^2 + bx + c)} dx =$

$$\frac{1}{\sqrt{4ac - b^2}} \ln \left| \frac{f'(x) + \sqrt{4ac - b^2}}{f(x)} \right| = \arctg\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{4ac - b^2}}\right)$$

- $\int \frac{(Mx + N)}{(ax^2 + bx + c)} dx$, también puede ser resuelto por el método de Hermite.

Ejemplos:

$$\int \frac{(x^2 + 2x + 5)}{(x^2 + x - 2)x} dx$$

Hallaremos ahora las raíces de Q(x):

$$Q(x) = (x^2 + x - 2)x = x(x - 1)(x + 2)$$

Ahora haremos la descomposición de la fracción de partida:

$$\frac{(x^2 + 2x + 5)}{(x^2 + x - 2)x} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 2} + \frac{A_3}{x} =$$

$$= \frac{A_1[x(x + 2)] + A_2[x(x - 1)] + A_3[(x - 1)(x + 2)]}{(x^2 + x - 2)x}$$

$$\frac{(x^2 + 2x + 5)}{(x^2 + x - 2)x} = \frac{A_1[x(x + 2)] + A_2[x(x - 1)] + A_3[(x - 1)(x + 2)]}{(x^2 + x - 2)x} = \frac{A_1x^2 + 2A_1x + A_2x^2 - A_2x + A_3x^2 + A_3x - 2A_3}{(x^2 + x - 2)x}$$

De aquí sacamos que:

$$\text{Para } x^2: 1 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\text{Para } x: 2 = 2A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{Para el t. i. } 5 = -2A_3 \Rightarrow A_3 = -5/2$$

$$1 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$+ 2 = 2A_1 - A_2 + A_3$$

$$3 = 3A_1 + 2A_3$$

$$! 3 = 3A_1 - 5 ! A_1 = 8/3$$

$$A_3 = -5/2$$

$$1 = A_1 + A_2 + A_3 ! A_2 = 1 - 8/3 + 5/2 = 5/6$$

$$(x^2+2x+5)/[(x^2+x-2)x] dx = A_1 \frac{dx}{(x-1)} + A_2 \frac{dx}{(x+2)} + A_3 \frac{dx}{x} = 8/3 \ln(x-1) + 5/6 \ln(x+2) - 5/2 \ln x$$

$$\bullet (x-5)dx / (x-1)^2(x+2)$$

Como ya tenemos hecha la descomposición en raíces de $Q(x)$ haremos la descomposición de la fracción de partida directamente:

$$(x-5)/[(x-1)^2(x+2)] = A/(x+2) + B_1/(x-1) + B_2/(x-1)^2 =$$

$$= A(x-1)^2 + B_1[(x+2)(x-1)] + B_2(x+2)/[(x-1)^2(x+2)] !$$

$$! (x-5) = A[(x^2+1-2x)] + B_1[x^2+x-2] + B_2[x+2] = Ax^2 - 2Ax + A + B_1x^2 + B_1x - 2B_1 + B_2x + 2B_2$$

De aquí sacamos que:

$$\text{Para } x^2 ! 0 = A + B_1$$

$$\text{Para } x ! 1 = -2A + B_1 + B_2$$

$$\text{Para el t. i. ! } -5 = A - 2B_1 + 2B_2 +$$

$$-4 = 3B_2 ! B_2 = -4/3$$

$$0 = A + B_1 ! B_1 = -A$$

$$! 1 = -3A - 4/3 ! A = -7/9$$

$$1 = -2A + B_1 + B_2$$

$$B_1 = -A = 7/9$$

$$(x-5)dx/[(x-1)^2(x+2)] = A \frac{dx}{(x+2)} + B_1 \frac{dx}{(x-1)} + B_2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -7/9 \ln(x+2) + 7/9 \ln(x-2) + 4/[3(x-1)]$$

$$\bullet I = \frac{dx}{(x^3-1)} = \frac{dx}{[(x-1)(x^2+x+1)]}$$

Descomponemos ahora la fracción de partida, teniendo en cuenta, que una de las raíces de $Q(x)$ es irreducible, pero no es elemental.

$$1/(x^3-1) = A/(x-1) + (Mx+N)/(x^2+x+1) = [A(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)]/(x^3-1) !$$

$$! 1 = A(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1) = Ax^2 + Ax + A + Mx^2 - Mx + Nx - N$$

De aquí sacamos que:

$$\text{Para } x^2 : 0 = A + M$$

$$\text{Para } x : 0 = A - M + N$$

$$\text{Para t.i.} : 1 = A - N +$$

$$1 = 3A \quad A = 1/3$$

$$0 = A + M \quad M = -A = -1/3$$

$$1 = A - N \quad N = -(1 - A) = -1 + 1/3 = -2/3$$

$$I = dx / (x^3 - 1) = A dx / (x - 1) + (Mx + N) dx / (x^2 + x + 1) = I_1 + I_2 !$$

$$I_1 = A dx / (x - 1) = (1/3) dx / (x - 1) = 1/3 dx / (x - 1) = 1/3 \ln(x - 1)$$

$$I_2 = (Mx + N) dx / (x^2 + x + 1) = [(-x/3) + (-2/3)] dx / (x^2 + x + 1) = -1/3 (x + 2) dx / (x^2 + x + 1) =$$

$$= -1/6 (2x + 1 + 3) dx / (x^2 + x + 1) = -1/6 (2x + 1) dx / (x^2 + x + 1) - 1/6 3 dx / (x^2 + x + 1) =$$

$$= -1/6 (2x + 1) dx / (x^2 + x + 1) - 1/2 dx / (x^2 + x + 1) = -1/6 I_3 - 1/2 I_4$$

$$I_3 = (2x + 1) dx / (x^2 + x + 1) = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$I_4 = dx / (x^2 + x + 1)$$

$$(x^2 + x + 1) = (x -)^2 + = x^2 + - 2x + =$$

De aquí sacamos que: para la $x : 1 = -2 ! = -1/2 !$

$$\text{para el t.i.} : 1 = + = 1/4 + ! = 3/4$$

$$! = (x + 1/2)^2 + 3/4 = 3/4 [4/3 (x + 1/2)^2 + 1] = 3/4 [(((2x+1)/2) ("(4/3)))^2 + 1] = 3/4 [((2x+1)/"3)^2 + 1]$$

$$I_4 = dx / (x^2 + x + 1) = dx / [3/4 [((2x+1)/"3)^2 + 1]] = 4/3 dx / [((2x+1)/"3)^2 + 1] =$$

$$= (2"3)/3 (2/"3) dx / [((2x+1)/"3)^2 + 1] = (2"3)/3 \arctg [((2x+1)/"3)^2 + 1]$$

$$! I_2 = -1/6 I_3 - 1/2 I_4 = -1/6 \ln(x^2 + x + 1) - "3/3 \arctg ((2x+1)/"3)$$

$$! I = I_1 + I_2 = 1/3 \ln(x - 1) - 1/6 \ln(x^2 + x + 1) - "3/3 \arctg ((2x+1)/"3)$$

Método de Hermite: para fracciones de polinomios.

El método de Hermite nos dice que: $P(x)dx/Q(x) = R(x)/Q_1(x) + T(x)dx/Q_2(x)$

Siendo: $Q_1 = \text{m.c.d.}(Q, Q')$

$$Q_2 = Q / Q_1$$

T y R, dos polinomios de un grado menor a Q_1 y Q_2 respectivamente.

Veamos como se usa el método con un ejemplo:

$$dx/(x^2 + 1)^2$$

$$Q(x) = (x^2 + 1)^2$$

$$Q'(x) = 4x(x^2 + 1)$$

$$Q_1(x) = \text{m.c.d.}(Q(x), Q'(x)) = (x^2 + 1)$$

$$Q_2(x) = Q(x) / Q_1(x) = (x^2 + 1)$$

$R(x)$, es un polinomio de grado 1 = $ax + b$

$T(x)$, es otro polinomio de grado 1 = $cx + d$

Después de esto, podemos decir que:

$$P(x)dx/Q(x) = R(x)/Q_1(x) + T(x)dx/Q_2(x) = dx/(x^2+1)^2 = [(ax+b)/(x^2+1)] + (cx+d)/(x^2+1)$$

Si derivamos esta expresión, nos quedará:

$$\begin{aligned} 1/(x^2 + 1)^2 &= [(ax+b)/(x^2+1)]' + [(cx+d)/(x^2+1)]' = \\ &= [(a(x^2+1) - 2x(ax+b))/(x^2+1)^2] + [(cx+d)/(x^2+1)]' = \\ &= [(a - ax^2 - 2bx) + (cx^3 + cx + dx^2 + d)] / (x^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

De aquí podemos sacar:

$$\text{para } x^3 : 0 = c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{para } x^2 : 0 = -a + d \Rightarrow a = d$$

$$\text{para } x : 0 = -2b + c \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\text{para el t. i. } 1 = a + d \Rightarrow 1 = 2d \Rightarrow d = 1/2 = a$$

Ahora regresamos a la integral de partida:

$$\begin{aligned} dx/(x^2+1)^2 &= [(1/2x)/(x^2+1)] + (1/2)dx/(x^2+1) = [(1/2x)/(x^2+1)] + (1/2) dx/(x^2+1) = \\ &= [x/(2x^2+2)] + (1/2)\arctg(x^2+1) \end{aligned}$$

Integrales trigonométricas: Nos las podemos encontrar de dos tipos:

- $\sin x \cos x \, dx$
- $\sin mx \cos nx \, dx$

Al encontrarnos integrales del primer tipo:

Si y son impares, entonces utilizaremos el teorema de trigonometría que dice que $\sin^2 + \cos^2 = 1$

Ejemplo: $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, dx =$

$$= \int \sin x \cos^2 x \, dx - \int \sin x \cos^4 x \, dx = -[\cos^3 x / 3] + [\cos^5 x / 5] + C$$

Si por el contrario, y son pares, entonces utilizaremos estas caracterizaciones:

- $\sin^2 x = (1 - \cos 2x) / 2$
- $\cos^2 x = (1 + \cos 2x) / 2$

Ejemplo: $\int \cos^4 x \, dx = \int \cos^2 x \cos^2 x \, dx = \int [(1 + \cos 2x)/2]^2 \, dx = \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx / 4$

$$= \int \frac{1}{4} \, dx + \int \frac{1}{2} \cos 2x \, dx + \int \frac{1}{4} \cos^2 2x \, dx;$$

$$\frac{1}{4} \, dx = x/4 !$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\frac{1}{4} \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int [(1 + \cos 4x)/2] \, dx = \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx = \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin 4x$$

$$! \, x/4 + \frac{1}{4} \sin 2x + x/8 + \frac{1}{32} \sin 4x$$

Si nos las encontramos de la segunda forma:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x]$$

Ejemplo: $\int \sin 4x \cos 9x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin (4+9)x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin (4-9)x \, dx = \frac{1}{26} \cos 13x + \frac{1}{10} \cos -5x$

Existe otro tipo más de trigonométricas, que se basa en el método de sustitución. Las sustituciones que se hacen son las siguientes:

$$\tan x/2 = t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Ejemplo: $\int \frac{dx}{(\sin x \cos^2 x)} = \int \frac{[2dt / (1+t^2)]}{[(2t/(1+t^2))((1-t^2)/(1+t^2))]} =$

$$= \int \frac{(1+t^2)2dt}{[t(1-t^2)^2]} = \int \frac{(1+t^2)2dt}{[t(1+t)^2(1-t)^2]} =$$

$$= \int \frac{A dt}{t} + \frac{B_1 dt}{(1-t)} + \frac{B_2 dt}{(1-t)^2} + \frac{C_1 dt}{(1+t)} + \frac{C_2 dt}{(1+t)^2} !$$

$$! \int \frac{A(1-t)^2 + B_1 t(1-t)(1+t)^2 + B_2 t(1+t)^2 + C_1 t(1-t)(1+t) + C_2 t(1-t)^2}{[t(1+t)^2(1-t)^2]} =$$

$$= \frac{[A + At^4 - 2At^2 + B_1 t - B_1 t^4 - B_1 t^3 + B_1 t^2 + B_2 t + B_2 t^3 + 2B_2 t^2 + C_1 t + C_1 t^5 - 2C_1 t^3 + C_1 t^2 + C_1 t^6 - 2C_1 t^4 + C_2 t + C_2 t^3 - 2C_2 t^2]}{[t(1+t)^2(1-t)^2]}$$

De aquí sacamos que:

$$(1+2t^2+t^4) \\ = [A+At^4-2At^2+B_1t-B_1t^4-B_1t^3+B_1t^2+B_2t+B_2t^3+2B_2t^2+C_1t+C_1t^5-2C_1t^3+C_1t^2+C_1t^6-2C_1t^4+C_2t+C_2t^3-2C_2t^2]$$

Ahora ya podemos hallar los valores de A, B y C:

$$\text{Para } t^6 : 0 = C_1 \quad C_1 = 0$$

$$\text{Para } t^5 : 0 = C_1$$

$$\text{Para } t^4 : 1 = A - B_1 - 2C_1 \quad 1 = 1 - B_1 - 0 \quad B_1 = 0$$

$$\text{Para } t^3 : 0 = -B_1 + B_2 - 2C_1 + C_2$$

$$\text{Para } t^2 : 2 = -2A + B_1 + 2B_2 + C_1 - 2C_2$$

$$\text{Para } t : 0 = B_1 + B_2 + C_1 + C_2$$

$$\text{Para } t^0 : 1 = A \quad A = 1$$

$$0 = -B_1 + B_2 - 2C_1 + C_2$$

$$2 = -2A + B_1 + 2B_2 + C_1 - 2C_2 +$$

$$2 = -2 + 3B_2 - C_2 \quad 4 = 3B_2 - C_2 \quad C_2 = 3B_2 - 4$$

$$0 = B_1 + B_2 + C_1 + C_2 = 0 + B_2 + 0 + 3B_2 - 4 \quad -4B_2 = -4 \quad B_2 = 1$$

$$C_2 = 3B_2 - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$\int \frac{dt}{t^2 + B_1 \frac{dt}{(1-t)} + B_2 \frac{dt}{(1-t)^2} + C_1 \frac{dt}{(1+t)} + C_2 \frac{dt}{(1+t)^2}} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{dt}{(1-t)^2} - \frac{dt}{(1+t)^2}} =$$

$$= \ln t - \left[\frac{1}{(1-t)} \right] + \left[\frac{1}{(1+t)} \right]$$

Si ahora deshacemos el cambio de variables:

$$\frac{dx}{(\sin x \cos 2x)} = \ln \left(\frac{\tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)} \right) + \left[\frac{1}{1 + \tan(x/2)} \right]$$

Cambios trigonométricos:

Cuando nos encontremos integrales de alguna de las siguientes formas, para su resolución, es aconsejable realizar las siguientes sustituciones:

$$R(a^2 - x^2), \text{ sustituimos } x = a \sin t \quad (a^2 - a^2 \sin^2 t) = a^2 (1 - \sin^2 t) = a^2 \cos^2 t$$

$$R(a^2 + x^2), \text{ sustituimos } x = a \tan t \quad (a^2 + a^2 \tan^2 t) = a^2 (1 + \tan^2 t) = a^2 \sec^2 t$$

$$R(x^2 - a^2), \text{ sustituimos } x = a \sec t \quad (a^2 \sec^2 t - a^2) = a^2 (\sec^2 t - 1) = a^2 \tan^2 t$$

$$\text{Ejemplo: } I = \int \frac{x^3 (16 - x^2) dx}{(16 - x^2)^{5/2}} = \int \frac{16x^3 - x^5}{(16 - x^2)^{5/2}} dx = \int \frac{16x^3 - x^5}{(16 - x^2)^{5/2}} dx$$

$$x = 4 \sin t; dx = 4 \cos t dt = 45 \sin 2t dt - 45 \sin 4t dt \quad I = -45/3 \cos 3(\arcsin(x/4)) + 45/5 \cos 5(\arcsin(x/4))$$

TEMA 6: Series numéricas. Series de funciones.

6.1. Introducción.

Series de números reales:

Definición: Sea $\{a_n\} = \{a_n\}, \{S_n\} = \{S_n\}$ /

Siendo:

$\{a_n\}$ = sucesión de números reales.

$\{S_n\}$ = sucesión de las sumas parciales de $\{a_n\}$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Ejemplo:

$$\{a_n\} = \{n\}, \{S_n\} = \{n(n+1)/2\}$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 2$$

$$S_3 = 1 + 2 + 3$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Se dice que una serie es convergente (ó sumable) si la sucesión de sus sumas parciales es convergente.

Ejemplo: ¿Es convergente $\{a_n\} = \{n\}, \{S_n\} = \{n(n+1)/2\}$?

$\{S_n\} = \{n(n+1)/2\}$ no es convergente.

6.2. Series geométricas.

Una serie geométrica es aquella en la que los elementos de la misma se diferencian en que $a_2 = a_1 k$ denominando a 'k' razón de la serie.

Ejemplo: Sea $\{a_n\} = \{a\}, \{S_n\} = \{a - a^{n+1}/(1 - a)\}$, demostrar que

$S_n = [a - a^{n+1}]/[1 - a]$ y dar el carácter de esta serie:

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + a^2$$

$$S_3 = a + a^2 + a^3$$

$$S_n = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

$$S_n = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$$

$$a S_n = a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} -$$

$$(1 - a)S_n = a - a^{n+1} \Rightarrow S_n = [a - a^{n+1}] / [1 - a]$$

Veamos ahora el carácter de esta serie, llamamos carácter de una serie a su convergencia:

Si $a=1$! $\{S_n\} = \{1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n\} = \{n\}$! " ! no converge

Si $a = -1$! $\{S_n\} = \{-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots\}$ oscilante, no converge

$a > 1$ + "

Si $a \neq 1$! $\{S_n\} = \{[a - a^{n+1}] / [1 - a]\}$

$a < 1$ $a / (1 - a)$! "n an converge sii $a < 1$

6.3. Series convergentes. Propiedades.

Condición necesaria de convergencia de una serie:

Sea $\{a_n\} = (\{a_n\}, \{S_n\})$, entonces:

Si $\{a_n\}$ converge ! $\{a_n\} \rightarrow 0$

Ejemplos:

$\{n\} \rightarrow +\infty$! no es convergente

$\{[n^9 + 8n] / n^4\} \rightarrow 0$! no es convergente

Propiedades:

1. $\{a_n\}$ convergente

$\{b_n\}$ convergente ! $\{a_n + b_n\}$ converge y $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

, "

D/. $\{a_n\} = (\{a_n\}, \{S_n\}) / \{S_n\} \rightarrow S$

$\{b_n\} = (\{b_n\}, \{T_n\}) / \{T_n\} \rightarrow T$

$\lim (S_n + T_n) = \lim S_n + \lim T_n = S + T$! $\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

Ejemplo: ¿Es convergente la serie $\sum [7(2n) + 3n] / 6n$, si lo es cuanto vale su suma?

$$\sum [7(2n) + 3n] / 6n = \sum (7(2n)/6n) + (3n / 6n) = \sum 7(1/3)n + (1/2)n$$

$(1/3)n$ es convergente

$$\sum [7(2n) + 3n] / 6n \text{ es convergente y es } = 7 \sum (1/3)n + \sum (1/2)n$$

$(1/2)n$ es convergente

$$7 \sum (1/3)n + \sum (1/2)n = 7 [(1/3)/(1 - (1/3))] + [(1/2)/(1 - 1/2)]$$

2. Si a una serie, se le añaden o quitan un número finito de términos, la nueva serie tiene igual que la primera.

Si $\sum a_n$ convergente $\Rightarrow \sum a_{n+k}$ converge

$\Rightarrow \sum a_{n-k}$ converge

$$\text{Ejemplo: } \sum (1/2)^n = \sum (1/2)^n - [(1/2) + (1/2)^2]$$

6.4. Series de términos no negativos. Criterios de convergencia.

Definición: Sea la serie $\sum a_n$, será una serie de términos no negativos si $a_n \geq 0 \forall n$, ó si queremos restringir un poco el intervalo $a_n \geq 0 \forall n > p$. También se verifica que si $\sum a_n$ es convergente con $a_n \geq 0 \Rightarrow \sum (-a_n)$ converge donde $(-a_n) \geq 0$.

Criterios de convergencia: Sea $a_n \geq 0$; $\{S_n\}$ creciente;

- **Criterio de condensación (de Cauchy):**

$a_n \geq 0 \forall n$ $\{a_n\}$ decreciente $\Rightarrow \sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum 2^k a_{2^k}$ convergente

Serie armónica: $\sum 1/(n^p)$; $p > 1$

Criterio Cauchy

$\sum 1/(n^p) \Rightarrow \sum 2^k [1/(2^k)^p]$ converge $\Leftrightarrow \sum [1/(2^{p-1})^k]$ converge

$1/(2^{p-1}) < 1 \Rightarrow p > 1 \Rightarrow \sum 1/(n^p)$ convergerá $\Leftrightarrow p > 1$

Ejemplo: $\sum 1/n$ aquí como $p=1 \Rightarrow$ la serie no converge.

- **Criterio de comparación:** Sean $a_n, b_n \geq 0 \forall n$, con

$$a_n = (\{a_n\}, \{S_n\})$$

$$b_n = (\{b_n\}, \{T_n\}); \text{ entonces:}$$

- Si b_n es convergente $\Rightarrow a_n$ también es convergente.
- Si a_n es divergente $\Rightarrow b_n$ también es divergente

D/. a. " b_n convergente ! $\{T_n\}$ converge ! $\{T_n\}$ está acotada

Como an " b_n ! S_n " T_n , si $\{T_n\}$ está acotada ! $\{S_n\}$ también está acotada !

! $\{S_n\}$ convergente ! " a_n también converge

b. Supongamos que " b_n es convergente ! " a_n también sería convergente, contradiciendo así la hipótesis de la que partimos donde " a_n es divergente.

Ejemplo: Estudiar el carácter de la serie " $n^1 [2+(-1)^n] / 2^n$

$$a_n = [2+(-1)^n] / 2^n \quad b_n = 3/(2^n) = b_n$$

$$b_n = n^{13}/(2^n) = 3n^{11}/(2^n) \text{ convergente ! } a_n \text{ converge}$$

- Criterio de comparación por cociente: (ó por paso al límite)

Sean " a_n y " b_n

Entonces:

Con an " 0 y b_n " 0

- Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = L > 0$! " a_n y " b_n son del mismo carácter
- Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$! si " b_n es convergente ! " a_n convergente

si " a_n es divergente ! " b_n divergente

- Si el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = +\infty$! si " b_n es divergente ! " a_n divergente

si " a_n es convergente ! " b_n convergente

- Criterio de D'Alembert: (por cociente)

Sea " a_n ; a_n " 0 a. Si $r < 1$! " a_n es convergente

!

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1}/a_n\} = r$ b. Si $r > 1$! " a_n es divergente

D/. a. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1}/a_n\} = r < s < 1$! " a_n es convergente

! $a_{n+1} < s a_n$ $n > N$!

! $a_{N+1} < s a_N$

$a_{N+2} < s^2 a_N$

$a_{N+3} < s^3 a_N$

$a_{N+4} < s^4 a_N$

$$a_{N+k} < s a_N$$

+

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} < a_N (s + s^2 + s^3 + \dots + s^k)$$

" $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} < a_N \sum_{k=1}^{\infty} s^k$ ", de aquí podemos decir que como " $\sum_{k=1}^{\infty} s^k$ " es convergente, entonces por el criterio de comparación " $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ " también converge.

$$b. \text{ Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_{n+1} / a_n\} = r > s > 1 \text{ ! } a_{N+1} > s a_N > a_N$$

Los términos siempre están por encima de a_N , por lo cual la serie no tiende a 0, por lo cual no existe convergencia; así que como conclusión decimos que " a_n " es divergente.

Ejemplo: Calcular el carácter de " $\sum_{n=1}^{\infty} [(n!)^2 / (2n)!]$ "

$$a_n = [(n!)^2 / (2n)!]$$

$$a_{n+1} = [(n+1!)^2 / (2(n+1))!]$$

$$a_{n+1} / a_n = [(n+1!)^2 / (2(n+1))!] / [(n!)^2 / (2n)!] = [(n+1!)^2 (2n)!] / [(n!)^2 (2(n+1))!] =$$

$$= [(n+1)^2 / (4(n+1)(n+1))] \cdot \{[(n+1)^2 / (4(n+1)(n+1))]\} \cdot 1/4 < 1 \text{ ! converge}$$

• Criterio de la raíz: (Cauchy)

Sea " a_n "; $a_n \neq 0$. Si $r < 1$! " a_n " es convergente

!

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ b. Si $r > 1$! " a_n " es divergente

D/. a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r < s < 1$! " $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < s \text{ ! } a_n < s^n$;

s^n converge al ser $s < 1$!

! por el criterio de comparación a_n también converge !

! " a_n " converge

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r > s > 1$! " $a_n > s \text{ ! } a_n > s^n$;

s^n diverge al ser $s > 1$!

! por el criterio de comparación a_n también diverge !

! " a_n " diverge

Ejemplo: Estudiar el carácter de " $\sum_{n=1}^{\infty} (n!) / (n^n)$ "

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n!) / (n^n)} = 1/e < 1$! " $(n!) / (n^n)$ " converge

Por el criterio de la raíz de sucesiones

- Criterio de Raabe:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Si $L < 1$! $\{a_n\}$ es divergente

!

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n [1 - (a_{n+1}/a_n)]\} = L$ b. Si $L > 1$! $\{a_n\}$ es convergente

Ejemplo: $\{n/[n(n+1)^3]\}$

Veamos si podemos aplicar el criterio del cociente:

$$\{a_{n+1} / a_n\} = \{[(n+1)/[(n+2)^3]] / [n/[(n+1)^3]]\} = \{[(n+1)(n+1)^3] / [n(n+2)^3]\} \neq 1$$

Como tiende a 1, y el criterio del cociente, no nos da una solución, utilizamos el criterio de Raabe:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \{n[1 - (a_{n+1} / a_n)]\} &= \{n[1 - ([n(n+1)^3] / [n(n+2)^3])]\} = \\ &= \{n[1 - ((n+1)^4 / [n(n+2)^3])]\} = \{n([n(n+2)^3] - [(n+1)^4]) / [n(n+2)^3]\} = \\ &= \{([n(n+2)^3] - [(n+1)^4]) / (n+2)^3\} = \{[2n^4 + 6n^3 + 4n^2 - 1] / (n+2)^3\} \neq 1 \end{aligned}$$

! por el criterio de Raabe la serie $\{n/[n(n+1)^3]\}$ es convergente.

- **Convergencia absoluta y condicional.**

Convergencia absoluta:

Definición: Sea $\{a_n\}$, entonces $\{a_n\}$ converge absolutamente si $\{\sum a_n\}$ converge

Proposición: Si $\{a_n\}$ converge absolutamente ! $\{a_n\}$ converge, pero no !

D/. Si $\{a_n\}$ converge absolutamente ! $\{a_n\}$ converge

$\{a_n\}$ converge absolutamente ! $\{\sum a_n\}$ converge; como $\sum a_n \neq \sum \emptyset$;

si $\{\sum a_n\}$ converge ! por el criterio de comparación $\{a_n\}$ es convergente

Convergencia condicional:

Definición: Diremos que una serie es incondicionalmente convergente sii $\sum a(x)$ converge, siendo $\{x\}$ cualquier permutación.

Del mismo modo, diremos que una serie es condicionalmente convergente sii no converge absolutamente pero sí simplemente.

Ejemplos:

- Probar que si $\{a_n\}$ es convergente ! $\{1/a_n\}$ es divergente.

Si $\{a_n\}$ es convergente es porque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n$ diverge.

- Probar que si $\{a_n\}$ es absolutamente convergente entonces $\{a_n^2\}$ es también convergente.

$\{a_n\}$ es absolutamente convergente $\Leftrightarrow \sum |a_n| < \infty$

$\sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum |a_n|^2 < \infty$

$\sum |a_n|^2 < \infty$; como $\sum |a_n| < \infty$, por el criterio de comparación $\sum |a_n|^2$ converge

6.6. Series de números cualesquiera.

Criterios de convergencia:

- Criterio de Dirichlet:

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de números reales

$\{b_n\}$ monótona y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ $\Rightarrow \sum a_n b_n$ converge

$\{a_n\}$ con sumas parciales acotadas

Ejemplo: Probar que si $\{a_n\}$ converge $\Rightarrow \sum (a_n/n)$ también converge

$\{a_n\}$ y $\{b_n\} = \{1/n\}$

$\{1/n\}$ monótona y $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ $\Rightarrow \sum a_n \cdot 1/n = \sum (a_n/n)$ es convergente

$\{a_n\}$ converge $\Rightarrow \{S_n\}$ acotadas

- Criterio de Abel:

$\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de números reales

$\{b_n\}$ convergente $\Rightarrow \sum a_n b_n$ es convergente

$\{a_n\}$ convergente

Ejemplo: Probar que si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow \sum [(n a_n)/(n+1)]$ es convergente

$\{a_n\}$ y $\{b_n\} = \{n/(n+1)\}$

$\{b_n\} = \{n/(n+1)\} \rightarrow 1$ converge $\Rightarrow \sum [(n a_n)/(n+1)]$ es convergente

$\{a_n\}$ converge

6.7. Series alternadas. Criterio de Leibnitz.

Las series alternadas, serán las del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$, entonces el criterio de Leibnitz nos dice que:

Si en $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ y $\{x_n\} \downarrow 0$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ es convergente.

Ejemplo: Estudiar el carácter de $(-1)^{n+1} / n! \cdot x^n = 1/n$

Veamos si converge absolutamente:

" $\sum x_n = \sum 1/n$ divergente!" $[(-1)^{n+1} / n]$, no converge absolutamente

$\{1/n\}_{n=0}^{\infty}$

$n_1 < n_2$!

! $1/n_1 > 1/n_2$! ! por Leibnitz " $\sum (-1)^{n+1}/n$ es condicionalmente converge

! decreciente

6.8. Sumas de algunas series.

Series geométricas: " $a_n = a^n / a^{n+1} = a$, a la que denominamos razón, siendo " $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 / (1 - a)$ "

Ejemplo:

" $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \times 3^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5/3^n = 5 \sum_{n=0}^{\infty} (1/3)^n = 5[(1/3) + (1/3^2) + \dots]$

!

" $\sum_{n=0}^{\infty} (1/3)^n = 1 / (1 - 1/3) = 3/2 = (1/3) + (1/3^2) + (1/3^3) + \dots$

! " $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \times 3^{-n} = 5[\sum_{n=0}^{\infty} (1/3)^n - [(1/3) + (1/3^2)]] = 5[3/2 - [(1/3) + (1/3^2)]] = 95/18$

Series aritmético – geométricas: " $a_n = P(n) / k^n$! $1/k$ convergerá si $1/k < 1$

Para realizar las sumas, nos basaremos en esta fácil fórmula $S_n - 1/k S_n = \text{Suma}$

Ejemplo: " $\sum_{n=0}^{\infty} (3n+2)/2^n$ $k = 2$

$S_n = (5/2) + (8/2^2) + (11/2^3) + \dots + [(3(n-1)+2)/2^{n-1}] + [(3n+2)/2^n]$

$-1/2 S_n = (5/2^2) + (8/2^3) + (11/2^4) + \dots + [(3(n-1)+2)/2^n] + [(3n+2)/2^{n+1}]$

$1/2 S_n = (5/2) + (3/2^2) + (3/2^4) + \dots + (3/2^n) + [(3n+2)/2^{n+1}]$

$1/2 S_n = (5/2) + \sum_{i=2}^n (3/2^i) + [(3n+2)/2^{n+1}]$

Cuando $n \rightarrow \infty$ $n! \rightarrow \infty$ $n! \rightarrow \infty$ $n! \rightarrow \infty$

$1/2 S = (5/2) + 3 \sum_{n=2}^{\infty} (1/2^n) + 0$

$S = 2[(5/2) + 3(2 - 1/2)] = 14$

Series hipergeométricas: Sean " a_n y b_n , , " $a_n / b_n = [(a+1)/(a)] = [(n+1)/(n)]$ "

¿Este tipo de series, cuándo convergen?, para ver su convergencia, aplicamos el criterio de Raabe:

$$\{n[1-(a_{n+1}/a_n)]\} = \{n[1-((n+1)/(n+2))]\} = \{n[(n+2)-(n+1)]/(n+2)\}! \quad (-/)>1!$$

! esta serie converge.

¿Cuál es la fórmula de la suma de los términos de la serie?

$$"a_n / [(a_{n+1})/(a_n)] = [(n+1)/(n+2)]! \quad a_{n+1}(n+2) = a_n(n+1)$$

$$na_{n+1} - na_n + a_{n+1} = a_n$$

$$n=1 \quad a_2 - a_1 + a_2 = a_1$$

$$n=2 \quad 2a_3 - 2a_2 + a_3 = a_2$$

$$n=3 \quad 3a_4 - 3a_3 + a_4 = a_3$$

$$n=4 \quad 4a_5 - 2a_4 + a_5 = a_4$$

$$n-1 \quad (n-1)a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n = a_{n-1}$$

$$n \quad na_{n+1} - na_n + a_{n+1} = a_n$$

$$(-)[a_1+a_2+a_3+...+a_n] + na_{n+1} + [a_2+a_3+...+a_n+a_{n+1}] = [a_1+a_2+a_3+...+a_n]$$

$$S_n \quad S_n - a_1 + a_{n+1} = S_n$$

!

$$(-) \quad S_n + na_{n+1} + S_n - a_1 + a_{n+1} = S_n$$

$$S_n (+ -) = na_{n+1} - a_1 + a_{n+1}$$

$$S_n = (na_{n+1} - a_1 + a_{n+1})/(+ -)$$

$$S_n \text{ convergerá si } \{a_{n+1}(n+2)\}! \quad 0!$$

$$! \quad S = -a_1 / (+ -)$$

Ejemplo: Estudiar el carácter y la suma de "n"1 (1/[(n+2)(n+3)])

Veamos lo primero de que clase de serie se trata:

$$a_{n+1} / a_n = (1/[(n+3)(n+4)]) / (1/[(n+2)(n+3)]) = (n+2)/(n+4)! \text{ es una hipergeométrica}$$

Ahora por Raabe, sabemos que convergerá si $(- /)>1!$ $(4-2)/1=2>1$, por lo que converge, y sabemos que la fórmula de la suma es, $S = -a_1 / (+ -)$, luego:

$$"a_n = S = -4(a_1) / (1+2-4)$$

$$! \quad S = -(1/3)/(-1) = 1/3$$

$$a_1 = 1/12$$

Series de divisiones de polinomios:

Sean dos polinomios $P(n)$ y $Q(n)$ / " $P(n)/Q(n)$ convergerá si $\text{gr.}(Q) - \text{gr.}(P) \geq 2$

Como ejemplo guía utilizaremos: " n " $1 / (n^2 + n)$

Ejemplo de que sólo se cumple cuando $\text{gr.}(Q) - \text{gr.}(P) \geq 2$:

" $(n^2+1)/(n^3+3) = \{[(1/n) + 1] / 4\} \rightarrow 1/4$! no es convergente, ya que $\text{gr.}(Q) - \text{gr.}(P) < 2$

Para hallar el valor de la suma utilizaremos el ejemplo guía y hallaremos su descomposición en fracciones simples:

$$1/(n^2 + n) = 1/[n(n+1)] = A/n + B/(n+1) = [A(n+1) + Bn]/(n^2 + n)$$

De aquí sacamos que:

$$\text{Para } n \neq 0: A + B = 1 \quad A = -B$$

$$\text{Para } n = -1: 1 = A \quad B = -1$$

Por lo que podemos concluir que:

$$n! \cdot 1/[n(n+1)] = n! \cdot [(1/n) - (1/(n+1))] \rightarrow a_n = (1/n) - (1/(n+1))$$

$$a_1 = 1 - 1/2$$

$$a_2 = 1/2 - 1/3$$

$$a_3 = 1/3 - 1/4$$

$$a_4 = 1/4 - 1/5$$

$$a_n = (1/n) - (1/(n+1)) +$$

$$S_n = 1 - (1/(n+1))$$

$$n! \cdot n! \cdot n!$$

$$S = 1 \quad 0! = 1$$

Ejemplo: " n " $1/(n^3 - 3n^2 + 2n)$

Hacemos la descomposición en fracciones simples:

$$\begin{aligned} 1/(n^3 - 3n^2 + 2n) &= 1/[n(n^2 - 3n + 2)] = 1/[n(n-1)(n-2)] = A/n + C/(n-1) + B/(n-2) = \\ &= [A(n^2 - 3n + 2) + C(n^2 - 2n) + B(n^2 - n)]/[n^3 - 3n^2 + 2n] \end{aligned}$$

De aquí sacamos que:

$$\text{Para } n^2 \neq 0: A + B + C = 1$$

$$\text{Para } n \neq 0: -3A - 2C = B$$

$$\text{Para } n=1: 1 = 2A + A = \frac{1}{2}$$

$$0 = A + B + C$$

$$0 = -3A - 2C - B +$$

$$0 = -2A - C \quad 0 = -1 - C \quad C = -1$$

$$0 = A + B + C \quad 0 = \frac{1}{2} + B - 1 \quad B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De aquí podemos concluir que:

$$n^3 \frac{1}{(n^3 - 3n^2 + 2n)} = n^3 \left(\frac{1/2}{n} - \frac{1}{(n-1)} + \frac{1/2}{(n-2)} \right) = \frac{1}{2} n^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{(n-1)} + \frac{1}{(n-2)} \right)$$

$$! a_n = \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{2}{(n-1)} + \frac{1}{(n-2)}$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - 1 + 1$$

$$a_4 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}$$

$$a_6 = \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-3} + \frac{1}{n-4}$$

$$a_6 = \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n-4} + \frac{1}{n-3}$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n-2} +$$

$$S_n n^3 = \frac{1}{n} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$n! n! n! n! \quad n^3 \frac{1}{[n^3 - 3n^2 + 2n]} = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$S = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2}$$

Series relacionadas con el número e: Serán series del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(n)}{(n+p)!} x^n$ $k = \text{gr.}(P)$

$$\text{Sabemos que } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Ejemplos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n!)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} - (1 + 1) = e - 2$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{[(n-1)!]} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n!)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)} - (1 + 1) = e - 2$$

Estudiar cual es la suma de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{[(n+2)!]}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$n / [(n + 2)!] + [M(n+2)]/[(n + 2)!] + N /[(n + 2)!] = [Mn + 2M + N]/[(n + 2)!]$$

De aquí podemos sacar que:

$$\text{Para } n = 1 = M$$

$$\text{Para t.i. } 0 = 2M + N \quad N = -2M = -2$$

Podemos concluir que:

$$n! n / [(n + 2)!] = n! [(n+2)/(n+2)!] - 2/(n + 2)!$$

$$n! (n+2)/(n+2)! = 1/(n+1)! = e - 2$$

$$n! n / [(n + 2)!] = e - 2 - 2(e - 5/2) = 3 - e$$

$$n! 1 / [(n - 2)!] = e - 5/2$$

6.9. Integrales impropias.

Son integrales impropias, aquellas que en vez de hallarse en un intervalo cerrado $[a, b]$, se encuentra en un intervalo abierto, semiabierto o semicerrado del tipo $(-, +)$; $(-, b]$; $[a, +)$. De aquí podemos decir, que las integrales impropias podrán ser de los siguientes tipos:

- $a^- f(x) dx$ // $-b^+ f(x) dx$ // $-\infty^+ f(x) dx$ serán de la 1ª especie
- $a-b f(x) dx$ // $ab^- f(x) dx$ // $a+b^- f(x) dx$ serán de la 2ª especie

Integrales impropias de 1ª especie:

Si para $ab f(x) dx$ existe $\lim_{b \rightarrow a} \int_a^b f(x) dx$; definimos $I(b) = \int_a^b f(x) dx$; entonces esta integral será convergente si $\lim_{b \rightarrow a} \int_a^b f(x) dx = a^- f(x) dx = \text{un número real}$

Ejemplo: $\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow a} (-1/b) + 1 = 1 - 1/a$! converge

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = -1/x \Big|_a^b = (-1/b) - (-1/a)$$

Del mismo modo, se resolverían las del tipo $-b^+ f(x) dx$

Las del tipo $-\infty^+ f(x) dx$ convergerán si convergen $-c^+ f(x) dx$ y $c^+ f(x) dx$, ya que $-\infty^+ f(x) dx = -c^+ f(x) dx + c^+ f(x) dx$; y su valor es la suma de los valores de estas integrales.

Ejemplos:

$$1. -\infty^+ \frac{dx}{x^2} = -c^+ \frac{dx}{x^2} + c^+ \frac{dx}{x^2} !$$

$-c^+ \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow c} \int_a^c \frac{dx}{x^2} = (-1/c) - (-1/a) = -1/c$ que sólo convergerá cuando $c \neq 0$, como no converge $c^+ \frac{dx}{x^2}$, esta integral no tiene solución.

$$2. -\infty^+ x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_a^b x^{-p} dx + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 x^{-p} dx$$

$p=1$ $\lim_{b \rightarrow -\infty} \ln b - \ln 1 = \infty$! para $p=1$, es divergente y no hay solución

$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-p} dx$ $p > 1$ $1/(p-1)$ conv.

$$p > 1 \quad \lim_{b \rightarrow \infty} (x^{-p+1})/(-p+1) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{-p+1} - a^{-p+1})/(-p+1) =$$

$p < 1$ " div.

Como en el ejemplo anterior, como no converge "c", la integral no posee solución.

Integrales impropias de 2ª especie:

Tomemos una función f , si está definida en $(a, b]$ y si $I(t) = \int_a^t f(x) dx$ que existe $a < t < b$, será $I(t)$ impropia si existe "t" (a, b) de 2ª especie por ser un intervalo abierto.

Y diremos que $\int_a^b f(x) dx$ converge si $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_a^t f(x) dx$ y este es finito, si este límite no existe, entonces el límite será divergente.

Del mismo modo, tomemos una función f , si está definida en $[a, b)$ y si $I(t) = \int_t^b f(x) dx$ que existe $a < t < b$, será $I(t)$ impropia si existe "t" (a, b) de 2ª especie por ser un intervalo abierto.

Y diremos que $\int_a^b f(x) dx$ converge si $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_t^b f(x) dx$ y este es finito, si este límite no existe, entonces el límite será divergente.

Si ahora una función f está definida en (a, b) y si $I = \int_a^b f(x) dx$; diremos que converge si existen $\int_a^c f(x) dx$ y $\int_c^b f(x) dx$ "c" (a, b) y además:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ (esto sólo ocurrirá si ambas son convergentes)}$$

Ejemplos:

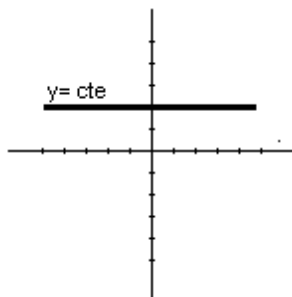
Hallar $\int_0^1 \frac{dx}{(x+4x^3)}$

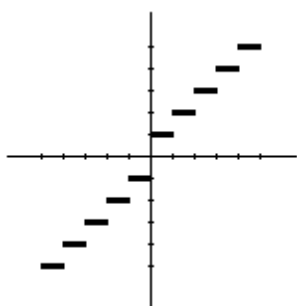
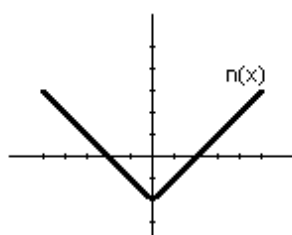
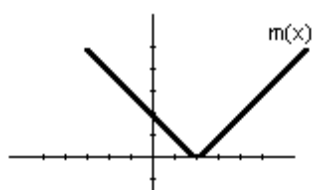
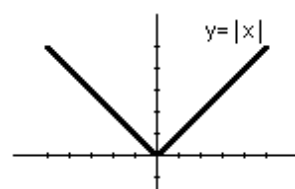
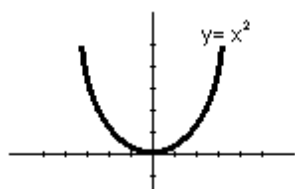
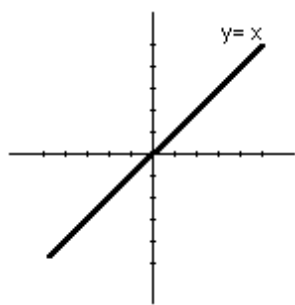
Si hacemos las comprobaciones oportunas, llegaremos a la conclusión de que esta integral tendrá el mismo carácter que $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, entonces podemos decir que:

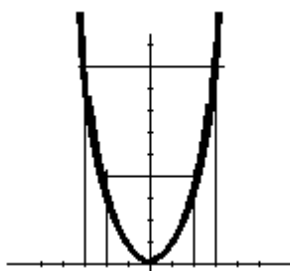
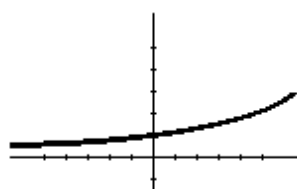
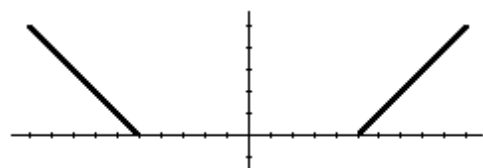
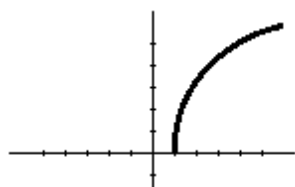
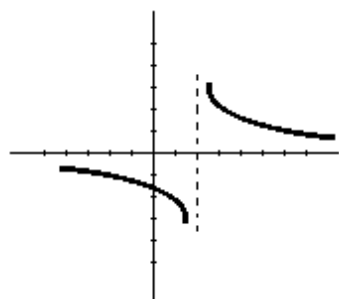
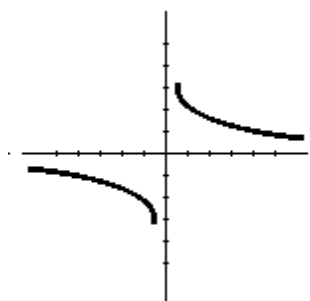
$$f(x) = \frac{1}{(x+4x^3)}$$

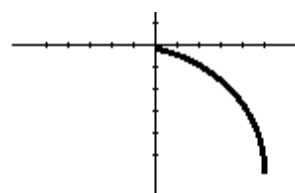
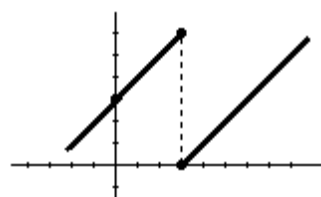
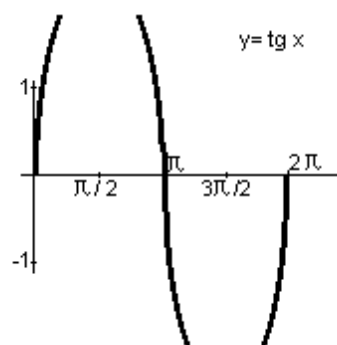
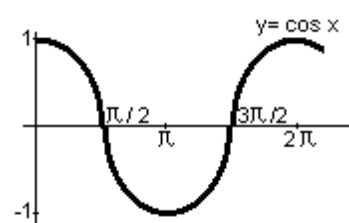
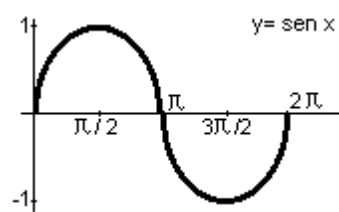
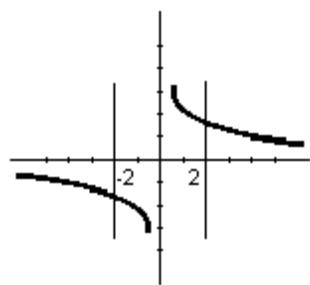
$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}_{x \rightarrow 0} \neq 0 \neq \left\{ \frac{(1/x)}{(1/(x+4x^3))} \right\}_{x \rightarrow 0} = \left\{ \frac{1}{(1+4x^2)} \right\}_{x \rightarrow 0} \neq 1$$

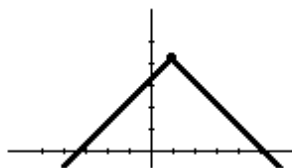
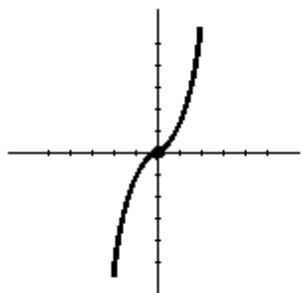
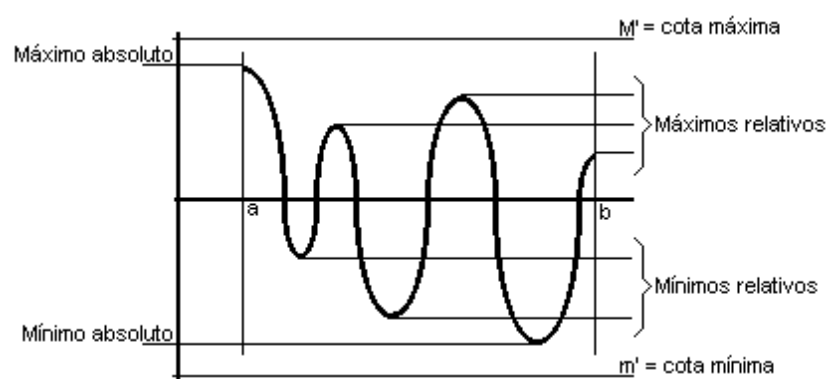
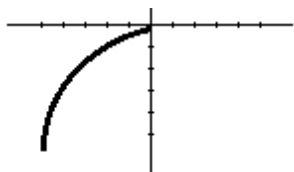
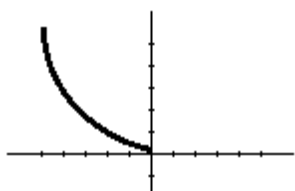
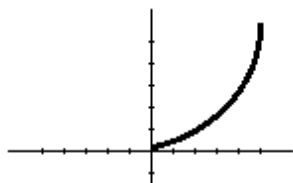
$$g(x) = 1/x$$

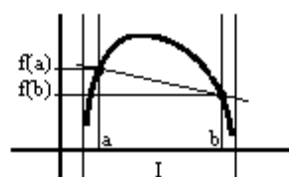
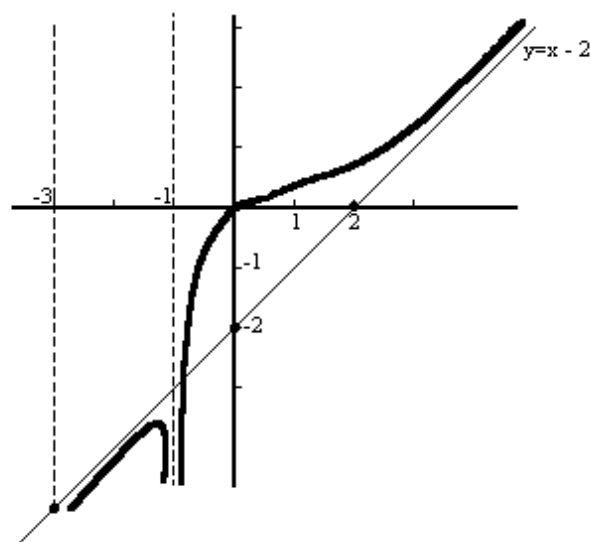
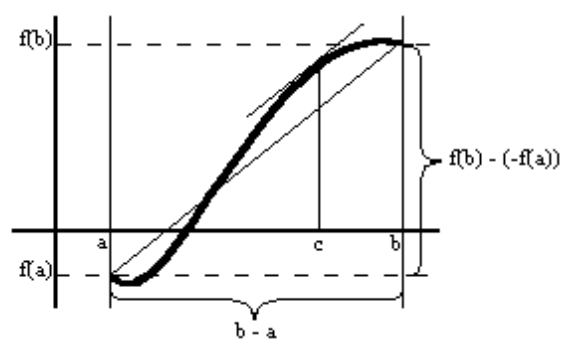
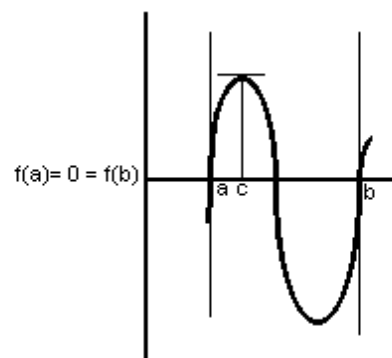
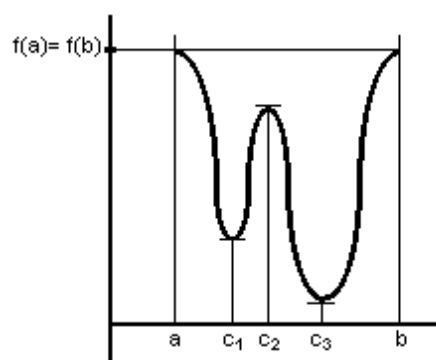


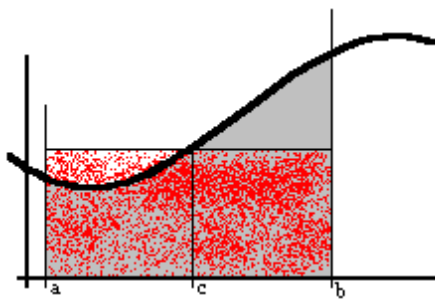
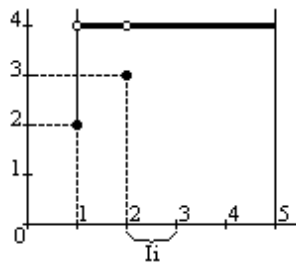
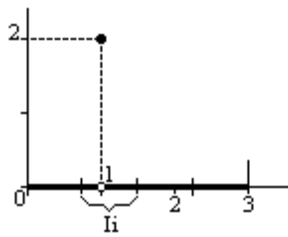
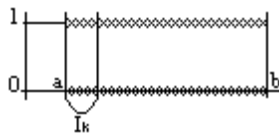
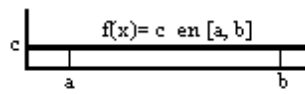
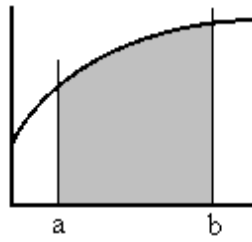
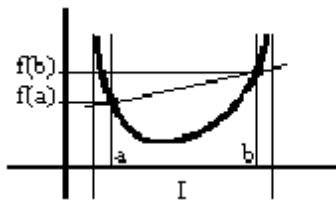


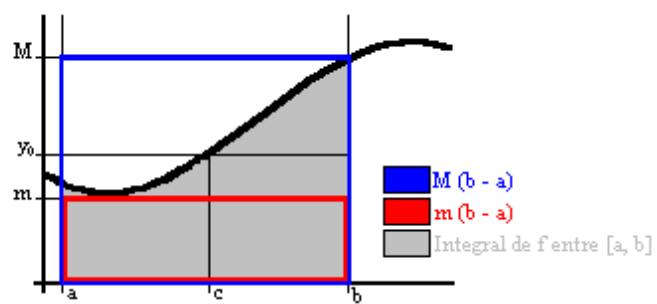












$\overline{f}$