

ÍNDEX

Definició de cònica com superfície de revolució 2

L'el·lipse

La hipèrbola

La paràbola

Definició de cònica com a lloc geomètric i elements

de cada tipus de cònica 3

L'el·lipse 3

La hipèrbola 4

La paràbola 5

I com a curiositat... 6

Bibliografia 6

LES CÒNIQUES

Definició de cònica com a secció d'una superfície de revolució:

Seccions planes d'una superfície cònica:

Una superfície cònica de revolució és una superfície formada en girar una recta del pla al voltant d'una recta fixa del mateix pla però que no sigui paral·lela a la primera.

Doncs si es considera una superfície cònica de revolució i es talla per un pla que no passi pel vèrtex, la corba obtinguda en la seva intersecció s'anomena **cònica**.

Segons la manera de tallar el pla s'obté un tipus de cònica o un altre. Així podem distingir entre:

- **L'el·lipse**, que és una corba tancada definida quan el pla talla totes les *generatrius** d'un sol full. Un cas particular és si el pla talla la superfície cònica perpendicularment a l'eix, aleshores l'el·lipse es transforma en una circumferència.
- **La hipèrbola**, que és una corba oberta amb dues branques definida quan el pla talla els dos fulls de la superfície cònica.
- **La paràbola**, que és una corba oberta d'una sola branca definida quan el pla secant és paral·lel a una generatriu de la superfície cònica.

El·lipse Hipèrbola Paràbola

Definició de cònica com a lloc geomètric i elements de cada cònica:

L'EL·LIPSE:

Una el·lipse és el lloc geomètric dels punts del pla en què la suma de les distàncies a dos punts fixos del mateix pla és constant.

Focus: Són els punts fixos F i F' .

Eix principal o eix focal de l'el·lipse: És la recta determinada pels focus FF' .

Distància focal: És la distància entre F i F' , FF' . S'acostuma designar-la amb $2c$.

Centre de l'el·lipse: És el punt mig del segment FF' . El centre es representa amb O .

Eix secundari: És la mediatriu de FF' .

Radis vectors del punt M : Són els segments $MF=d$ i $MF'=d'$.

Vèrtexs de l'el·lipse: Són els punts A, A', B i B' , que són els punts en què l'el·lipse talla els seus eixos.

Eix major: Segment AA' . La distància entre A i A' es designa amb $AA'=2a$.

Eix menor: Segment BB' . La distància entre B i B' es designa amb $BB'=2b$.

Si apliquem la definició que hem donat de l'el·lipse, tenim que: $MF+MF'=K$. Com que el punt A , a l'igual que A' , és de l'el·lipse, també segeuix els termes de la seva definició, així que $AF+AF'=k$, però també $A'F+A'F'=k$.

Així tenim que:

$AF+AF'=AF+AF+FF'=k$ $A'F+A'F'=A'F'+FF'+A'F'=k$

Per tant:

$2AF+2A'F'+2FF'=2k$

o bé $AF+FF'+A'F'=K$

Per altra banda, sabem que $AF+FF'+A'F'=AA'=2a$, per tant k també serà $2a$. $MF+MF'=2a$ o bé $d+d'=2a$.

Suposem que $BB'=2b$. Com que B és un punt de l'el·lipse, es compleix que

$BF+BF'=2a$, per tant, posat que $BF=BF'$ tenim que $BF+BF'=2a$, així que $2BF=2a$, és a dir que $a=BF$. Ens queda un triangle rectangle de catets b i c i d'hipotenusa a .

Així, aplicant el teorema de pitàgores tenim que:

$$a = b + c \text{ o bé } b = a - c ; c = a - b$$

LA HIPÈRBOLA:

Una hipèrbola és el lloc geomètric dels punts del pla en què la diferència de distàncies a dos punts fixos del mateix pla és constant.

Focus: Són els punts fixos F i F' .

Eix real o transvers: És la recta que determinen els focus.

Distància focal: És la distància entre F i F' , FF' . Se la sol designar per $2c$.

Centre: És el punt mig del segment FF' .

Eix no transvers o imaginari: És la mediatriu de FF' .

Radis vectors del punt M : Són els segments $MF=d$ i $MF'=d'$.

Vèrtexs: Són els punts A i A' , en què la hipèrbola talla l'eix transvers. La distància entre A i A' se la designa per $AA'=2a$.

Si apliquem la definició que hem donat d'hipèrbola, tenim que:

$MF - MF' = K$. Ara bé, com que el punt A és de l'hipèrbola (i igual que el punt A'), també ha de complir la definició, per tant: $AF' - AF = k$, però també $A'F - AF' = k$.

Així tenim que:

$$AF' - AF = A'F' + AA' - AF = k$$

$$A'F - A'F' = AF + AA' - A'F' = k$$

Per tant:

$$A'F' + AA' - AF + AF + AA' - A'F' = 2k ; \text{ és a dir que } AA' = k$$

D'altra banda, com que $AA' = 2a$, k també podrà ser representada per $k = 2a$, per tant $MF - MF' = 2a$, és a dir que $d - d' = 2a$.

LA PARÀBOLA:

Una paràbola és el lloc geomètric dels punts d'un pla que equidisten d'un punt fix i d'una recta fixa.

Directriu: És la recta fixa. S'anomena d .

Focus: És el punt fix i s'anomena F .

Paràmetre: És la distància DF que separa el focus i la directriu. Es representa amb p .

Eix: És la recta que passa pel focus i que és perpendicular a la directriu.

Vèrtex: Punt A on la paràbola talla l'eix.

Radi vector del punt M : És el segment que uneix un punt M qualsevol de la paràbola amb el focus.

Com que, com ja hem dit, la distància entre qualsevol punt de la directriu (que els anomenarem punts C) i qualsevol punt de la paràbola (anomenats punts M) és la mateixa que la distància entre aquest punt M i el focus (F), l'equació que determina qualsevol paràbola és la següent:

$$MF = MC \quad MF = MC$$

$$M'F = M'C'$$

$$M''F = M''C''$$

....

I com a curiositat... una mica d'història:

Els grecs, en especial Apoloni (200 aC), ja havien fet estudis exhaustius de les còniques.

Fins al segle XVII no es van tornar a estudiar en profunditat i va ser gràcies, sobretot, al descobriment de Kepler (1571–1630) que les òrbites dels planetes al voltant del Sol no són circumferències com havia dit Copèrnic (1473–1543), sinó el·lipses, en les que el Sol ocupa un dels focus. A més, va establir les tres lleis sobre el moviment dels planetes:

1) Els planetes es mouen al voltant del Sol seguint òrbites el·líptiques, i en un dels seus focus hi ha el Sol.

2) El radi vector que va del Sol a un planeta, ramassa àrees iguals en temps iguals.

3) Els quadrats dels temps que tarda cada planeta en recórrer la seva òrbita completa són proporcionals als cubs dels semieixos majors de les òrbites, que vol dir que $T^2 / a^3 = k$ és la mateixa per a tots els planetes.

Newton (1642–1727), més endavant, va demostrar la llei de la gravitació universal i va crear el càlcul infinitesimal. Fins aleshores, la teoria de les seccions còniques només havia sigut un model per raonar.

A Laplace (1749–1827) se'l pot considerar el creador de la interpretació de la mecànica dels cossos celestes i va dir: tot enllaça en la cadena de les veritats. Res sembla més fútil que les especulacions dels geòmetres antics sobre les seccions d'un con; al cap de dos mil anys, aquestes han fet descobrir Kepler les lleis naturals del sistema planetari. El que sabem és ben poca cosa; el que ignorem és immens.

Bibliografia:

Nova enciclopèdia Catalana de l'Estudiant, diversos autors.

Volum 1 (Matemàtiques. Informàtica) ; Editorial Carroggio

Generatriu: Hipotenusa del triangle rectangle que crea un con recte quan gira.