

## Dispersión y Resolución del Prisma

### Resumen

El índice de refracción será analizado en este proyecto para diferentes líquidos y prismas de características distintas, el cual está determinado como una función de la longitud de onda por refracción de la luz a través del prisma a la mínima desviación. Como se ha demostrado, el haz o rayo de luz que emerge de un prisma está más disperso que el incidente, con el fin de que la dispersión sea grande comparada con la anchura del haz se utiliza un haz muy estrecho. Además observamos que la luz incidente ya no es blanca, en su lugar se observa un espectro brillante de diversos colores los cuales tienen una determinada desviación, la que viene dada por el ángulo que forman las superficies a través de las cuales pasa la luz, por la dirección de incidencia en la primera cara y por el índice de refracción del prisma. De estas magnitudes, la única que puede diferir para los diferentes colores de la luz es el índice de refracción. Después de este análisis se deduce que las propiedades refringentes de una sustancia dependen del índice de refracción, podemos observar y demostrar experimentalmente que éste depende del color de la luz.

Para estudiar las longitudes de onda emitidas por una fuente de luz, en este caso luz de mercurio, usamos un espectrómetro de prisma (Fig. 1 y 2), el cual es usado comúnmente para estudiar las longitudes de onda emitidas por una fuente de luz. La luz emitida por la fuente pasa a través de una rendija angosta que se puede ajustar para generar un haz paralelo o colimado. La luz pasa a través del prisma donde se descompone en su espectro. Se utiliza el telescopio para observar la luz difractada. Nosotros podemos ver la imagen de la ranura a través del ocular del telescopio. Para poder observar varias de las imágenes formadas por las distintas longitudes de onda en sus diferentes ángulos de desviación, se gira ya sea el telescopio o el prisma. Observamos a través del telescopio la luz que entra donde se fija el ángulo  $0^\circ$  en círculo graduado. La luz pasa a través de un prisma donde se descompone en su espectro.

Se utiliza el lente del telescopio, que es usado como amplificador, para observar la luz refractada, se gira el telescopio hacia la izquierda hasta encontrar el espectro, luego giramos el prisma para buscar la desviación mínima. Nos ubicamos en cada línea espectral y medimos el ángulo para cada una en el círculo de Vernier que forma con el eje principal.

Para lo cual obtuvimos datos experimentales para distintos prismas; prisma de cristal de diferentes ángulos, prisma de plástico, y diferentes densidades colocadas en un prisma hueco; metanol, tetracloruro de carbono, agua, agua con sal, agua con azúcar.

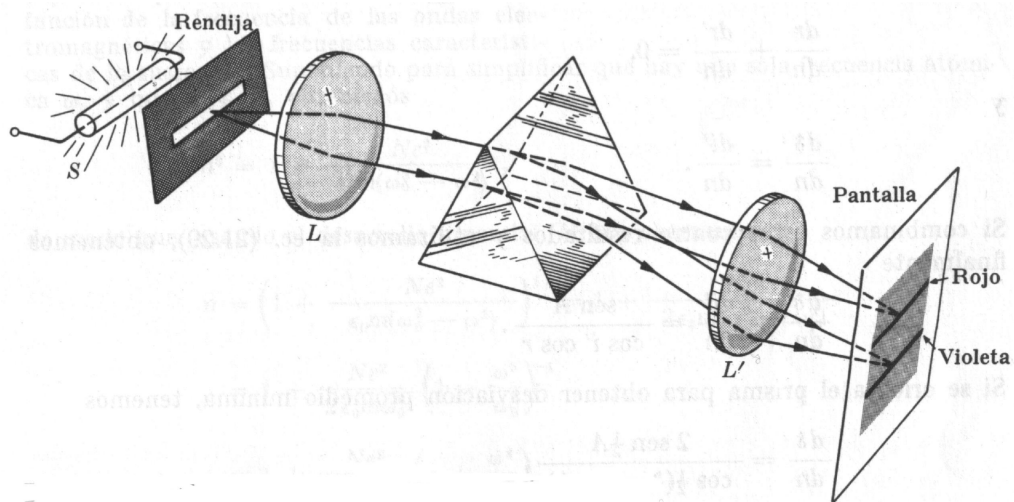
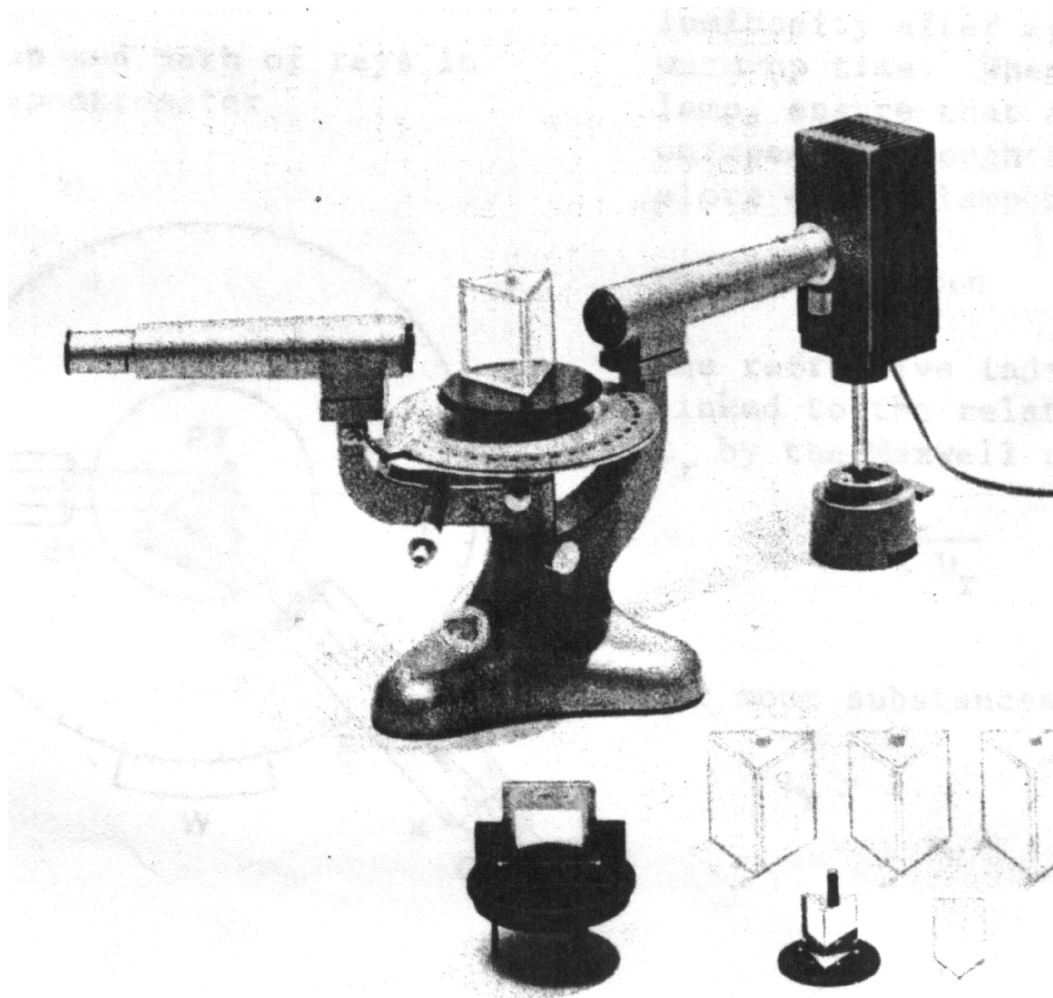


Fig. 2

Fig.1

Ahora para obtener la longitud de onda de cada línea espectral colocamos en lugar de un prisma una rejilla de 15000 líneas por pulgada (Fig. 3), que corresponde a una red de difracción con el objetivo de analizar la luz visible, con lo cual observamos una difracción de la luz. Cuando sobre nuestra red incide luz perpendicular de diversas longitudes de onda, estas producen máximos de difracción a diferentes ángulos, excepto para el orden cero, que corresponde al mismo para todas. El conjunto de máximos de un orden dado para todas las longitudes de onda constituye un espectro el cual puede ser de primer y segundo orden y así sucesivamente. Luego con el lente del telescopio ubicamos la línea central y en ese punto fijamos el ángulo  $0^\circ$ , giramos el telescopio hasta encontrar el espectro más brillante que corresponde al de orden 1, nos ubicamos en cada línea espectral y medimos el ángulo para cada una, en el círculo de Vernier, que forma con el eje principal, así obtenemos para cada color su longitud de onda.

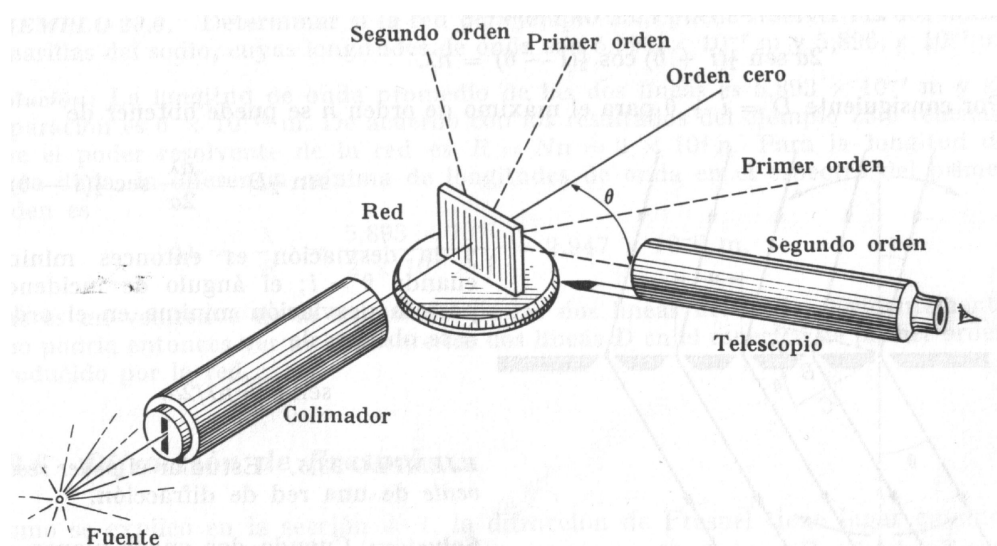


Fig.3

En el desarrollo del tema lo primero que debemos obtener es la longitud de onda de cada color.

Se pudo observar que la rendija actúa como una fuente de ondas, donde todas las ondas al salir de la rendija se encuentran en fase. Estamos en presencia de una combinación de difracción e interferencia.

Además, para el ángulo medido desde la horizontal las ondas deben recorrer diferentes longitudes de camino óptico antes de alcanzar un punto cualquiera en la pantalla.

Debe notarse que la diferencia de camino entre las ondas de dos ranuras consecutivas es igual a  $d \sin \theta$ . Si esta diferencia de camino es igual a un múltiplo entero de longitudes de onda diremos que las ondas de todas las ranuras estarán en fase en un punto P donde observaremos una línea brillante, por lo tanto la condición de máximo en el patrón de interferencia para un ángulo  $\theta$  es:

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (m=0,1,2,\dots)$$

Expresión que podemos utilizar para calcular la longitud de onda conociendo el ancho  $d$  de cada rejilla y el ángulo de desviación  $\theta$ ,  $m$  representa el número de orden del patrón de difracción. Luego del análisis teórico procedemos a confirmarlo experimentalmente. A continuación presentamos las mediciones obtenidas bajo las condiciones de:

$$d = 1.693 \times 10^{-3} \text{ m} \quad n = 1$$

$$\lambda = 1.693 \times 10^{-3} \sin \theta$$

| Ángulo ( $^\circ$ ) | ( $10^{-3} \text{ m}$ ) | Color    |
|---------------------|-------------------------|----------|
| $0^\circ$           | —                       | Blanca   |
| $14^\circ$          | 4.09                    | Violeta  |
| $15^\circ$          | 4.38                    | Azul     |
| $17^\circ$          | 4.95                    | Verde    |
| $19^\circ$          | 5.51                    | Amarillo |
| $20^\circ$          | 5.79                    | Naranja  |
| $22^\circ$          | 6.34                    | Rojo     |

Se puede observar que a medida que aumenta el ángulo de desviación, aumenta la longitud de onda. En consecuencia el rojo se desvía más que el violeta.

Las mediciones obtenidas fueron respecto al primer orden debido a que este es más fácil de distinguir a simple vista, pues es más brillante.

Ahora analizaremos cuando un rayo de luz incide sobre un prisma el cual es un medio limitado por dos superficies planas que forman un ángulo  $A$ . Suponemos que el medio tiene un índice de refracción  $n$  y que está rodeado de un medio cuyo índice de refracción es la unidad, en este caso el aire. Sabiendo que el índice de refracción es diferente para las distintas longitudes de onda de la luz; debido a que  $n$  es función de la longitud de onda, la *ley de Snell* predice que una luz de diferente longitud de onda se desviará a distinto ángulo cuando incide sobre un material refractante. Se puede decir que los índices de refracción disminuyen al aumentar la longitud de onda, lo que implica que la luz azul se desviará más que la luz roja al pasar a través de un material refractante. Cualquier sustancia en la cual  $n$  varía con la longitud de onda se llama medio dispersor.

Un rayo que incide por la izquierda o sea PQ sufre dos difracciones y emerge desviándose de su dirección original de incidencia un ángulo llamado *ángulo de desviación*. Considerando en nuestro caso una luz de Mercurio que incide sobre un prisma; los rayos que emergen en la segunda cara se abren en una serie de colores conocido como *Espectro*, estos colores en orden de longitud de onda decreciente son: rojo, naranja, amarillo, verde, azul y violeta. Gracias a Newton sabemos que cada uno de estos colores tiene un ángulo de desviación particular, que no es posible descomponer el espectro aún más y que los colores se pueden recombinar para formar la luz que incidió originalmente. Con el espectrómetro de prisma buscamos estudiar las longitudes de onda emitidas por la fuente de luz de Mercurio. Se puede observar el rayo incidente y el rayo emergente (Fig. 4)



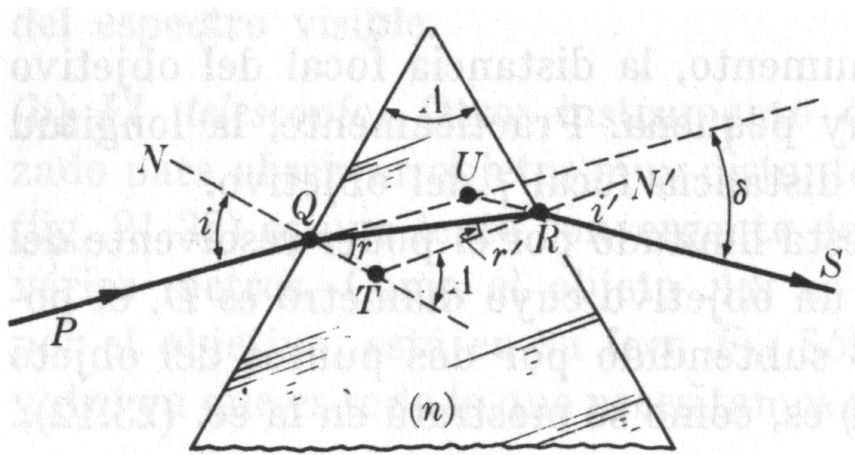


Fig.4

En la figura fácilmente se puede ver que valen las siguientes relaciones:

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r \quad (1.0)$$

$$\text{sen } i' = n \text{ sen } r' \quad (1.1)$$

$$r + r' = A \quad (1.2)$$

$$= i + i' - A \quad (1.3)$$

La primera y segunda ecuación son simplemente la ley de Snell aplicada a las refracciones en Q y en R. La tercera se obtiene usando el triángulo QTP y la cuarta usando el triángulo QRU. Las tres primeras ecuaciones sirven para trazar el rayo, y la cuarta nos permite hallar la desviación.

Hay un rayo particular para el cual la desviación es mínima; se obtiene haciendo  $d\delta/di = 0$ . De la ecuación (1.3) obtenemos:

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

Y para que  $d\delta/di = 0$  debemos tener:

$$\frac{di'}{di} = -1$$

De las ecuaciones (1.1) y (1.2) tenemos

$$\cos i \, di = n \cos r \, dr$$

$$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$$

$$dr = -dr'$$

En consecuencia:

$$\frac{di'}{di} = \frac{\cos(i) \cos(r')}{\cos(i') \cos(r)}$$

Como los cuatro ángulos  $i$ ,  $r$ ,  $i'$  y  $r'$  son menores que  $y$  satisfacen las condiciones simétricas (1.0) y (1.1) se pueden satisfacer simultáneamente las ecuaciones (1.4) y (1.5) solamente si  $i = i'$  y  $r = r'$ , para lo cual debe ser:

$$I = \frac{1}{2} (\delta_{\min} + A) \quad r = \frac{1}{2} A$$

Donde  $\delta_{\min}$  es la desviación mínima. Nótese que en este caso el camino del rayo es simétrico respecto a las dos caras del prisma. Introduciendo la ecuación (1.6) en la ecuación (1.0) obtenemos

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)}{\sin \frac{1}{2}A}$$

Que es una formula conveniente para medir el índice de refracción de una sustancia, hallando  $\delta_{\min}$  experimentalmente en un prisma de ángulo  $A$  conocido.

Experimentalmente logramos obtener variados  $n$ . Los datos fueron los siguientes para:

Prisma = Flint glass

$$A = 60^\circ$$

| min  | Color    |      | N     |
|------|----------|------|-------|
| 40.8 | Naranja  | 5.79 | 1.541 |
| 41.0 | Amarillo | 5.51 | 1.543 |
| 41.3 | Verde    | 4.95 | 1.547 |
| 31.9 | Azul     | 4.38 | 1.553 |
| 42.2 | Violeta  | 4.09 | 1.557 |

Prisma = Flint glass

$$A = 40^\circ$$

| min  | Color    |      | N     |
|------|----------|------|-------|
| 24.5 | Naranja  | 5.79 | 1.560 |
| 24.6 | Amarillo | 5.51 | 1.562 |
| 25.0 | Azul     | 4.38 | 1.571 |
| 25.1 | Violeta  | 4.09 | 1.573 |

Estos datos nos dan la grafica 1 que se muestra a continuación, lo cual nos demuestra que el  $n$  es definido para cada material como en este sólo cambio  $A$ , que es el ángulo formado por las dos superficies planas a través de las cuales pasa la luz, la variación de los  $n$  es mínima.

Además se realizaron mediciones para distintos tipos de prismas y prismas con diversos líquidos, para poder observar así la variación que presentan los n.

Prisma = Cuarzo.

A = 60°.

Prisma = Plástico

A = 60°

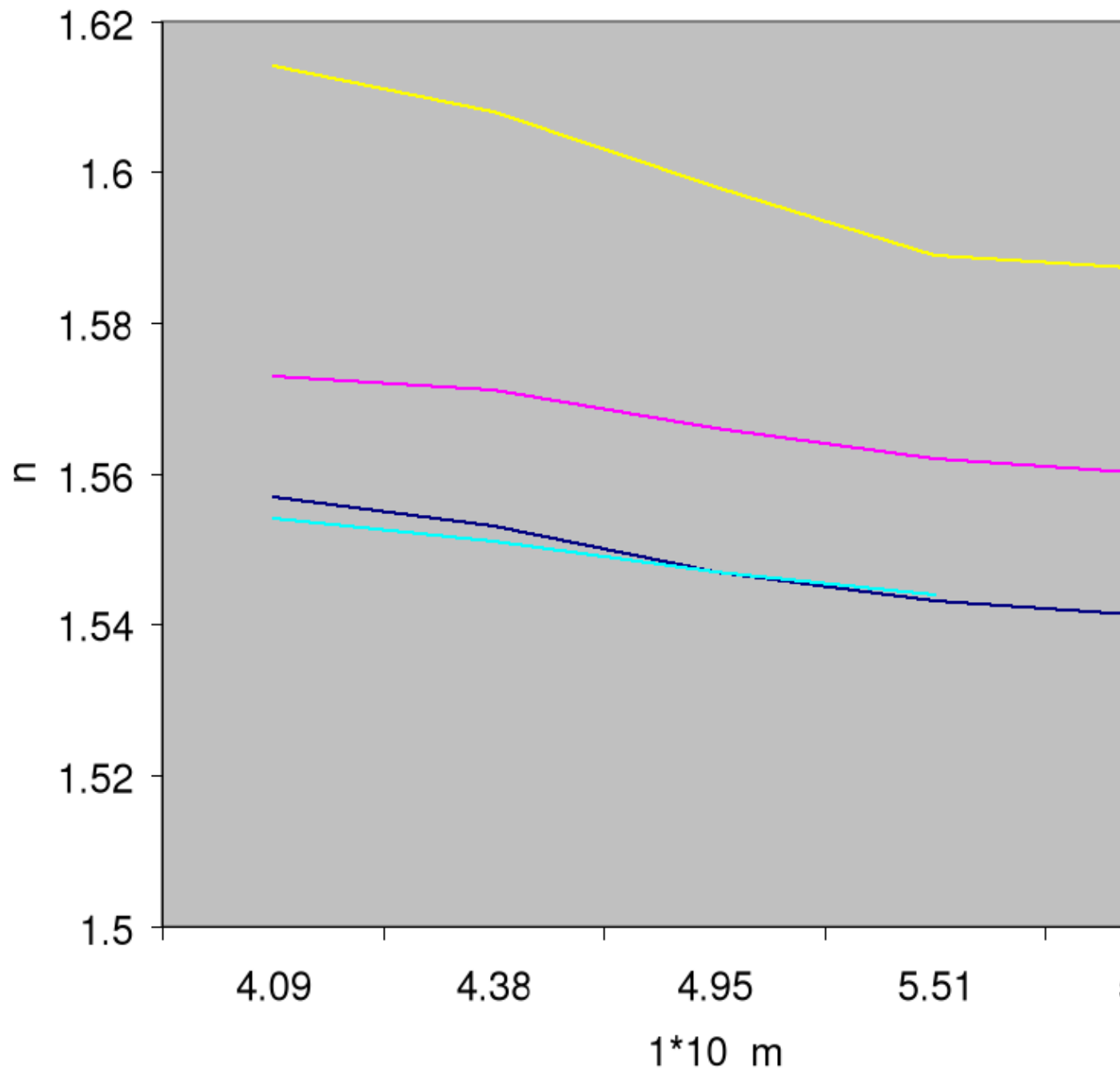
| min  | Color    |      | n     |
|------|----------|------|-------|
| 41.1 | Naranja  | 5.79 | 1.544 |
| 41.7 | Amarillo | 5.51 | 1.551 |
| 42.0 | Azul     | 4.38 | 1.554 |

Se pudo observar que las líneas espectrales se encontraban menos nítidas y además eran muy delgadas y solo se podían observar tres colores

| min  | Color    |      | N     |
|------|----------|------|-------|
| 45.0 | Naranja  | 5.79 | 1.587 |
| 45.3 | Amarillo | 5.51 | 1.589 |
| 46.1 | Verde    | 4.95 | 1.598 |
| 47.0 | Azul     | 4.38 | 1.607 |
| 47.6 | Violeta  | 4.09 | 1.613 |

En este espectro se logra observar una mayor nitidez y una amplia gama de longitudes de onda.

## Diferentes Prismas



Prisma hueco con agua

$A = 60^\circ$

| min  | Color   |      | n     |
|------|---------|------|-------|
| 24.1 | Naranja | 5.79 | 1.339 |

|      |          |      |       |
|------|----------|------|-------|
| 24.5 | Amarillo | 5.51 | 1.345 |
| 25.0 | Azul     | 4.38 | 1.351 |
| 25.1 | Violeta  | 4.09 | 1.352 |

Prisma hueco con Metanol

$A = 60^\circ$

| min  | Color    |      | n     |
|------|----------|------|-------|
| 30.7 | Rojo     | 6.34 | 1.423 |
| 30.8 | Naranja  | 5.79 | 1.424 |
| 30.9 | Amarillo | 5.51 | 1.425 |
| 31.0 | Verde    | 4.95 | 1.427 |
| 31.5 | Azul     | 4.38 | 1.433 |

Se observan con esta solución que las líneas espectrales se encuentran extremadamente juntas.

Prisma hueco con  $\text{CCl}_4$

$A = 60^\circ$

| min  | Color   |      | N     |
|------|---------|------|-------|
| 35.0 | Rojo    | 6.34 | 1.475 |
| 35.2 | Naranja | 5.79 | 1.477 |
| 35.4 | Verde   | 4.95 | 1.479 |
| 36.4 | Azul    | 4.38 | 1.491 |

El tetracloruro de carbono tiene la propiedad de poseer fuerzas intermoleculares de dispersión

Prisma hueco con  $\text{NaCl}$

$A = 60^\circ$ .

| min  | Color    |      | N     |
|------|----------|------|-------|
| 31.6 | Naranja  | 5.79 | 1.434 |
| 31.9 | Amarillo | 5.51 | 1.437 |
| 32.8 | Azul     | 4.38 | 1.448 |

Prisma hueco con glucosa

$$A = 60^\circ$$

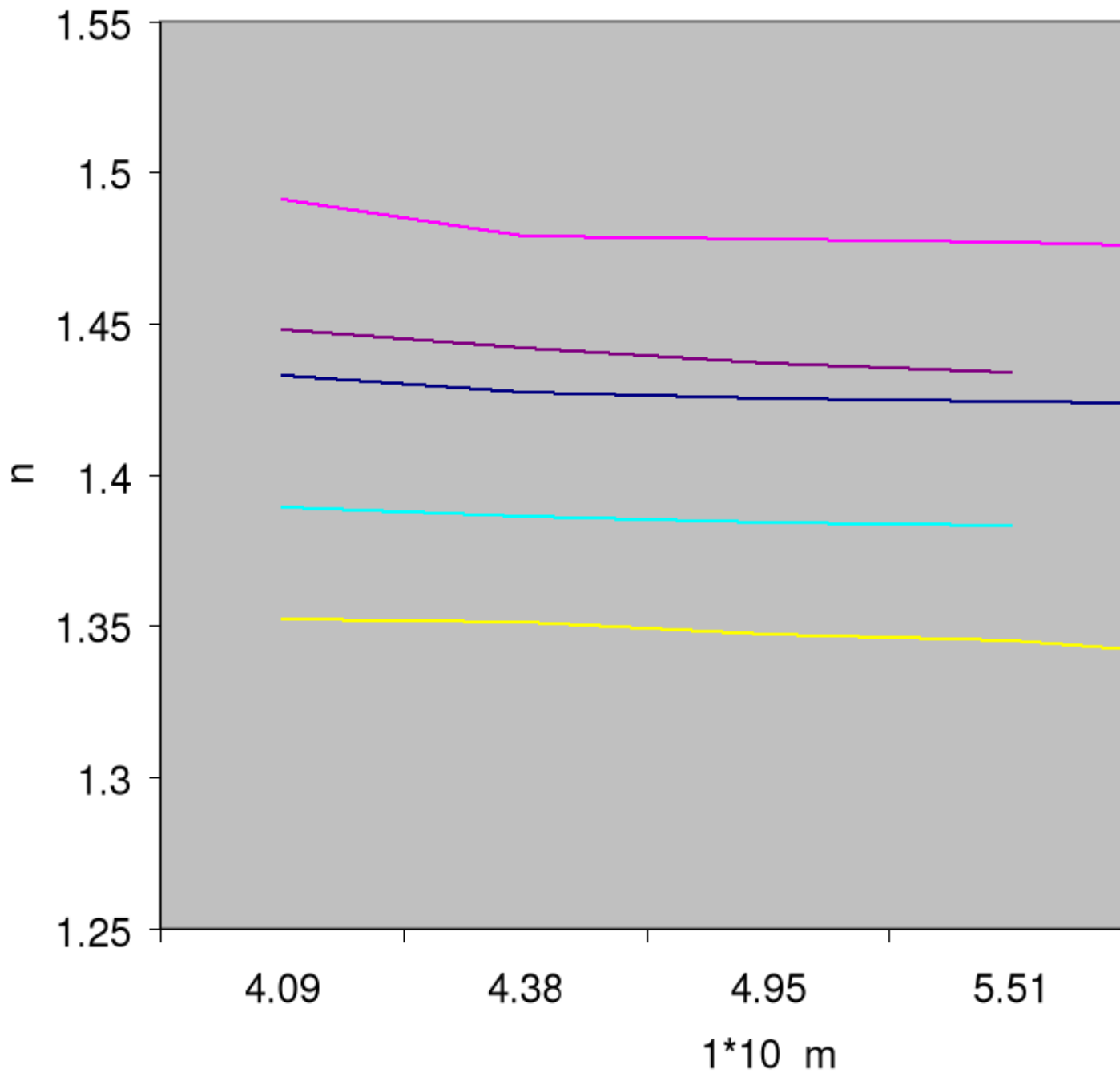
| min  | Color    |      | N     |
|------|----------|------|-------|
| 27.5 | Naranja  | 5.79 | 1.383 |
| 27.6 | Amarillo | 5.51 | 1.384 |
| 28.0 | Azul     | 4.38 | 1.389 |

Al realizar estos experimentos con sal y azúcar quisimos llevarlos mas a la realidad, a la vida común y darnos cuenta que todas las soluciones tienen su propio índice de refracción. En las observaciones nos percatamos que solo se distinguen tres líneas espectrales comunes para ambas soluciones; Naranja, Amarillo, Azul.

A continuación mostraremos un grafico que relaciona todos las mediciones realizadas con distintos compuestos (líquidos transparentes)

El grafico relaciona los índices de refracción versus las longitudes de onda de cada línea espectral.

## Liquidos



Como hemos podido observar una onda que se refracta en un medio dispersivo cuyo índice de refracción depende de la frecuencia, el ángulo de refracción también depende de la frecuencia o de la longitud de onda. Como la luz incidente no es monocromática, o sea se compone de varias frecuencias o longitudes de ondas superpuestas, cada onda se refracta con un ángulo diferente; este fenómeno se llama dispersión. Observamos que en el prisma este fenómeno es mucho más notorio, especialmente en los bordes.

La dispersión de un prisma se define por:

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda}$$

El factor  $d/dn$  depende fundamentalmente de la geometría del sistema, en cambio el factor  $d/d$  depende del material del que esta compuesto el prisma. Derivando las ecuaciones (1.0) a (1.3), con respecto al índice de refracción  $n$  encontramos que:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dn} + \frac{dr'}{dn} &= 0 \\ \frac{d\delta}{dn} &= \frac{di'}{dn} \\ \cos i' \frac{di'}{dn} &= \sin r' + n \cos r' \frac{dr'}{dn} \\ 0 &= \sin r + n \cos r \frac{dr}{dn} \end{aligned}$$

Si combinamos estos cuatro resultados y utilizamos la ecuación(1.2), obtenemos finalmente:

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn} = \frac{\sin A}{\cos(i') \cos(r)}$$

Si se orienta el prisma para obtener desviación mínima, tenemos:

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{2 \sin 1/2 A}{\cos 1/2(\delta_{\min} + 1/2)}$$

El segundo factor  $dn/d$  en la ecuación (1.8) depende de la naturaleza de las ondas y del medio. Para las ondas electromagnéticas en general y para la luz en particular, una expresión aproximada y satisfactoria para el índice de refracción en función de la longitud de onda esta dada por la formula de Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}$$

Donde A y B son constantes características de cada sustancia como mostramos en los gráficos anteriores, la variación de  $n$  con respecto a  $\lambda$  para diversos materiales y líquidos transparentes. De la ecuación (1.9) obtenemos:

La dispersión en un prisma es entonces:

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \sin 1/2 A}{\cos 1/2(\delta_{\min} + A)} - \frac{2B}{\lambda^3}$$

El signo negativo significa que disminuye cuando la longitud de onda aumenta, de modo que el rojo se desvía menos que el violeta. Logramos confirmar que cuando el cambio de dirección de la luz es mayor, el índice de refracción del medio también lo es lo que concuerda con la ley de Snell. Del grafico observamos que los índices de refracción para cada material varia según la línea espectral en que fue medida, además que este no tiene una mayor variación



Después de hacer las mediciones nos percatamos de que el prisma tiene la desventaja sobre la red de difracción ya que de este solo depende de su geometría, en cambio el prisma depende de las propiedades dispersivas del material.

## Bibliografía

Alonso Finn Física. Volumen II

Campos y Ondas

Edit. Iberoamericana

Raymond Serway Física. Volumen II

Edit. McGraw-Hill

P.S.S.C. Física. Volumen I

Edit. Reverté

Raymond Chang Química

Edit. McGraw-Hill.

MERCK Productos Químicos.

Edit. Merck.

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

$$\frac{di'}{di} = -1$$

$$\frac{di'}{di} = \frac{\cos(i) \cos(r')}{\cos(i') \cos(r)}$$

$$n = \frac{\sin 1/2(\delta_{\text{mín}} + A)}{\sin 1/2 A}$$

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \frac{dn}{d\lambda}$$

$$0 = \sin r + n \cos r \frac{dr}{dn}$$

$$\cos i' \frac{di'}{dn} = \sin r' + n \cos r' \frac{dr'}{dn}$$

$$\frac{dr}{dn} + \frac{dr'}{dn} = 0$$

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn} = \frac{\text{sen } A}{\cos(i') \cos(r)}$$

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn}$$

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{2 \text{ sen } 1/2 A}{\cos 1/2(\delta_{\text{mir}} + 1/2)}$$

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}$$

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \text{ sen } 1/2 A}{\cos 1/2(\delta_{\text{ms}} + A)} \quad -\frac{2B}{\lambda^3}$$