

TEMA 5: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

MODELOS

DETERMINISTA PROBABILISTA

Un modelo probabilista nos permite deducir una Distribución de Probabilidad de resultados de un experimento aleatorio, siendo estos resultados los valores de la variable aleatoria.

Conceptos concretos

(Empíricos)

- Muestra
- Variable Estadística
- Frecuencia relativa (fir)
- Distribución de frecuencias.
- Media
- Variancia S^2
- D. Estándar. S

Conceptos abstractos

(Teóricos)

- Población
- Variable Aleatoria
- Probabilidad (p)
- Distribución de probabilidad.
- Media
- Variancia
- D. Estándar

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

- **Experimento aleatorio:** un experimento es considerado aleatorio si sus resultados son inciertos.
- **Variable aleatoria:** es aquella cuyos valores surgen asignando números, a los resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplo:

- Experimento aleatorio

Arrojar un dado

- Variable aleatoria

X = Número de puntos obtenidos al lanzar un dado

$x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$ $x_4 = 4$ $x_5 = 5$ $x_6 = 6$

- V. A. Discreta: Solo adopta valores aislados de un intervalo y no todos los que corresponden a él.
- V. A. Continua: Adopta cualquiera de los valores de un intervalo.

• Distribución de Probabilidad

Puede considerarse como una distribución de frecuencias relativas correspondiente a una población.

Las distribuciones de probabilidad son consideradas Teóricas en el sentido que se obtienen por un razonamiento lógico, en lugar de experimentos reales.

V. A. Discretas V. A. Continuas

- Binomial – Normal
- Poisson – t de Student
- Hipergeométrica. – Ji-Cuadrado ()
- F de Fisher

DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

Una distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta es un listado mutuamente excluyente, de todos los resultados numéricos posibles, tal que existe una probabilidad particular de ocurrencia asociada con cada uno de ellos.

Ejemplo

El experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de cuatro monedas.

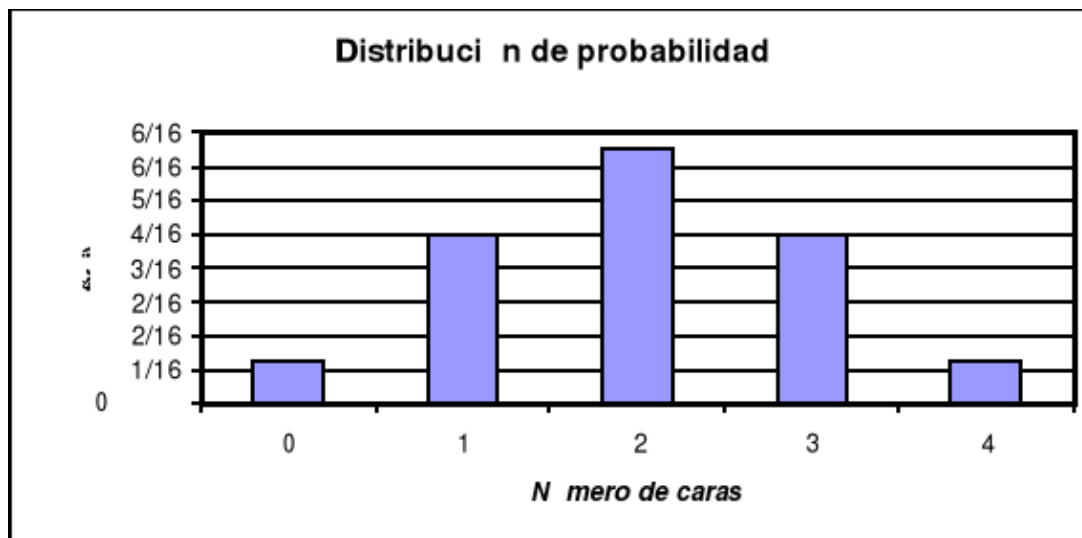
- ♦ ¿Cuales son los resultados posibles del experimento aleatorio para el suceso que salga cara?
- ♦ ¿Cuál es la probabilidad del número de caras en el experimento aleatorio?

Puntos de muestra	Número de Caras	Probabilidad
XXXX	0	1/16
XXXC	1	1/16
XXCX	1	1/16
XCXX	1	1/16
CXXX	1	1/16
CCXX	2	1/16
XCCX	2	1/16

XXCC	2	1/16
CXXC	2	1/16
CXCX	2	1/16
XCXC	2	1/16
CCCX	3	1/16
CCXC	3	1/16
CXCC	3	1/16
XCCC	3	1/16
CCCC	4	1/16

Distribución de frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas del número de caras al arrojar cuatro monedas.

Número de caras	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	1/16	1/16
1	4/16	5/16
2	6/16	11/16
3	4/16	15/16
4	1/16	16/16



Función de Probabilidad: $f(x_i)$

Si X es una variable aleatoria que puede asumir valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, con probabilidades asociadas $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, entonces el conjunto de pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, se llama **Función de probabilidad o Distribución de probabilidad de X** .

¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar cuatro monedas salgan dos caras?

$$F(2) = P(X = 2) = 6/16$$

- Requisitos

- ♦ La función $f(x_i)$, asume un valor numérico para todas las x_i , $1 \leq i \leq N$

- ♦ $f(x_i) \geq 0$ para cualquier valor posible de x .



Función de distribución acumulada: $F(x_i)$

Si X es una variable aleatoria y, x es un número real, la *Función de Distribución Acumulada de x* , representada por $F(x_i)$, muestra la probabilidad de que X asuma valores menores o iguales a x y se expresa:

¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar cuatro monedas salgan dos o menos caras?

$$F(2) = P(X \leq 2) = 11/16$$

• Requisitos:

- ♦ $0 \leq F(x) \leq 1$
- ♦ Si $a < b$, entonces $F(a) < F(b)$.
- ♦ $F(-\infty) = P(x \leq -\infty) = 0$ y $F(+\infty) = P(x \leq +\infty) = 1$

ESPERANZA MATEMÁTICA

El valor esperado o esperanza matemática de una variable aleatoria discreta es un promedio y se calcula como la suma de cada valor que toma la variable aleatoria multiplicada por su respectiva probabilidad.

$$x = E(X) = x_1 * f(x_1) + x_2 * f(x_2) + \dots + x_n * f(x_n)$$

$$E(x) =$$

El valor esperado de caras al arrojar cuatro monedas es

$$x = E(X) = 0 (1/16) + 1 (4/16) + 2 (6/16) + 3 (4/16) + 4 (1/16)$$

$$= 2 \text{ caras.}$$

VARIANCIA

La variancia de una variable aleatoria discreta se puede considerar como la desviación promedio al cuadrado en torno a la media ($E(x)$) tomada sobre todos los valores.

La variabilidad de caras al arrojar cuatro monedas es

$$V(x) = (x - E(x))^2 = (0 - 2)^2 (1/16) + (1 - 2)^2 (4/16) + \dots + (4 - 2)^2 (1/16)$$

$$= 1(\text{cara})^2$$

$$V(x) = 1 \text{ cara}$$

MODELOS ESPECIALES DE PROBABILIDAD

Distribuciones de Probabilidad de V. A. Discretas

MODELO BINOMIAL

Cuando en *un solo ensayo* de algún proceso o experimento puede ocurrir sólo uno de dos resultados mutuamente excluyentes, llamados (arbitrariamente) como *éxito* o *fracaso*, se denomina Ensayo de Bernoulli.

Una secuencia de ensayos Bernoulli, repetidos n veces, se denomina Distribución Binomial.

–Número de frutas dañadas en un cajón de $n = 100$. Siendo $p = 0.80$

–Número de TV con defectos en un lote de $n = 300$. Siendo $p = 0.10$

• Propiedades de la Distribución Binomial

- El experimento se repite un número n de veces (ensayos).
- En cada ensayo ocurre uno de dos posibles resultados, mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, denominados (arbitrariamente) *éxito* y *fracaso*.
- La probabilidad de un *éxito*, se denota por p , y es constante de ensayo en ensayo, al igual que la probabilidad de *fracaso*, $1 - p$.
- Los ensayos son independientes, esto significa que el resultado de algún ensayo en particular, no es afectado por el resultado de cualquier otro ensayo.

Modelo matemático

Parámetros

$$E(X) = n * p \quad V(X) = n * p * (1 - p)$$

MODELO POISSON

- Como un proceso estocástico

Muchos hechos no ocurren como resultado de un número definido de pruebas sino como puntos definidos en Tiempo, Espacio o Volumen al azar.

- ♦ Número de accidentes / día.
- ♦ Número de vehículos que transitan por un determinado lugar / hora.
- ♦ Número de defectos / cm².
- ♦ Número de bacterias / cm³.

Propiedades de la Distribución Poisson

- El número de ocurrencias del hecho es independiente de una unidad (intervalo de tiempo, espacio, volumen, etc.) especificado a otra.
- El valor esperado de la variable es proporcional al tamaño de la unidad especificada.
- La probabilidad de más de una ocurrencia del hecho en una unidad especificada es despreciable (pequeña) en comparación con la probabilidad de que ocurra una sola vez.

Modelo matemático

Parámetros

$$E(X) = n * p = V(X) =$$

- Como Límite de la Binomial

Características:

p chico (< 0.01) n grande (> 100)

Modelo matemático

Nos permite decir que dadas ciertas condiciones iniciales, es seguro que se obtengan ciertos resultados.

Nos permite decir solo que, dado ciertas condiciones iniciales, se obtienen ciertos resultados con tales probabilidades asociadas a ellos.

Modelo Poisson

Modelo Binomial

Modelo Hipergeometrico