

Objetivos

- Bueno, el presente trabajo tiene como objetivo principal que aprendamos todo lo posible acerca del centro de masa, sus características, y cómo se relaciona el centro de masa con el moméntum.
- Además este trabajo pretende enseñarnos las características básicas del centro de gravedad de los cuerpos, también nos dice que se refiere el centro de gravedad y cómo se relaciona este con el moméntum.
- Aprender lo que es el centroide de un cuerpo, cómo calcularlo, a qué se refiere y en fin este trabajo consiste en investigar todo lo posible acerca de el Centro de masa, el centro de gravedad y el Centroides.

Introducción

La física, la materia que estudia las características y comportamientos físicos de un objeto, entre estos entran varios capítulos pero en síntesis el presente trabajo se refiere a 3 de esas muchas características que tienen los cuerpos, estas son por consiguiente el centro de masa(CM), el centro de gravedad(CG), y el centroide.

Estos 3 temas son estudiados para que el estudiante valiéndose de estos conocimientos pueda resolver ejercicios que tengan un grado de complicación que sirva para demostrar que los conocimientos adquiridos de este trabajo son correctos.

Centro de masa

La conservación del momento total nos da un método para analizar un "sistema de partículas". Un sistema tal puede ser virtualmente cualquier cosa (un volumen de gas, agua en un recipiente o una pelota de béisbol). Otro concepto importante nos permite el análisis del movimiento general de un sistema de partículas. Comprende la representación del sistema entero, como una partícula sencilla cuyo concepto se iniciará aquí.

Si no hay alguna fuerza externa que actúe sobre una partícula, su cantidad de **movimiento lineal** es constante. En una forma similar, si no hay alguna fuerza que actúe sobre un sistema de partículas, la cantidad de movimiento lineal del sistema también es constante. Esta similitud significa que un sistema de partículas se puede representar por una sola partícula *equivalente*. Objetos móviles tales como pelotas, automóviles y demás, se pueden considerar en la práctica como sistemas de partículas y se pueden representar efectivamente por partículas simples equivalentes cuando se analiza su movimiento. Tal representación se hace por del concepto de centro de masa (CM).

El Centro de masa es el punto en el cual se puede considerar concentrada toda la masa de un objeto o de un sistema.

Aun si el objeto esta en rotación, el centro de masa se mueve como si fuera partícula. Algunas veces el centro de masa se describe como si estuviera en el punto de equilibrio de un objeto sólido. Por ejemplo, si usted equilibra un metro sobre su dedo, el centro de masa de la varilla de madera está localizada directamente sobre su dedo y toda la masa parece estar concentrada ahí

La segunda ley de Newton se aplica a un sistema cuando se usa el centro de masa

$$\mathbf{F} = M\mathbf{A}_{CM}$$

En donde F es la fuerza externa neta, M es la masa total del sistema o la suma masas de las partículas del sistema ($M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$), donde el sistema tiene n partículas), y A_{CM} es la aceleración del centro de masa. La ecuación dice que el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si toda la masa del sistema estuviera concentrada allí, y recibiera la acción de la resultante de las fuerzas externas.

Así mismo, si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema de partícula cero, la cantidad de movimiento lineal total del centro de masa se conserva (permanece constante) dado que

como para una partícula. Esto significa que el centro de masa se mueve con una velocidad constante o permanece en reposo. Aunque usted puede visualizar con más facilidad el centro de masa de un objeto sólido, el concepto del centro de masa se aplica a cualquier sistema de partículas u objetos, aunque esté en estado gaseoso. Para un sistema de n partículas dispuestas en una dimensión, a lo largo del eje de las x , la posición del centro de masa esta dada por

Esto es, X_{cm} es la coordenada x del centro de masa de un sistema de partículas. En una notación corta (usando signos para indicar las direcciones de los vectores)

en donde la sumatoria $\sum$, indica la suma de los productos $m_i x_i$. para i partículas ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Si sumatoria $\sum x_i m_i = 0$, entonces $X_{cm} = 0$, y el centro de masa del sistema unidimensional está localizado en el origen.

Otras coordenadas del centro de masa para sistemas de partículas se definen en forma similar. Para una distribución bidimensional de masas, las coordenadas de masa son (X_{cm} , Y_{cm})

Un concepto especialmente útil al analizar el movimiento de un sistema de muchas partículas, o un cuerpo finito, es el de *Centro de masa*, abreviado CM de aquí en adelante. Aunque el CM es muy útil al tratar la rotación, también simplifica considerablemente el análisis de los choques, y por tanto introduciremos este concepto.

La posición del CM de un sistema de N partículas de masas $m_1, m_2, \dots, m_n$ en lugares dados por sus vectores $R_1, R_2, \dots, R_n$ está dada por

$$M R_{cm} = m_1 R_1 + m_2 R_2 + \dots + m_n R_n$$

en donde $M (= M_1 + M_2 + \dots + M_n)$ es la masa total del sistema.

Cuando esas partículas se mueven bajo la influencia de fuerzas externas e internas, su posición cambia con el tiempo. Si en el breve intervalo Δt , la posición de los vectores $\Delta R_1, \Delta R_2, \dots, \Delta R_n$, la localización del CM estará dada por

$$M(R_{cm} + \Delta R_{cm}) = M_1(R_1 + \Delta R_1) + M_2(R_2 + \Delta R_2) + M_n(R_n + \Delta R_n)$$

De la ecuación se despeja

$$P_{cm} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

Sabiendo que cuando no actúan fuerzas externas, la cantidad total de movimiento de un sistema permanece constante. Como P_{cm} es, de hecho, igual a la cantidad de movimiento total del sistema, concluimos que en ausencia de fuerzas externas, el CM de un sistema en reposo permanece en reposo, y si el CM está en movimiento mantendrá ese movimiento. Es más si una fuerza externa neta actúa, el CM se moverá de acuerdo

a la segunda ley de Newton. En especial, si la masa total no cambia con el tiempo, la aceleración del CM estará dada por

$$a_{cm} = F_{ext} / M$$

M

en donde F_{ext} es la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema.

Aplicaciones del Centro de Masa. –

El centro de masa casi siempre se refiere a cuerpos que constan de 2 dimensiones o, es decir son figuras que tienen características de ser finas es decir no tienen profundidad, entonces el CM, nos sirve para, para determinar en esos cuerpos el punto donde se concentra toda la masa, y esto nos ayuda a determinar el punto en el que si aplicamos una fuerza no nos dará torque alguno.

Relación del Cm con el momento. –

El CM se relaciona con el momento en la forma que nos ayuda a encontrar el CM de un sistema, es decir que esto nos ayuda a encontrar el punto en que no hay torque alguno por parte del sistema.

En este punto de aquí la hoja no daría torque alguno si tuviera un sustento.

Ejemplo 1: Encontrar el cm

Tres masas, de 2.0 kg, 3.0 kg y 6.0 kg, están localizadas en posiciones (3.0, 0), (6.0, 0) y (4.0,0), respectivamente, en metros a partir del origen ¿En donde está el centro de masa de este sistema?

Dados : $m_1 = 2.0\text{kg}$ Encontrar: X_{cm} (coordenadas CM)

$$m_2 = 3.0\text{kg}$$

$$m_3 = 6.0\text{kg}$$

$$x_1 = 3.0\text{m}$$

$$x_2 = 6.0\text{m}$$

$$x_3 = 4.0\text{m}$$

Luego, simplemente realizamos la sumatoria como se indica en la ec. 6.19,

$$X_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

M

$$(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m}) + (3.0\text{ kg})(6.0\text{ m}) + (6.0\text{ kg})(4.0\text{ m})$$

$$2.0\text{kg} + 3.0\text{kg} + 6.0\text{kg}$$

La resolución = 0, por lo que sabemos que el centro de masa está en el origen

• Ejemplo 2.– Centro de masa y marco de referencia

Una pesa tiene una barra de conexión de masa despreciable. Encuentre la posición del centro de masa (a) si m_1 y m_2 tienen cada una 5.0 kg, y (b) si m_2 es de 5.0 kg y m_1 es de 10.0 kg.

Solución

Dados: (a) $m_1 = m_2 = 5.0 \text{ kg}$ Encontrar. (a) (X_{cm}, Y_{cm}) (coordenada;

$x_1 = 0.25 \text{ m}$ (b) (X_{cm}, Y_{cm})

$x_2 = 0.75 \text{ m}$

$Y_1 = Y_2 = 0.25 \text{ m}$

(b) $m_1 = 5 \text{ kg}$

$m_2 = 10 \text{ kg}$

Note que cada masa se considera una partícula localizada en el centro de la su centro de masa.

a) Al encontrar X_{cm} tenemos

$$X_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$m_1 + m_2$$

$$X_{cm} = (5.0 \text{ kg})(0.25 \text{ m}) + (5.0 \text{ kg})(0.75 \text{ m})$$

$$5.0 \text{ kg} + 5.0 \text{ kg}$$

$$X_{cm} = 0.5 \text{ m}$$

En forma similar, es fácil encontrar que $Y_{CM} = 0.25 \text{ m}$. (Tal vez ya se dio cuenta de esto ya que cada centro de masa está a esta altura. El centro de masa de la pesa está localizado entonces en $(X_{cm}, Y_{CM}) = (0.50 \text{ m}, 0.25 \text{ m})$ o a medio camino entre las masas de los extremos.

b) Con $m_2 = 10.0 \text{ kg}$

$$X_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$m_1 + m_2$$

$$X_{cm} = (5.0 \text{ kg})(0.25 \text{ m}) + (10.0 \text{ kg})(0.75 \text{ m})$$

$$5.0 \text{ kg} + 10.0 \text{ kg}$$

$$X_{cm} = 0.58 \text{ m}$$

Lo cual es $1/3$ de la longitud de la barra a partir de m_2 . (Usted puede esperar en este caso que el punto de equilibrio de la pesa esté más cerca de m_2 .)

El que la posición del centro de masa no dependa del marco de referencia se puede demostrar colocando el origen en el punto en que la masa de 5.0 kg toca el eje de las x. En este caso, $x_1 = 0$ y $x_2 = 0.50$ m, y

$$X_{cm} = (5.0 \text{ kg})(0) + (10.0 \text{ kg})(0.50 \text{ m}) = 0.33 \text{ m}$$

$$5.0 \text{ kg} + 10.0 \text{ kg}$$

La coordenada Y del centro de masa es de nuevo $Y_{cm} = 0.25$ m, como ya hemos comprobado.

En el ejemplo 2, cuando el valor de una de las masas cambió, la coordenada x del centro de masa cambió. Usted podría haber esperado que también cambiara el eje de las y. Sin embargo; los centros de las masas de los extremos estuvieron aún a la misma altura, y Y_{cm} permaneció igual. Para incrementar Y_{cm} se deben elevar una o las dos masas de los extremos, lo que requeriría de un trabajo en contra de la gravedad y resultaría en un aumento en la energía potencial.

Como usted ya sabe, la masa y el peso están relacionadas directamente. Asociado a una forma estrecha con el centro de masa está el Centro de gravedad (**CG**), el punto en el que se puede considerar que se concentra el peso de un objeto al representar ese objeto como una partícula. Al tomar la aceleración debida a la gravedad como constante, cosa que generalmente se hace cerca de la superficie de la Tierra, podemos reescribir la ecuación principal como

$$MgX_{cm} = X, m, x,$$

Entonces todo el peso, Mg , está concentrado en X_{cm} , y el centro de masa y el centro de gravedad coinciden.

Nota. – *Si la aceleración debida a la gravedad no es constante, el centro de masa y el centro de gravedad no coinciden.*

Como usted ya habrá notado, la posición del centro de gravedad estuvo indicada en algunas figuras en las que se dibujó la flecha del vector para el peso (mg) desde un punto cerca del centro de un objeto.

En algunos casos, el centro de masa o el centro de gravedad de un objeto se pueden localizar por simetría. Por ejemplo, para un objeto esférico, homogéneo cuya masa está distribuida uniformemente, el centro de masa está en el centro geométrico (o centro de simetría). En el ejemplo 2 en el que las masas de los extremos de la pesa eran iguales, era evidente la probabilidad de que el centro de masa estuviera a la mitad del camino entre ellas.

La posición del centro de masa de un objeto de forma irregular no es evidente y por lo general calcularla (aun con métodos matemáticos avanzados). En algunos casos, el centro de masa se puede localizar en forma experimental. Por ejemplo, el centro de masa de un objeto de forma irregular se puede determinar en forma experimental si se suspende libremente desde diferentes puntos (figura). Si pensamos durante un momento, nos convenceremos de que el centro de masa (o el centro de gravedad) queda verticalmente abajo del punto de suspensión. Como el centro de masa se define como el punto en el cual se puede considerar que está concentrada toda la masa de un cuerpo, esto es análogo a una partícula de masa suspendida de una cuerda. Si suspendemos el objeto de dos o más puntos y marcamos las líneas verticales sobre las que debe localizarse el centro de masa, podemos localizarlo como el punto de intersección de las líneas.

El Centro de masa de un objeto puede quedar fuera del cuerpo del objeto. El centro de masa de un anillo homogéneo está en su centro. La masa de cualquier sección del anillo es cancelada por la masa de una sección equivalente directamente a través del anillo, y por simetría el centro de masa está en el centro. Para un objeto en forma de L con ramas iguales el centro de masa queda en una línea que forma un ángulo de 45° con las ramas. Su posición se puede determinar con facilidad si se suspende la L desde un punto en una de las ramas,

y se anota en donde la línea vertical a partir de ese punto interseca la línea diagonal.

No olvide que la posición del centro de masa o centro de gravedad de un objeto depende de la distribución de la masa. Por lo tanto, para un objeto flexible como es el cuerpo humano, la posición del centro de gravedad cambia a medida que el objeto cambia su configuración (distribución de masa).

Para determinar la posición del centro de masa por suspensión:

El Centro de masa de un objeto plano de forma irregular se puede encontrar suspendiendo el objeto de dos o más puntos. El CM (y el CG) quedan sobre una línea vertical bajo cualquier punto de suspensión, así la intersección de dos de tales líneas marca la posición media entre el espesor del cuerpo.

El centro de masa puede estar localizado fuera de un cuerpo El centro de masa puede quedar dentro o fuera de un cuerpo, dependiendo de la distribución de su masa. (a) Para un anillo uniforme, el centro de masa está en su centro. (b) Para un objeto en forma de L, si la distribución de la masa es uniforme y las ramas son de igual longitud, el centro de masa queda en la diagonal entre las ramas.

- **Ejemplo 3.** Una masa de 4.00 kg está en $x = 0.20$ m, $y = z = 0$ m, y una segunda masa de 6.00 kg está en $x = 0.80$ m, $y = z = 0$ m. Localizar el CM.

Solución La ecuación principal es, como todas las ecuaciones vectoriales en realidad un conjunto de tres ecuaciones, una para cada coordenada. Como las coordenadas x , y , z de las dos masas son cero, $Y_{cm} = Z_{cm} = 0$. La ecuación X_{cm} :

$$(10.0 \text{ kg})X_{cm} = (4.00 \text{ kg})(0.20 \text{ m}) + (6.00 \text{ kg})(0.80 \text{ m})$$

quedando que el C_m esta **en el eje de las x a 0.56m**

Generalmente, las partes individuales de un sistema interaccionan entre sí por medio de fuerzas internas, cambiando por lo mismo sus velocidades y cantidades de movimiento individuales cuando transcurre el tiempo. Sin embargo, esas interacciones no influyen sobre el movimiento del CM. Siempre que se puedan separar las fuerzas que actúan sobre un sistema de dos o más partículas en fuerzas internas y fuerzas externas, se puede simplificar la dinámica del problema preguntando y contestando a dos preguntas distintas:

¿Cuál es el movimiento del CM?

- **Ejemplo 4.** Una masa de 2.00 kg en reposo que contiene una pequeña carga explosiva de masa despreciable se desintegra en tres fragmentos. Dos de ellos tienen masas idénticas de 0.50 kg cada uno; el tercero tiene una masa de 1.00 kg. Las velocidades de los fragmentos de 0.50 kg hacen un ángulo de 60° entre si y la magnitud de dichas velocidades es de 100 m/s. ¿Cuál es la velocidad del fragmento de 1.00 kg?

Solución. –

El eje y es la línea que bisecta el ángulo entre las velocidades de los fragmentos de 0.50kg.

Como $V_{cm} = 0$ antes de la explosión también debe ser cero después de ella.

De la ecuación de CM, tenemos que

$$(0.50 \text{ kg})v_1 + (0.50 \text{ kg})v_2 + (1.00 \text{ kg})v_3 = 0 \text{ kg.m/s}$$

o bien, en forma de componentes,

$$(0.50 \text{ kg})(v_{1x} + v_{2x}) + (1.00 \text{ kg})v_{3x} = 0 \text{ kg m/s}$$

$$(0.50 \text{ kg})(v_{1y} + v_{2y}) + (1.00 \text{ kg})v_{3y} = 0 \text{ kg m/s}$$

Como $V_{1x} = -V_{2x}$, $v_{3x} = 0 \text{ m/s}$. También,

$$V_{1y} = V_{2y} = (100 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = 86.6 \text{ m/s}$$

Por tanto, $V_{3y} = -86.6 \text{ m/s}$

Ejemplo 5. Como un ejemplo más de la aplicación del concepto del CM, pondremos como ejemplo para resolver un problema de colisión de frente en el caso general de una masa m_1 que se mueve con una velocidad inicial V_0 , contra otra masa m_2 que estaba en reposo.

Solución Para evitar utilizar demasiados subíndices, usaremos el símbolo u para las velocidades en el marco de referencia del centro de masa. De acuerdo con la ecuación de CM, el centro de la masa se mueve inicialmente a una velocidad

$$m_1 v_0$$

$$V_{cm} =$$

$$m_1 + m_2$$

y debe mantener esa velocidad durante el proceso porque no actúan fuerzas externas sobre el sistema.

Recordemos que la velocidad v de una partícula en un marco de referencia estacionario se relaciona a su velocidad con respecto a un marco de referencia en movimiento mediante

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_R$$

En donde $\mathbf{V}_R$ es la velocidad del marco de referencia. En este caso, $\mathbf{V}_R$ es la velocidad del centro de masa, v_{cm} , y hemos usado el símbolo u para $\mathbf{V}_r$. De aquí que

$$V = u + V_{cm} ; U = V - V_{cm}$$

Si pasamos al sistema del CM, las velocidades iniciales de m_1 y m_2 son entonces.

$$U_0 = ((V_0 - m_1)/(m_1 + m_2)) \times V_0 = ((m_2)/(m_1 + m_2)) \times V_0$$

Como el choque es inelástico, la EC en el marco del CM antes y después de la colisión debe ser la misma. Además, el CM, en ese marco de referencia, queda en reposo. Esas dos condiciones sólo se pueden satisfacer si las velocidades finales de los dos objetos en el marco de referencia del CM son o bien las mismas que antes del choque, o inversas. Si las velocidades no cambian, los dos objetos no han chocado, y así podemos considerar esta solución como no compatible con el enunciado del problema. Por ello, después del choque,

$$U_{1f} = -U_0 = -m_2 \times V_0$$

$$m_1 + m_2$$

$$U_{2f} = -U_{2o} = -m_1 \times V_o$$

$$m_1 + m_2$$

Para completar la solución se transforma el marco de referencia del laboratorio agregando a las velocidades U_{1f} y U_{2f} la velocidad del CM, siendo el resultado

$$V_{1f} = ((m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)) \times V_o \text{ y } V_{2f} = ((2m_1)/(m_1 + m_2)) \times V_o$$

Centro de gravedad

La fuerza más corriente que actúa sobre un cuerpo es su propio peso. En todo cuerpo por irregular que sea, existe un punto tal en el que puede considerarse en él concentrado todo su peso, este punto es considerado el centro de gravedad.

El centro de gravedad puede ser un punto exterior o interior del cuerpo que se considere.

El conocimiento de la posición de los centros de gravedad, es de suma importancia en la resolución de problemas de equilibrio, porque son los puntos de aplicación de los vectores representativos de los respectivos pesos.

El centro de gravedad de una línea está en el punto de aplicación de un sistema de fuerzas paralelas aplicadas a cada uno de los fragmentos elementales en que se puede considerar descompuesta la misma y proporcionales respectivamente a las longitudes de estos elementos de línea. Si se trata de un elemento rectilíneo, el centro de gravedad se haya en su punto medio. El de un arco de circunferencia puede calcularse mediante recursos de cálculo referencial, y se encuentra situado sobre el radio medio, a una distancia del centro.

En conclusión el centro de gravedad es el punto en el que se encuentran aplicadas las fuerzas gravitatorias de un objeto, o es decir es el pto. en el que actúa el peso. Siempre que la aceleración de la gravedad sea constante, el centro de gravedad se encuentra en el mismo punto que el centro de masas¹.

El equilibrio de una partícula o de un cuerpo rígido también se puede describir como estable o inestable en un campo gravitacional. Para los cuerpos rígidos, las categorías del equilibrio se pueden analizar de manera conveniente en términos del **centro de gravedad**. El Centro de gravedad es el punto en el cual se puede considerar que todo el peso de un cuerpo está concentrado y representado como una partícula. Cuando la aceleración debida a la gravedad sea constante, el centro de gravedad y el centro de masa coinciden.

En forma análoga, el centro de gravedad de un cuerpo extendido, en equilibrio estable, está prácticamente cuenco de energía potencial. Cualquier desplazamiento ligero elevará su centro de gravedad, y una fuerza restauradora lo regresa a la posición de energía potencial mínima. Esta fuerza es, en realidad, una torca que se debe a un componente de la fuerza peso y que tiende a hacer rotar el objeto alrededor de un punto pivote de regreso a su posición original.

Un objeto está en equilibrio estable mientras su Centro de gravedad quede arriba y dentro de su base original de apoyo.

Cuando éste es el caso, siempre habrá una torca de restauración. No obstante cuando el centro de gravedad o el centro de masa cae fuera de la base de apoyo, pasa sobre el cuerpo, debido a una torca gravitacional que lo hace rotar fuera de su posición de equilibrio.

Los cuerpos rígidos con bases amplias y centros de gravedad bajos son, por consiguiente más estables y

menos propensos a voltearse. Esta relación es evidente en el diseño de los automóviles de carrera de alta velocidad, que tienen neumáticos y centros de gravedad cercanos al suelo.

El centro de gravedad de este auto es muy bajo por lo que es casi imposible que se voltee.

También la posición del centro de gravedad del cuerpo humano tiene efectos sobre ciertas capacidades físicas. Por ejemplo, las mujeres suelen doblarse y tocar los dedos de sus pies o el suelo con las palmas de las manos, con más facilidad que los hombres, quienes con frecuencia se caen al tratar de hacerlo. En general, los hombres tienen el centro de gravedad más alto (hombros más anchos) que las mujeres (pelvis grande), y es por eso que es más fácil que el centro de gravedad de un hombre quede fuera de apoyo cuando se flexiona hacia el frente.

Cuando el centro de gravedad queda fuera de la base de soporte, el objeto es inestable (hay una torsión desplazadora).

En los circos usualmente hay actos de acróbatas y lo que sucede es que el acróbata, cualquiera sea el acto que haga tiene una base de soporte muy angosta, o sea el área pequeña del contacto de su cuerpo con su soporte. Mientras que el centro de gravedad permanezca sobre esta área, él está en equilibrio, pero un movimiento de unos cuantos centímetros sería suficiente para desbalancearlo.

Aplicación del centro de gravedad.–

El centro de gravedad sirve para calcular el equilibrio de un sistema, este sistema puede ser infinidad de cosas, por ejemplo una casa, y aquí el centro de gravedad ayudaría a calcular a la persona que guía la construcción, los puntos en los cuales poner las columnas y /o la columna principal..

Relación con el moméntum.–

En algunos problemas que contienen de materia o en ellos interfiere el momento lineal, o talvez se resuelven por sumatoria de momentos, el centro de gravedad ayuda a simplificar notablemente estos ejercicios.

Ejemplo.– Calcule las fuerzas que se aplican al siguiente sistema.–

$L/3 \quad L/2$

FA 10kg 20 kg FB

Por momento.–

Sumatoria $F_y = 0$

$$F_A + F_B - 10 - 196 = 0$$

$$F_A + F_B = 206$$

Sumatoria de momentos desde el punto A = 0

$$10x(L/3) + 196(L/2) - F_B \cdot L = 0$$

$$L(10/3 + 196/2 - F_B) = 0$$

$$20 + 588 - 6 F_B = 0$$

$$608/6 = FB = 101,3 \text{ N}$$

$$FA = 206 - 101,3$$

$$FA = 104,7 \text{ N}$$

Por centro de gravedad.-

Sacamos el CG =

$$(L/3 \times 10 + L/2 \times 20)/(10 + 20) =$$

$$(10/3 L + 10 L)/30 = (40/3 L)/30 =$$

$$4/9 L = 0,444444$$

Centro de gravedad = X/masas

$$0,444444L = FB/30$$

$$FB = 101,3 \text{ N}$$

Por lo que vemos que podemos resolver por cualquiera de los métodos.

Ejemplo 7(Ejercicios de centro de gravedad en general)

Si tenemos un grupo de bloques idénticos, de 20 cm de largo, se apilan de modo que cada uno sobresalga del bloque anterior 4.0 cm, y se coloca uno encima de otro. ¿Cuántos bloques se podrán apilar de esta forma antes de que la pila se caiga?

La pila se caerá cuando su centro de masa no esté más sobre su base de apoyo. Todos los ladrillos tienen la misma masa, y el centro de masa de cada uno está colocado en su punto medio.

Si tomamos el origen en el centro del ladrillo inferior, la coordenada horizontal o de masa (o centro de gravedad) para los primeros dos ladrillos del rimero está dada por la ecuación de CM en donde $m_1 = m_2 = m$ y x_2 es el desplazamiento del segundo ladrillo:

$$X_{cm2} = \frac{mx_1 + mx_2}{(m + m)}$$

$$X_{cm2} = \frac{m(x_1 + x_2)}{2m} = (x_1 + x_2)/2 = (0 + 4.0 \text{ cm})/2 = 2.0 \text{ cm}$$

Las masas de los ladrillos se cancelan (debido a que todos ellos tienen la misma masa)

$$\text{Para tres ladrillos, } X_{cm3} = \frac{m(x_1 + x_3 + x_2)}{3m} = (0 + 4.0 + 8.0)/3 = 4.0 \text{ cm}$$

$$\text{Para cuatro ladrillos, } X_{cm4} = \frac{m(x_1 + x_3 + x_4 + x_2)}{4m} = (0 + 4.0 + 8.0 + 12)/4 = 6.0 \text{ cm}$$

Y así se sigue sucesivamente.

Esta serie de resultados demuestra que el centro de masa del rimero se mueve horizontalmente, 2.0 cm por cada ladrillo que se agregue. Para una pila de seis, el centro de masa estará a 10 cm del origen, directamente sobre el borde del ladrillo inferior ($2.0 \text{ cm} \times 5 \text{ ladrillos adicionales} = 10 \text{ cm}$, que es la mitad de la longitud

del ladrillo), de modo que el primero estará en equilibrio inestable. Esto significa que la pila puede no caerse si colocamos el sexto ladrillo con mucho cuidado, pero es muy difícil que en la práctica se pueda lograr. En cualquier caso, el séptimo definitivamente hará que la pila se caiga.

CENTROIDE

Siempre que la densidad de un cuerpo tenga el mismo valor en todos los puntos, la misma figurará como factor constante, de los numeradores y denominadores de las ecuaciones, y por tanto desaparecerá .

Las expresiones definen entonces una propiedad del cuerpo puramente geométrico, sin referencia alguna a sus propiedades físicas, cuando el cálculo se refiera únicamente a una figura geométrica, se utilizará el término centroide.

Si una figura geométrica posee un centro de simetría, este punto es el **centroide** de la figura. Cuando se hable de un cuerpo físico real, hablaremos de centro de masa. Si la densidad de la misma en todos los puntos, las posiciones del centroide y el centro de masa coinciden, mientras que si la densidad varía de unos puntos a otros, aquellos no coincidirán, en general.

Los cálculos relacionados con los centroides caen dentro de 3 categorías claramente definidas según que la forma del cuerpo en cuestión pueda ser representada por una línea, una superficie o un volumen

Para líneas.-

En $x = (\text{Distancia del eje X} \times (\text{derivada de la línea}))/\text{masa}$

En $y = (\text{Distancia del eje Y} \times (\text{derivada de la línea}))/\text{masa}$

En $z = (\text{Distancia del eje Z} \times (\text{derivada de la línea}))/\text{masa}$

Para superficies.-

En $x = (\text{Distancia del eje X} \times (\text{derivada del área}))/\text{masa}$

En $y = (\text{Distancia del eje Y} \times (\text{derivada del área}))/\text{masa}$

En $z = (\text{Distancia del eje Z} \times (\text{derivada del área}))/\text{masa}$

Para volúmenes.-

En $x = (\text{Distancia del eje X} \times (\text{derivada del volumen}))/\text{masa}$

En $y = (\text{Distancia del eje Y} \times (\text{derivada del volumen}))/\text{masa}$

En $z = (\text{Distancia del eje Z} \times (\text{derivada del volumen}))/\text{masa}$

Si una figura geométrica posee un eje de simetría, el centroide de la figura coincide con este eje.

FIGURA GEOMÉTRICA LOCALIZACIÓN DEL CENTROIDE

Perímetro del triángulo Centro del círculo inscrito del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado.

Arco del semicírculo de radio **R** Distancia desde el diámetro = $\frac{2R}{3}$

Arco de 2 radianes de un círculo de Dist. desde el centro del círculo = $\frac{R \sin 2}{2}$
radio **R**

Area del triángulo Intersección de las medianas

Area del cuadrilátero Intersección de las diagonales de un
paralelogramo cuyos lados pasan a
través de los puntos de trisección
adyacentes a los pares de lados
consecutivos del cuadrilátero.

Area del semicírculo de radio **R** Dist. desde el diámetro = $\frac{4R}{3}$

Area del sector circular del radio **R** Distancia desde el centro del círculo
y del ángulo central 2 radianes. = $\frac{2R \sin 1}{3}$

Area de la semiellipse de altura **h** Dist. desde la base = $\frac{4h}{3}$

Area del cuadrante de una ellipse Dist. desde el eje menor = $\frac{4a}{3}$, dist.
de semiejes mayor y menor (*a* y *b*).
desde el eje mayor = $\frac{4b}{3}$

Area del segmento parabólico Dist. desde la base = $\frac{2}{5} h$
derecho de altura **h**.

FIGURA GEOMÉTRICA LOCALIZACIÓN DEL CENTROIDE

Area lateral de una pirámide regular o un cono circular. Dist. desde la base = $\frac{1}{3} h$

Area de un hemisferios de radio R Distancia desde la base $=1/2 R$

Volumen de piramide o cono $\frac{1}{4}$ de la distancia desde el centro de la base al vértice de la pirámide o cono.

Volumen de la porción de una pirámide En la línea uniendo los centri o cono con d como la distancia entre de las 2 bases a la distancia los centroides de las 2 bases y k como desde el centroide a la base el radio de similaridad de la base mayor menor a la menor $=1/4 d ((1+2k+3k^2)/(1+k+k^2))$ Volumen del hemisferio de radio R Distancia desde la base $= 3/8 R$ Volumen de revolución de altura h obtenida revolviendo una semiellipse Distancia desde la base $= 3/8 h$ por sus ejes de simetría

Volumen de parabola de revolución Distancia desde la base $= 1/3 h$ de altura h

Aplicación del centroide.-

El centroide nos ayuda a encontrar el punto en el que se concentra las fuerzas que actuan sobre una figura irregular, o figuras geométricas no muy conocidas, por ejemplo el centroide nos ayudaría a encontrar el punto en el que se concentran las fuerzas de un puente.

Relación del centroide con el moméntum.-

En el caso de los puentes el centroide nos ayuda a ver como hacer para que si se rompe un cable que sostenga al puente no cree torque la rotura del cable, es decir nos ayuda a equilibrar un puente o figuras irregulares, para que si afecta algo al sistema no suceda nada, que pueda cambiar la figura.

En conclusión para localizar el centroide de una figura, se utilizan las tablas de centroide, en donde, detallando cada figura para encontrar sus coordenadas primas para el cálculo general, se desarrolla un procedimiento establecido:

- Se obtiene el área total de la figura, encontrando su centroide en base a la tabla del indicado, es decir, sus coordenadas primas.
- Se extrae cada figura que obstruye exista un objeto con volumen igual en todos los puntos
- Se obtiene el área de la figura extraída, encontrando su centroide en base a la tabla del indicado, es decir sus coordenadas primas, y así, con todas las figuras que conformen el cuerpo geométrico
- Se procede con la siguiente fórmula:

$$A1t(x1t) - Af1(xf1) - Af2(xf2)...$$

$$x= A1t - Af1 - Af2 ...$$

$$A1t(y1t) - Af1(yf1) - Af2(yf2)...$$

$$y= A1t - Af1 - Af2 ...$$

Ejemplo.- Localizar el centroide de la siguiente figura

$$A1t(x1t) - Af1(xf1) - Af2(xf2)...$$

$$x= A1t - Af1 - Af2 ...$$

$$3,5(63) - 6,33(3) - 2,5(1)$$

$$x= 63 - 3 - 1$$

$$x = 3,37 \text{ m}$$

Ejemplo.– Encontrar el centroide de la figura

$$A_1t(x_1t) - A_{f1}(x_{f1}) - A_{f2}(x_{f2})...$$

$$x = A_1t - A_{f1} - A_{f2} \dots$$

$$4,5(90) - 8,28(14,13) - 1,33(4)$$

$$x = 90 - 14,13 - 4$$

$$x = 3,93326 \text{ m}$$

Encontrar el centroide de la figura

$$A_1t(x_1t) - A_{f1}(x_{f1}) - A_{f2}(x_{f2})...$$

$$x = A_1t - A_{f1} - A_{f2} \dots$$

$$3,5(77) - 6,33(4) - 3(4) - 3(0,25)$$

$$x = 77 - 4 - 4 - (0,25)$$

$$x = 3,41 \text{ m}$$

BIBLIOGRAFÍA:

- SELBY, Samuel M, STANDARD MATHEMATIC TABLES, The chemical Rubber Co. Ohio, USA. 1964, 1965, 1967, 1969, diez y siete ava edición.
- WILSON, Jerry D, FISICA, Prentice Hall, Segunda Edición, Tomo 1, México, 194–198. 260–261.
- BLATT, Frank J. FUNDAMENTOS DE FISICA, 3ra edición, Prentice Hall, México, 129–136.
- www.monografias.com
- www.altavista.com
- <http://www.geocities.com/Athens/Delphi/8951/>

$$\mathbf{F} = M\mathbf{A}_{CM}$$

$$\mathbf{F} = M\Delta\mathbf{V}_{CM}/\Delta t$$

$$X_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

$$X_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

