ENUNCIADO

Empezando con y en el método de separación de variables [Ecs. (3.9) y (3.10)], demuéstrese que no es posible satisfacer las condiciones de contorno para la temperatura constante en y = H con cualquiera de estas dos soluciones. Es decir, demuéstrese que, para satisfacer las condiciones de contorno

$T = T1$ en $y = 0$

$T = T1$ en $x = 0$

$T = T1$ en $x = W$

$T = T2$ en $y = H$

utilizando o la Ec. (3.9) o la (3.10), se obtiene la solución trivial o bien una solución físicamente irracional.

SOLUCIÓN

Consideraciones

- La conductividad térmica es constante.
- Podemos aplicar la ecuación de Laplace en régimen estacionario sin generación de calor:
- Suponemos que la solución a esta ecuación diferencial puede expresarse como un producto de la forma:

$T = XY$ donde $X = X(x)$

$Y = Y(y)$

- Suponemos y

Esquema y

T2

H

T1 T1

X

W

Resolución

Según la Ec. (3.9) para :

$X = C1 + C2\ x$

$Y = C3 + C4\ y$

T = (C1 + C2 x)(C3 + C4 y)

Realizamos el cambio de variable

para y = 0

C3 = 0

para x = 0

C1 = 0

para x = W

C2W = 0

C2 = 0

para y = H

lo cual no es cierto puesto que T1 es distinto que T2.

Según la Ec. (3.10), para :

realizamos el mismo cambio de variable:

para y = 0

C7 = 0

para x = 0

C5 + C6 = 0 o bien

C8 = 0 siendo una solución trivial

Suponemos que

Nos quedamos por tanto con C5 = −C6

Para x = W

por lo que tenemos que

C5 = −C6 = 0

Para y = H

T2 − T1 = 0 lo cual es una solución irracional puesto que

ENUNCIADO

Escríbanse los cuatro primeros términos no nulos de la serie dada en la Ec. (3.20). ¿ Qué porcentaje de error supone utilizar solo estos cuatro términos en y=H y x=W/2?

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Los cuatro primeros términos no nulos de la serie dada en la Ec. (3.20) y el porcentaje de error al utilizar solo estos cuatro términos en y = H y x = W/2.

Consideraciones:

- Consideramos sólo los cuatro primeros términos no nulos de la serie.

Datos conocidos y resolución:

Conocemos la Ec. (3.20):

Esta serie da nulos los valores de n pares, por lo que los cuatro primeros términos no nulos de la serie nos darían una relación:

El porcentaje de error al utilizar sólo cuatro términos en y = H y x = W/2 lo obtengo sustituyendo estos valores en la ecuación, y queda:

Los cuatro primeros términos no nulos dan una aproximación del 92%, luego el error cometido es de (1 − 0,92)·100 = 8 %

Comentarios:

La ecuación 3.20 nos indica la relación de temperaturas en una placa rectangular donde tres de sus lados se mantienen a temperatura constante T=T1 y el otro lado a temperatura T=T2. Las condiciones de contorno son:

T = T1 en y =0

T = T1 en x =0

T = T1 en x =W

T = T1 en y =H,

Para una placa de altura H y anchura W.

y

T=T2

H

T=T1 T=T1

x

T=T1

W

ENUNCIADO

Un cubo de 35 cm de lado exterior está construido de ladrillo refractario. El espesor de la pared es 5,0 cm. La temperatura de la superficie interior es 500ºC y la temperatura de la superficie exterior es 80ºC. Calcúlese el flujo de calor en vatios.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El flujo de calor en vatios

Datos conocidos y diagramas D

lado exterior =35 cm

L = espesor = 5,0 cm.

80ºC

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- Suponemos conducción multidimensional
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

El espesor de la pared es de 5 cm, luego el cubo interior tendrá una arista de:

Para una pared tridimensional, si todas las dimensiones interiores son mayores que un quinto del espesor de la pared (en este caso se cumple), los factores de forma son:

donde A = área de la pared

L = espesor de la pared

D = longitud de la arista

Hay seis secciones de pared, doce aristas y ocho esquinas, por lo tanto el factor de forma total es:

y el flujo de calor se calcula como:

=40,0098kW

ENUNCIADO

Dos cilindros largos de 8,0 y 3,0 cm de diámetro están completamente rodeados por un medio de k = 1,4 W/m

· °C. La distancia entre los centros es 10 cm y los cilindros se mantienen a 200 y 35 °C. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Calor transferido por unidad de longitud.

Datos conocidos y diagramas:

$T1=200$ °C

$k = 1,4$ W/m · °C $T2=35$ °C

$r2= 0,015$ m

$D = 0,1$m

Consideraciones:

- Como los cilindros son largos, podemos estudiar el problema como un sistema bidimensional, en el plano perpendicular al eje de los cilindros.
- Suponemos que no se dan fenómenos de convección en el medio en que se encuentran sumergidos los cilindros.

Resolución:

Podemos aplicar la fórmula (3.23), que da el calor intercambiado por conducción entre dos cuerpos inmersos en un mismo medio:

q = k · S · "Tglobal donde: k es la conductividad del medio.

S es un factor de forma conductivo, y depende únicamente de la geometría de los cuerpos. Viene detallado en la tabla 3.1 para diferentes geometrías.

En nuestro caso:

Las restricciones son: L>>r, L>>D.

Realizamos los cálculos por unidad de longitud:

Comentarios:

El medio no podría ser un fluido, para evitar que se dé movimiento de materia y por tanto convección.

ENUNCIADO

Una esfera de 1 metro de diámetro que se mantiene a 30 ºC está enterrada en un lugar donde K = 1,7 W/m.ºC. La profundidad del centro es 2,4 metros y la temperatura de la superficie de la tierra es 0 ºC. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor perdido por la esfera.

Datos conocidos y diagramas:

Ts (Temperatura de la superficie de la Tierra) = 0 ºC.

K (Conductividad térmica de la esfera) = 1,7 W/m.ºC.

Tw (Temperatura de la esfera) = 30 ºC.

D (Profundidad del centro de la esfera) = 2,4 m.

r (Radio de la esfera) = 0,5 m.

Consideraciones:

- Sistema bidimensional.
- Sólo hay involucradas 2 temperaturas límite.
- Consideramos un factor de forma conductivo para esa geometría.
- Esfera isoterma.
- medio semi−infinito (Tierra), cuya superficie está aislada.

Resolución:

Si consideramos un factor de agua conductivo:

q = (es el factor de forma conductivo).

En la tabla 3.1. (Página 57 libro), se define para esa geometría un valor de S :

Esfera isoterma inmersa en un medio semi−infinito cuya superficie está aislada:

= = = 7,014 m.

Sustituyendo por los valores:

q = = 1,7 W/ m.ºC. 7,014 m.(30−0) ºC ! q = 310 W

Comentarios:

El problema se simplifica debido a las consideraciones de esfera isoterma y superficie del medio semi−infinito aislada.

ENUNCIADO

Una esfera de 20 cm de diámetro está totalmente rodeada por una gran masa de lana de vidrio. Un calentador situado en el interior de la esfera mantiene su superficie exterior a una temperatura de 170ºC, mientras que la temperatura del lado exterior de la lana de vidrio es 20ºC. ¿ Cuánta potencia debe suministrarse al calentador para mantener las condiciones de equilibrio?.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La potencia que debemos dar al interior de la esfera para que se mantengan las condiciones de equilibrio.

Datos conocidos y diagramas:

d = 20 cm;

Texterior esfera = 170ºC;

Texterior lana de vidrio = 20ºC; 20ºC

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto q = cte.
- Suponemos conducción unidimensional en r.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

Para mantener las condiciones de equilibrio, necesito suministrar al calentador del interior de la esfera, una potencia, o flujo de calor por unidad radial; de igual valor al disipado por conducción a través de la lana de vidrio. Considerando un flujo de energía perdida en dirección radial, estacionario y sentido hacia afuera debido al gradiente de temperaturas dado, éste se puede calcular por Fourier como:

q = − K· A· es decir; q = − K· A·; flujo de calor por unidad radial.

Con valores: Aconvección = 4· · r2 = · d2 = · 0,22 = 0,126 m2;

Klana de vidrio = 0,038 W/m· ºC (tabla 1.1 página 5 del libro.);

Tesfera −T lana de vidrio = (170− 20) = 150 ºC;

La potencia suministrada al calentador para mantener las condiciones de equilibrio será de:

q (W) = = 0,716 W.

Comentarios:

Tener en cuenta que en este caso se disipa calor al exterior, porque el flujo de calor va del exterior de la esfera, al exterior del aislante; ya que va de mayor a menor temperatura. Así la potencia a suministrar es igual a la que se pierde por unidad de área.

Si fuese al revés, el flujo de calor entraría a la esfera, y por lo tanto si tuviese que mantener el equilibrio le tendría que quitar calor; dándole una potencia negativa.

ENUNCIADO

Un gran tanque esférico de almacenaje de 2 m de diámetro, está enterrado en la tierra en un lugar en donde la conductividad térmica es 1,5W/mºc. El tanque se utiliza para almacenar agua y hielo a 0ºC, y la temperatura del ambiente de la tierra es 20ºC. Calcúlese la pérdida de calor del tanque.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La perdida de calor del tanque.

Datos conocidos y diagramas:

Diámetro = 2 m **T00**

k = 1,5 W/mºC

T0 = 0 ºC

T00 = 20 ºC

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

En un sistema en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite la cantidad de calor intercambiada se define como:

Los valores del factor de forma de una esfera se obtienen de la tabla 3.1:

Sustituyendo por los valores:

ENUNCIADO

En ciertos lugares, la transmisión de potencia se realiza mediante cables subterráneos. En un caso particular un cable de 8,0 cm de diámetro está enterrado a una profundidad de 1,3 m siendo la resistencia del cable 1,1 x 10−4 /m. Para la tierra k = 1,2 W/m.ºC y la temperatura de su superficie es 25ºC. Calcúlese la máxima corriente permitida si la temperatura exterior del cable no puede superar 110ºC.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La máxima corriente permitida si la temperatura exterior del cable no puede superar 110ºC.

Datos conocidos y diagramas:

Consideraciones:

- Consideramos un sistema bidimensional en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite.

- Consideramos el cable como un cilindro isotermo inmerso en un medio semi−infinito cuya superficie es isoterma.

Resolución:

En un sistema bidimensional en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite, se puede definir un factor de forma conductivo S como:

Los valores de S se han calculado para diversas geometrías y vienen reflejados en la tabla 3.1 de la página 55 del libro. En nuestro caso, consideramos el cable como un cilindro isotermo inmerso en un medio semi−infinito cuya superficie es isoterma. Llamando r al radio del cable, L a su longitud y D a la profundidad a la que está sumergido, de la tabla 3.1 obtenemos una expresión para el factor de forma conductivo S de:

Para poder utilizar esta expresión, deben cumplirse las restricciones:

En nuestro problema se puede utilizar puesto que L se considera mucho mayor que r y:

Así, podemos determinar que:

De la misma forma, podemos aplicar la fórmula del efecto Joule, que relaciona la transferencia de calor con la corriente que circula:

Nótese que R está en unidades de resistencia por unidad de longitud (!/m).

Ahora, igualando las dos expresiones, podremos obtener el valor de la máxima corriente permitida:

Éste será el valor de la máxima corriente permitida si la temperatura exterior del cable no puede superar los 110ºC.

ENUNCIADO

Una esfera de cobre de 4,0 cm de diámetro se mantiene a 70 ºC y está sumergida en una gran región de la tierra donde k = 1,3 W/(m.ºC). La temperatura a gran distancia de la esfera es 12 ºC. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor perdido por la esfera.

Datos conocidos y diagramas:

Esfera de cobre

D = 4,0 cm = 0,04 m

r = 0,02 m

Te = 70 ºC

T" = 12 ºC

$k = 1,3$ W/(mºC)

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto q = cte.
- Se produce conducción multidimensional.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

En un sistema bidimensional en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite, se puede utilizar la siguiente expresión para la conducción:

q = −k.S. Tglobal donde S es el factor de forma conductivo.

Para el caso de una esfera isoterma de radio r inmersa en un medio infinito: S = 4. .r

Por tanto

q = −k·4· ·r· Tglobal = 1,3 W/(mºC) ·4· ·0,02 m·(70 ºC − 12 ºC) = 18,95 W

Comentarios:

La fórmula para el cálculo del factor de forma conductivo depende de la geometría del sistema. Haehne y Grigull [18.23] proporcionan un amplio resumen de factores de forma para una gran variedad de geometrías.

ENUNCIADO

Dos largos cilindros excéntricos de 15 y 4 cm de diámetro respectivamente se mantienen a 100 y 20 ºC separados por un material de k = 3,0 W/m · ºC. La distancia entre centros es 4,5 cm. Calcúlese el calor transferido por unidad de longitud entre los cilindros.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor que se transfiere de un cilindro a otro por cada metro.

Datos conocidos y diagramas:

$r1 = 0,02$ m

$r2 = 0,075$ m

$D = 0.045$ m

$T1 = 20$ ºC

$T2 = 100$ºC

kmedio = 3,0 W/m · ºC

Consideraciones:

- Se usará el análisis gráfico con factor de forma conductivo.
- Los cilindros están inmersos en un medio infinito.
- La longitud de los cilindros es mucho mayor que el radio r2.

Resolución:

Se halla en primer lugar el factor de forma. Para ello recurrimos a la tabla 3.1. Se cumple la situación y las restricciones que nos dan como factor la expresión siguiente:

Lo hallaremos en expresión por metro:

De este modo, según la expresión3.23 del libro, la transferencia de calor será:

Q = k · S · Tglobal = 3 · 7,9 · (100−20) = 1896 W/m

ENUNCIADO

Dos tuberías enterradas se mantienen a las temperaturas de 300ºC y 125ºC. Sus diámetros son 8 y 16 cm y la distancia entre centros 40 cm. Calcúlese el flujo de calor por unidad de longitud si la conductividad térmica de la tierra en ese lugar es k=0,7W/mºC.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El flujo de calor por unidad de longitud.

Datos conocidos y diagramas:

D=0,4m

300ºC k=0,7W/mºC 125ºC

2·r1=0,08m

2·r2=0,16m

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).
- Los cálculos se harán por unidad de longitud

Resolución:

Según se explica en el apartado 3.4. del libro de texto podemos expresar el flujo de calor como: . Siendo S el factor de forma conductivo cuyos valores calculados para las diversas geometrías se resumen en la Tabla 3.1. de las páginas 55 a 58.

En el caso que nos ocupa de conducción entre dos cilindros isotermos de longitud L inmersos en un medio infinito la expresión del factor de forma S es la siguiente:

Siendo

De modo que sustituyendo los datos del enunciado tenemos:

Sustituyéndolo en la expresión inicial del flujo de calor:

Es el flujo de calor por unidad de longitud.

ENUNCIADO

Una esfera caliente de 1,5 m de diámetro se mantiene a 300 ºC inmersa en un material de k = 1,2 cuya superficie exterior está a 30 ºC. La profundidad del centro de la esfera es 3,75 m. Calcúlese la pérdida de calor.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La pérdida total de calor que sufre la esfera.

Datos conocidos:

Diámetro = 1,5 m

Tesfera = 300 ºC

K =1,2 D D = Profundidad =3,75 m rr r

Tsup = 30 ºC

S = factor de forma

Consideraciones:

El valor del factor de forma conductivo S, ha sido tomado de la tabla 3.1 directamente.

Resolución:

En un sistema tal como el que aparece en este ejercicio, podemos una vez calculado el factor de forma S, deducir el calor que se pierde de la siguiente forma:

q = k · S · Tglobal

donde, como ya hemos señalado,

S =

Así, pues resulta:

ENUNCIADO

Se ha diseñado un esquema para medir la conductividad térmica del suelo mediante la inmersión en la tierra de una barra calentada eléctricamente, en posición vertical. Por requisitos de diseño, la barra tiene 2,5 cm de diámetro y su longitud es 1 m. Para impedir indebidas alteraciones en el suelo, la temperatura máxima de la barra debe ser 55ºC, mientras que la temperatura de la tierra es 10ºC. Suponiendo que la conductividad del suelo es K =1,7 W/m·ºC,¿qué potencia en vatios necesita el calentador eléctrico?

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La potencia en vatios que necesita el calentador eléctrico, para medir la conductividad térmica del suelo.

Datos conocidos y diagramas:

r = 1,25 cm

Tmb = 55ºC L =1 m

Ts = 10ºC Tmaxbarra= Tmb = 55ºC

L=1m Ts = 10ºC

k = 1,7 W/mºC

d =2,5cm

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario.
- Suponemos que el cilindro es isotermo situado en un medio semi−infinito.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).
- Estamos en un sistema bidimensional.

Resolución:

Para calcular la potencia que necesita el calentador tendremos que utilizar la expresión que sigue a continuación para calcular el flujo de calor:

q = k · S · Tglobal (1) donde k = conductividad térmica

S = factor de forma

Tglobal = diferencia de temperaturas límite

Primero, se calculará el factor de forma S. En este caso tenemos un cilindro isotermo en un medio semi−infinito. De la tabla 3.1 del libro, se obtiene que el factor de forma para este caso viene definido por la siguiente expresión:

sustituyendo en la expresión por los datos del problema, obtenemos:

=1,238

Calculado el factor de forma, pasamos a sustituir datos en la expresión (1):

$q = kS\ Tglobal = 1{,}7 \cdot 1{,}238(55-10) = 94{,}71W$, esta es la potencia que necesita el calentador.

ENUNCIADO

Dos tuberías están inmersas en un material aislante de k=0,8 W /m·ºC. Una de las tuberías tiene 10 cm de diámetro y lleva un fluido caliente a 300ºC, mientras que la otra tiene 2,8 cm de diámetro y lleva un fluido frío a 15ºC. Las tuberías son paralelas y sus centros están separados 12cm. Cálculese el flujo de calor por metro de longitud entre las las tuberías.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El flujo de calor por metro de longitud entre las las tuberías.

Datos conocidos y diagramas

$D1=10$ cm ; $r1=5$cm

$D2=2{,}8$ cm ; $r2=1{,}9$cm

$D=12$ cm

$T1=300$ºC ; $T2=15$ºC

$K=0{,}8$ W /m·ºC

Aislante infinito que contiene a las dos

tuberías que estudiamos

Consideraciones:

Estamos en el caso de cilindros isotermos de longitud L inmersos en un medio conductor de tamaño infinito respecto a ellos. Además L>>>D, r1, r2.

Resolución:

Del apartado 3.4 sabemos que $dQ = k \cdot S \cdot dT$, donde S es el factor de forma conductivo, el cual lo podemos hallar para las condiciones de este problema en la tabla 3.1.

Por lo tanto:

ENUNCIADO

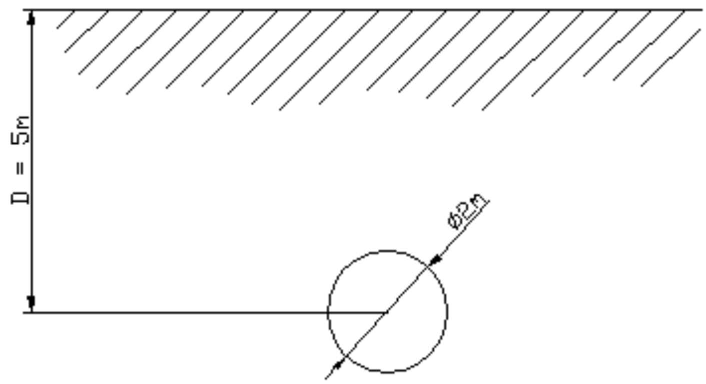
En cierto lugar la conductividad térmica de la tierra es k = 1,5W/mºC. En este lugar, una esfera isoterma que tiene una temperatura de 5ºC y cuyo diámetro es de 2,0 m se encuentra enterrad, estando su centro a una profundidad de 5,0 m. La temperatura de la tierra es de 25ºC. Calcúlese el calor perdido por la esfera.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor perdido o ganado por la esfera.

Datos conocidos y diagramas:



La conductividad de la tierra es k = 1,5W/mºC

Esfera es isoterma, y Tesfera = 5ºC

La tierra también es isoterma, y Ttierra = 25ºC

Diámetro de la esfera 2r = 2,0m.

Profundidad del centro de la esfera D = 5,0m

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto q = cte.
- Supondremos geometría bidimensional.
- Como sólo hay dos temperaturas límite, suponemos que podemos aplicar la teoría del factor de forma conductivo (Pág. 55, sección 3.4 del libro)

Resolución:

La resolución de este ejercicio es muy sencilla si consideramos aplicable la teoría del factor de forma conductivo. Según esto, en sistemas bidimensionales, donde tan sólo aparecen dos temperaturas límite involucradas, podemos definir un factor de forma conductivo de la siguiente manera:

Así, el intercambio neto de calor, se puede expresar por una expresión muy parecida a la Ley de Fourier. En esta ecuación aparece S, que es un factor de corrección (en cuanto a sus unidades, va en metros), que proporciona información acerca de la forma concreta de nuestro sistema.

Para ciertas geometrías, las más usuales, en la tabla 3.1 del libro, aparecen descritos los factores de forma, y las restricciones a las que están sujetas estas simplificaciones. En nuestro caso no tenemos mas que buscar el caso de una esfera isoterma de radio r, inmersa en un medio semi−infinito cuya superficie es isoterma. Vemos que la expresión del factor de forma es la siguiente:

De esta manera tenemos:

Queda comentar, que como es lógico, el flujo de calor va hacia la esfera, es decir, la esfera ha ganado calor. Esto se ve a simple vista, ya que la esfera se encuentra a menor temperatura que su entorno, y la esfera se irá calentando (o absorbiendo calor si es isoterma).

ENUNCIADO

Dos tuberías de 5 cm y 10 cm de diámetro están totalmente rodeadas de asbesto poco compacto. La distancia entre los centros de las tuberías es 20 cm. Una de las tuberías lleva vapor a 110 °C, mientras que la otra lleva agua fría a 3 °C. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por la tubería caliente.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor por unidad de longitud perdido por la tubería caliente.

Datos conocidos y diagramas:

$d1 = 10$ cm

$r1= d1/2 = 5$ cm

$d2 = 5$ cm D

$r2 = d2/2 = 2,5$ cm

$D = 20$ cm

$T1 = 3$ ºC (temp. del tubo 1)

$T2 = 110$ ºC (temp. del tubo 2)

L = longitud de los cilindros

K = 0,149 W/(mºC) por ser asbesto poco compacto (Tabla A.3, pag. 440)

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- La conductividad térmica es cte. (K = cte.).
- $L >> r$ y $L >> D$

Resolución:

Para un sistema físico compuesto de dos cilindros isotermos de longitud L inmersos en un medio infinito, que en este caso se trata de asbesto, tenemos que según la tabla 3.1, en la página 56, el factor de forma conductivo es de:

S =

Por lo que: S / L = = 1,857

De esta forma, por la ecuación 3.23 podemos calcular el calor perdido por unidad de longitud:

Q = K " S " (T2 − T1) así:

Q / L = K " S / L " (T2 − T1) = 0,149 " 1,857 " (110 − 3) = 29,61 W / m

ENUNCIADO

Un cilindro largo cuya superficie se mantiene a 135 ºC está inmerso en un material cuya conductividad térmica es k = 15,5 W/m ºC. El diámetro del cilindro es 3 cm y la profundidad de su eje es 5 cm. La temperatura de la superficie del material es 46 ºC. Calcúlese el calor por metro de longitud perdido por el cilindro.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor perdido por el cilindro por metro de longitud.

Datos conocidos y diagramas:

T0 = 135 ºC

T" = 46 ºC

Profundidad = 5 cm

Diámetro = 3 cm

K = 15,5 W/(mºC)

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto q = cte.
- Suponemos conducción bidimensional.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).
- El cilindro es largo, esto es: L >> r

Resolución:

En un sistema bidimensional en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite, se puede emplear el método del factor de forma conductivo.

Este sistema define el calor transmitido por conducción como proporcional a la diferencia global de temperaturas, a través de la conductividad térmica y de una constante que denomina factor de forma, y que depende únicamente de la forma y dimensiones de los dos elementos del sistema:

Para un cilindro como el que nos ocupa, con L >> r, y D < 3r, el factor de forma viene dado por la expresión:

Así pues, el calor transmitido por conducción desde el cilindro al medio viene dado por la siguiente ecuación:

Dado que en este problema se nos pide la transferencia de calor por unidad de longitud del cilindro, la transformaremos en lo siguiente:

Sustituimos valores:

Comentarios:

Como ayuda al cálculo, téngase en cuenta que el argumento coseno hiperbólico puede calcularse a partir de:

ENUNCIADO

Una esfera de 3 m de diámetro contiene hielo y agua a 0 ºC y está inmersa en un medio semi−infinito que tiene una conductividad térmica de k = 0,2 W/(m.ºC). La superficie superior del medio es isoterma a 30 ºC y el centro de la esfera está a una profundidad de 8,5 m. Calcúlese el calor transmitido por conducción al material aislante.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor transmitido por conducción al material aislante.

Datos conocidos y diagramas: isoterma

r = 1,5 m

D = 8,5 m D

Tisoterma = 30 ºC

Tesfera = 0 ºC r

K = 0,2 W/(mºC)

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- Suponemos conducción multidimensional.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

Se trata de una esfera isoterma de radio r inmersa en un medio semi−infinito cuya superficie es isoterma.

En un sistema bidimensional en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite, se puede definir un factor de forma conductivo S a partir de la ecuación 3.23: q = k S "T.

El valor de S para esta geometría lo hallamos utilizando la tabla 3.1:

Para este caso "T = Tsuperficie − Tcampo lejano

De forma que el calor perdido por la esfera:

Comentarios:

El signo negativo del resultado final indica que es calor cedido por la esfera al medio semi−infinito.

ENUNCIADO

Un calentador eléctrico con forma de placa de 50 por 100 cm, está situado en la parte superior de un medio semi−infinito que tiene una conductividad de k= 0,74 W/m·ºC. Toda la superficie del calentador se mantiene a 120ºC y la temperatura del material aislante a gran distancia del calentador es 15ºC. Calcúlese el calentador transmitido por conducción al material aislante**.**

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor transmitido por conducción al material aislante

Datos conocidos y diagramas:

Placa = 50cm x 100cm

Tplaca = 120ºC

Kaislante = 0,74 W/mºC

Taislante = 15ºC

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- Suponemos conducción bidimensional .
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

Para un sistema bidimensional en le que sólo aparecen involucradas dos temperaturas límite, se puede definir un factor de forma conductivo S tal que Q = kS Tglobal

Los valores de S están representados para diversas geometrías en la tabla 3.1. Aquí se utilizará la expresión para una placa rectangular delgada de longitud L, inmersa en un medio semi−infinito cuya superficie es isoterma con D=0

S = 1.511

Sustituyendo los datos en: Q = k · S · Tglobal obtenemos:

Q = 0,74·1.511·(120 − 15) = 117,38 W

ENUNCIADO

Las dimensiones interiores de un pequeño horno son 60 por 70 por 80 cm y su espesor 5 cm. Calcúlese el factor de forma de esta configuración geométrica.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El factor de forma de un horno.

Datos conocidos y diagramas:

D=80cm

W=70cm H

H=60cm W

L=0,05cm L

D

Resolución:

El factor de forma total se calcula sumando los factores de forma de las paredes, aristas y esquinas. Debido a que todas las dimensiones interiores son mayores que un quinto del espesor de la pared, podemos aplicar las expresiones siguientes:

El factor de forma total es la suma de los factores calculados:

ENUNCIADO

Una tubería de 15 cm. de diámetro, que lleva vapor a 150 ºC, está enterrada cerca de una tubería de 5 cm. que lleva agua fría a 5 ºC. La distancia entre los centros es 15 cm y la conductividad térmica de la tierra en ese lugar puede tomarse como K = 0,7 W/(mºC).Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por la tubería de vapor.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor perdido por unidad de longitud por la tubería de vapor.

Datos conocidos y diagramas:

T1

D1 = 15 cm. **T2**

D2 = 5 cm.

L = 15 cm. **L**

T1 = 150 ºC. **D1 D2**

T2 = 5 ºC.

K = 0,7 W/(mºC)

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- Suponemos conducción bidimensional. Considerando que las tuberías tienen longitud infinita y su diámetro es constante la lo largo de la misma.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).
- Consideramos que solo están involucradas dos temperaturas limite T1 y T2.

Resolución:

Al tratarse de un sistema bidimensional en el que únicamente están involucradas dos temperaturas limite, se podrá definir un factor de forma conductivo S de modo que la expresión del flujo de calor quede de la forma:

Q = k . S .

Para calcular el factor de forma conductivo se utiliza la tabla 3.1 de la página 55 del libro. Viendo el caso al que se corresponde encontramos la siguiente expresión de S :

S =

Sustituyendo por los valores del problema tenemos:

S = = 2,928 L

Con este valor de S vamos a la expresión del flujo de calor:

Q = k . S .

Y sustituyendo queda:

= 0,7 . 2,928 . (150 − 5) = 297,2 W/m.

Comentarios:

Los cálculos se han realizado utilizando ecuaciones semiempíricas, de otro modo el problema se hubiera complicado bastante.

ENUNCIADO

Dedúzcase una expresión equivalente a la Ec. (3.24) para un nodo interior en un problema de flujo de calor tridimensional.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Una expresión que relacione las temperaturas de nudos adyacentes en un problema de flujo de calor tridimensional.

Datos conocidos y diagramas:

Siguiendo el mismo desarrollo que para el caso bidimensional expuesto en el libro (pag. 60−61) podemos alcanzar un resultado semejante, válido para el caso tridimensional.

Esto es, partiendo de la Ecuación de Laplace,

y usando diferencias finitas para aproximar incrementos diferenciales, podemos llegar a una expresión del tipo:

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto q = cte.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).
- Esta ecuación sólo es válida en el caso de que las diferencias finitas que tomemos sean iguales en todas las direcciones.

Resolución:

Para 3 dimensiones, la Ecuación de Laplace es:

Los gradientes de temperatura son:

En este caso, si hacemos también x= y= z:

Comentarios:

- Dado que consideramos la conductividad térmica constante, los flujos de calor pueden expresarse en términos de diferencia de temperaturas.
- La ecuación obtenida establece que el flujo neto en un nodo es cero en condiciones estacionarias.

ENUNCIADO

Dedúzcase la expresión equivalente a la Ec.(3.24) para un nodo interior en un problema de flujo unidimensional

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Ecuación equivalente a de un cuerpo bidimensional, para uno unidimensional.

Datos conocidos y diagramas:

Consideraciones:

- Suponemos cuerpo unidimensional dividido en incrementos iguales
- Los puntos nodales se designan con m indicando los incrementos en x
- No hay incrementos en y
- Régimen estacionario

Resolución:

Los gradientes de temperatura se pueden escribir de la forma:

Despejando la variación de temperaturas tenemos:

Ahora aplicando la ecuación de Laplace

Así queda una expresión de la forma:

ENUNCIADO

Dedúzcase una expresión equivalente a la 3.25 para una condición de contorno de convección unidimensional.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La expresión para una condición de contorno de convección unidimensional.

Datos conocidos y diagramas:

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- Suponemos conducción unidimensional en x.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

Hacemos un balance al punto m que se encuentra en la superficie.

arreglando términos:

ENUNCIADO

Considerando los problemas de aletas unidimensionales del Capítulo 2, demuéstrese que la ecuación nodal para los nodos a lo largo de la aleta de la figura adjunta puede expresarse como:

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La comprobación de la ecuación nodal para un nodo m de la aleta de la figura.

Datos conocidos y diagramas:

En esta ocasión partimos de la expresión de aleta unidimensional obtenida en el capítulo 2:

(1)

Consideraciones:

El método que vamos ha utilizar para resolver el problema se basa en técnicas de diferencias finitas. El método usa la siguiente aproximación:

(2)

Del dibujo podemos comprobar el significado de los subíndices m. Estas posiciones representan incrementos en el eje x. El subíndice n se refiere a incrementos en el eje y, que en nuestro caso no se utilizan porque sólo consideramos la dimensión x.

Resolución:

Particularizando la expresión (1) para $T = T_m$ y haciendo uso de la aproximación (2):

Y así obtenemos la expresión a la que queríamos llegar:

Comentarios:

En la actualidad, el método de las diferencias finitas ya no se usa. En su lugar se utilizan programas de ordenador más potentes y precisos como el ANSYS.

ENUNCIADO

Demuéstrese que la ecuación nodal correspondiente a una pared aislada, mostrada en la figura adjunta, es

$T_{m, n+1} + T_{m, n-1} + T_{m-1, n} - 4T_{m, n} = 0$.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La demostración de que $T_{m, n+1} + T_{m, n-1} + T_{m-1, n} - 4T_{m, n} = 0$.

Datos conocidos y diagramas:

x /2

m,n+1

m−1,n m,n y

y

m,n−1

x

Consideraciones:

- La pared esta aislada y por lo tanto no hay transmisión de calor en el nodo m,n.
- Sabemos que x = y

Resolución:

Para realizar la demostración de la ecuación nodal correspondiente a una pared aislada debemos hacer un balance energético en el nodo m,n.

Al ser una pared aislada la transmisión de calor sólo se realiza por conducción no hay convección ni radiación. Así, aplicamos la ley de Fourier: $Q = -k.A.$

Con L la profundidad que tomamos de la pared para coger el área.

Siendo el primer término la transmisión de calor del nodo m−1,n al m,n en la dirección X, tomando por lo tanto el área en la dirección Y perpendicular a X, será y.

El segundo término será la transmisión de calor del nodo m,n+1 al m,n en la dirección Y, tomando por lo tanto el área en la dirección X perpendicular a Y, será x/2 porque sólo tomamos la parte del interior.

El tercer término será la transmisión de calor del nodo m,n−1 al m,n en la dirección Y, tomando por lo tanto el área en la dirección X perpendicular a Y, será x/2 porque sólo tomamos la parte del interior.

Sabiendo que $x = y$

$2T_{m-1, n} - 2 T_{m, n} + T_{m, n+1} - T_{m, n} + T_{m, n-1} - T_{m, n} = 0$

$T_{m, n+1} + T_{m, n-1} + T_{m-1, n} - 4T_{m, n} = 0$

ENUNCIADO

Para la sección de la esquina aislada que se muestra, dedúzcase una expresión para la ecuación nodal del nodo (m, n) en régimen estacionario

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Se debe obtener la expresión de la ecuación nodal para el nodo (m,n).

Datos conocidos y diagramas:

Conocemos la forma geométrica de la esquina. Así mismo también conocemos que las superficies de esta esquina están aisladas.

m+1,n

m,n

Superficies aisladas

m,n−1 m+1,n−1

Consideraciones:

- El considerar los paredes como superficies aisladas, conlleva que a través de estas no existe flujo neto de calor.
- Consideramos que no hay transmisión de calor por conducción desde el nodo (m,n) a la pared aislada, por lo que por la consideración anterior, se deduce que tampoco habrá fenómeno de confección a través de la pared aislada (Ya que el flujo neto ha de ser nulo)

Resolución:

La resolución de este problema es similar a la del problema anterior. La forma de resolverlo es de manera parecida a como se obtiene la ecuación (3.26). Esta forma consiste en realizar un análisis energético a la sección, solo que como es régimen estacionario, no hay confección en la pared ni generación de calor en los nodos, el balance queda de la siguiente manera:

$-k -k = 0$

Tomando x = y, y despejando obtenemos la solución:

$T_{m,n-1} + T_{m+1,n} - 2.T_{m,n} = 0$

ENUNCIADO

Una barra de aluminio de 2,5 cm de diámetro y 15 cm de longitud sobresale de una pared que se mantiene a 300 ºC. La temperatura del ambiente es 38 ºC. El coeficiente de transferencia de calor es 17 W/m2·ºC. Utilizando técnicas numéricas, de acuerdo con el resultado del Problema 3.28, obténgase el valor de la temperatura a lo largo de la barra. Posteriormente obténgase el flujo de calor proveniente de la pared en .
Ayuda: La condición de contorno final de la barra puede expresarse como

donde denota al nodo del extremo de la aleta. El flujo en la base es

donde es la temperatura de la base y es la temperatura del primer incremento.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El valor de la temperatura a lo largo de la barra. Supuestamente en una serie de puntos concretos.

El flujo de calor proveniente de la pared en .

Datos conocidos y diagramas:

Medidas de la barra de aluminio: 15 cm de longitud y 2,5 cm de diámetro.

La barra es de aluminio.

Otros datos:

El resultado del Problema 3.28 al que se refiere el enunciado del presente problema, es el siguiente:

Hay que tener en cuenta que la notación empleada en esta ecuación difiere de la empleada en las ecuaciones del problema que nos ocupa. Para esta última ecuación la notación empleada ha sido la que representa la siguiente figura:

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario.
- La conductividad térmica es constante.

Resolución:

Se resolverá el problema por el método de las diferencias finitas, escogiendo los nodos a una distancia de 5cm.

No se nos da como dato la conductividad térmica del material, pero sí de que material se trata. Buscando en la Tabla A.2 la conductividad térmica para el aluminio puro:

Sea A el área de la sección transversal y P el perímetro, es decir:

Planteando las ecuaciones para los nodos 2, 3 y 4, obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que son la temperatura de dichos nodos.

Para los nodos 2 y 3 aplicamos la ecuación del problema 3.28:

Dado que el nodo 4 está en el borde de la barra y expuesto a convección la ecuación a plantear en este punto es diferente, y será:

Hallemos numéricamente los términos de estas ecuaciones que se repiten:

- Nodo número 2
- Nodo número 3
- Nodo número 4

Tenemos por tanto el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

Resolviendo el sistema de ecuaciones por sistema que se prefiera, se obtiene:

Para hallar el flujo de calor proveniente de la pared en x = 0, aplicamos:

Comentarios:

Cabe recordar que se trata de una aproximación numérica, es decir, no son resultados exactos. Además en este caso se han cogido muy pocos nodos, y la exactitud del método será tanto mayor cuantos más nodos se cojan, pero habrá que tener en cuenta que el sistema de ecuaciones también aumentará de tamaño y el cálculo manual se hará excesivamente tedioso. Por esto se suelen emplear para este tipo de cálculos programas informáticos.

Sirva también como comentario, que si aumentamos el número de nodos excesivamente estaremos con unas distancias inferiores a la geometría del material, y habrá que emplear una resolución en 3 dimensiones, teniendo que utilizar otras ecuaciones diferentes.

Este método de las diferencias finitas está cayendo en desuso para resolver este tipo de problemas, y cada vez es más empleado el método por elementos finitos.

ENUNCIADO

Un cubo de 20 cm de lado se mantiene a 80 ºC inmerso en un gran medio a 10 ºC de conductividad térmica 2,3 W/m ºC. Calcúlese el calor perdido por el cubo. ¿Cómo puede compararse con el calor que perdería una esfera de 20 cm de diámetro? Compárense los calores transferidos por unidad de volumen.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor perdido por el cubo de 20 cm de lado, el perdido por una esfera de 20 cm de diámetro y los calores perdidos por unidad de volumen de ambos.

Datos conocidos y diagramas:

Consideraciones:

- Este problema es una aplicación de la expresión del factor de forma conductivo (apartado 3.4 libro de teoría).
- Solo se ven involucradas dos temperaturas límite.

Resolución:

La solución del problema la obtenemos haciendo uso de la ecuación 3.23 del libro de teoría:

(Ec 3.23) q=kS T siendo S el factor de forma conductivo.

Los valores de S los obtenemos de la tabla 3.1 en el apartado correspondiente a cubo inmerso en un medio infinito y esfera isoterma inmersa en medio infinito:

Sc=8,24Lc

Se=4 re

Los volúmenes de los cuerpos son:

Vc=Lc3

Ve =(4/3) re3

Sustitución de datos:

Sc=8,24Lc=8,24*0,2=1,648

Se=4 re=4* *0,1=1,2567

El calor perdido será:

qc=kSc T=2,3*1,648*(80−10)=263,33 W

qe=kSe T=2,3*1,2567*(80−10)=202,38 W

El calor perdido por unidad de volumen será:

Vc=Lc3=0,23=8e−3 m3

Ve =(4/3) re3=(4/3) * *0,13=4,19e−3 m3

W/m3

W/m3

Comentarios:

Observamos como el cubo pierde mayor cantidad de calor que la esfera a nivel global pero si realizamos las cuentas por unidad de volumen obtenemos que a igualdad de volumen la esfera pierde mayor cantidad de calor. Si lo que queremos es evacuar calor, cuanto más se parezca el cuerpo a una esfera mejores resultados obtenemos.

ENUNCIADO

Un cilindro largo, horizontal de 10 cm. de diámetro se mantiene a una temperatura de 100 ºC, centrado en una losa de 30 cm. de espesor de un material para el cual k = 10 W/m·ºC. El exterior de la losa se encuentra a 20 ºC. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por el cilindro**.**

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor por unidad de longitud perdido por el cilindro.

Datos conocidos y diagramas:

r = 5 cm.

D = 15 cm. D r

k losa = 10 W/m·ºC

T losa = 20 ºC

T cilindro = 100 ºC D

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto q = cte.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

En un sistema bidimensional en el que solo hay involucradas dos temperaturas límite, se puede definir un factor de forma conductivo S como:

q = k·S· Tglobal

Los valores de S se han calculado para diversas geometrías; y para el caso de un cilindro horizontal de longitud L centrado en una placa infinita de espesor 2D es:

Sustituyendo por los valores:

Una vez calculado el valor de S y según la expresión q = k·S· Tglobal podemos calcular el calor por unidad de longitud perdido por el cilindro:

q = k·S· Tglobal = (10 W/m·ºC)·(2,529·L m²)·(100−20 ºC) = 2023·L W

De donde obtenemos que el calor por unidad de longitud es:

Comentarios:

Las expresiones de los valores del factor de forma conductivo (S) para diferentes geometrías, se pueden obtener de la Tabla 3.1 página 55 del libro TRANSEFERENCIA DE CALOR (J. P. Holman).

ENUNCIADO

Un disco delgado de 5 cm. de diámetro se mantiene a 75 ºC y está situado en la superficie de un gran medio a 15 ºC cuya *k* = 3 W/m.ºC. Calcúlese el calor transferido por conducción al medio.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor que transfiere el disco al exterior.

Datos conocidos y diagramas:

k = 3 W/m.ºC

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- Suponemos conducción multidimensional.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

Observando en tablas obtenemos el factor de forma conductivo correspondiente a un disco delgado inmerso en un medio semi−infinito cuya superficie es isoterma.

Teniendo en cuenta que en nuestro caso D = 0 obtenemos un factor de forma S = 4r.

S = 4r = 4*0,025 m. = 0,1 m.

Aplicamos la ley de Fourier de conducción del calor y obtenemos el resultado.

q = = (3 W/m.ºC)= 18 W.

.

Comentarios:

Observar el siguiente problema para comparar con otros casos de transferencia de calor por conducción.

PROBLEMA 3.74

ENUNCIADO

Un cuadrado delgado de 5 cm de diámetro se mantiene a 75ºC y esta situado en la superficie de un gran medio a 15ºC cuya k = 3 W/mºC. Calcúlese el calor transferido por conducción al medio y compare el resultado con el del 3.73.

SOLUCIÓN

Se debe hallar: El calor transferido por conducción al medio

Datos conocidos:

L = 5 cm

k = 3 W/mºC

Tobjeto= 75 ºC

Tmedio = 15 ºC

Consideraciones:

- La temperatura del campo lejano se toma igual a la temperatura de la superficie isoterma un medio semi−infinito
- La conducción de calor es bidimensional
- Podremos definir el factor de forma conductivo S.

Resolución:

Tenemos un sistema bidimensional en el que solo hay involucrados dos temperaturas limite, por ello la transferencia de calor ser:

Definiremos S como un factor de forma conductivo.

Este factor de forma lo podemos deducir de la tabla 3.1

Como se trata de un cuadrado tenemos que : W/L = 1

Por ello, sustituyendo con valores del Sistema Internacional:

Para este ejercicio la diferencia de temperaturas vendra dada por T = Tobjeto − Tmedio. :

w

Del ejercicio anterior 3.73 sabemos que su transferencia por unidad de área era:

w/m2

Para el cuadrado (a = L2) :

w/m2

Se observa una mayor transferencia al medio para el disco que para el cuadrado.

ENUNCIADO

Una tubería de vapor caliente de 10 cm de diámetro se mantiene a 200°C y esta centrada en un cuadrado de 20 cm de lado de aislante de fibra mineral. La temperatura de la superficie exterior del aislante es 35°C. Calcúlese el calor perdido por una tubería de 20 m de longitud si la conductividad térmica del aislante puede tomarse como 50 mW/m °C.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El calor perdido por la tubería.

Datos conocidos y diagramas:

R = 5 cm

W = 20 cm

Ti = 200°C Tpe

Tpe = 35°C W Ti

k = 50 mW/m°C

L = 20 m

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- Conducción bidimensional.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

El sistema es un cilindro centrado en un prisma cuadrado de longitud L y la expresión del factor de forma correspondiente lo sacamos de la tabla 3.1 de la pagina 58:

S = = = 163,2

Sustituyendo en la expresión de transferencia de calor:

Q =

Comentarios:

Se trata de un sistema bidimensional en el que solo hay involucradas dos temperaturas límite y por lo tanto se puede utilizar un factor de forma que facilita el cálculo de la transferencia de calor:

Q = k·S· T

Para poder usar este factor de forma se tiene que dar que la longitud de la tubería sea mucho mayor que el lado del cuadrado dentro del que esta centrado.

ENUNCIADO

Una tubería de 13 cm de diámetro pasa por el centro de una losa de hormigón de 40 cm de grosor. La teperatura de la superficie de la tubería se mantiene a 100 ºC mediante vapor condensado, mientras que las superficies exteriores del hormigón están a 24 ºC. Calcúlese el calor por unidad de longitud perdido por la tubería.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Calor por unidad de longitud perdido por la tubería.

Datos conocidos y diagramas:

Hormigón: k = 0,76 W/m·ºC [Tabla A.3]

D = 40 cm; Thext = 24 ºC

Tubería: Tpared = 100 ºC ; dtub = 13 cm

Consideraciones:

- Se pide calor por unidad de longitud luego el sistema es bidimensional.

Resolución:

Al ser un sistema bidimensional en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite, se puede definir un factor de forma *S* como

q = k · S · Tglobal

El valor de S para la geometría del problema se calcula según la Tabla 3.1

obteniéndose

$q = (0.76)(1.961)(100-24) = 113.3$ W/m

ENUNCIADO

Considérese una aleta circular de perfil rectangular como se muestra en la Figura 2.12. Determínense las ecuaciones de los nodos para un espesor de aleta t, coeficiente de transferencia de calor h, conductividad térmica K, y generación de calor *q* como función de la coordenada radial *r*, tomando incrementos r. Escríbanse las ecuaciones nodales para el nodo adyacente a la base a T0, para un nodo en la mitad de la aleta y para otro en el extremo de la misma."

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Las ecuaciones nodales para el nodo adyacente a la base, para un nodo en la mitad de la aleta y para otro en el extremo de la misma.

Datos conocidos y diagramas:

Aleta circular de perfil rectangular

espesor = t

h, K,

T0 = temperatura de la base

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario.
- Suponemos conducción unidimensional en r.
- La conductividad térmica es cte (k = cte).

Resolución:

Calculo las áreas, de transferencia de calor en cada caso:

Aconducción =

Aconvección =

Además: V =

Voy a dividir la aleta en la dirección radial. En cada división colocaré un nodo.

Calculo para cada caso:

a) Nodo adyacente al de la base

Uso 3 nodos: r0,, rm y rm+1

Hago un balance de energía :

(Energía que entra a m por conducción desde el nodo situado en r0) + (energía generada) = (energía disipada por convección) + (energía que sale de m hacia el nodo m+1)

Energía entra por conducción =

Energía sale por convección =

Generación de calor =

Energía disipada por convección = −

Sustituyendo y pasando el término de la convección al otro lado, la ecuación queda:

+ + =

b) Para un nodo central, situado a rm

Considero ahora los nodos rm−, rm y rm+1

Siguiendo un procedimiento similar al del apartado anterior

+ + =

c) Nodo del extremo

Ahora la temperatura en el nodo situado en rm+1 es

+ + =

ENUNCIADO

Un cubo de 3 m de lado está enterrado en un medio infinito de conductividad térmica 1,8 W/m·ºC. La temperatura de la superficie del cubo es 30 ºC, mientras que la temperatura del medio es 15 ºC. Calcúlese el calor perdido por el cubo.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Calor perdido por el cubo.

Datos conocidos y diagramas:

L = 3 m

k = 1,8 W/m ºC

Tcubo = 30 ºC

T" = 15 ºC

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario por lo tanto q = cte.
- La conductividad térmica es constante (k = cte).
- Suponemos conducción bidimensional.

Resolución:

El factor de forma conductivo de un cubo inmerso en un medio infinito de lado L (con sólo dos temperaturas límite involucradas) lo obtenemos directamente de la Tabla 3.1:

S = 8,24 L = 8,24·(3m) = 24,72 m

El flujo de calor perdido por el cubo viene dado por la siguiente expresión:

q = k · S · T = k · S · (Tcubo − T") = (1,8 W/m ºC)·(24,72m)·(30−15)(ºC) = 667,44 W

Comentarios:

Este problema es una aplicación de la expresión del factor de forma conductivo q = k · S · T.

ENUNCIADO

El sótano de una casa tiene 4x5 m y la altura del techo es de 3m. Las paredes son de hormigón de 10cm de espesor. En invierno, el coeficiente de convección en el interior es 10W/m2 ºC y el suelo del exterior tiene k=1,7 W/mºC. Analícese este problema y determínese el coeficiente global de transferencia de calor U definido por . Determínese el calor perdido si y .

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El coeficiente global de trasferencia de calor U y el calor perdido.

Datos conocidos y diagramas:

h=10W/m2 ºC T=15ºC

k=1,7 W/mºC

Tinterior =26ºC k=1,7W/mºC

Texterior =15ºC

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- La conductividad térmica es cte (k = cte) para cada medio.

Resolución:

Para objetos enterrados el factor de forma está basado en que

La temperatura del campo lejano se toma como la temperatura de la superficie isoterma.

El calor perdido será:

donde

Calculamos las diferentes resistencias:

Para la convección interior:

Para la conducción a través de la pared:

El área que se utilizará es el área media:

Como sólo hay involucradas dos temperaturas límite, la resistencia del suelo exterior es:

y el coeficiente global de transferencia de calor U definido para Ainterior quedará:

Comentarios:

El factor de forma S entre la cara exterior del sótano y el suelo, debe ser estimado considerando diferentes geometrías de cálculo complejo, algunas de las cuales están dadas en la tabla 3.1.

ENUNCIADO

Una bomba de calor de agua subterránea es un dispositivo de refrigeración que cede calor a la tierra mediante tuberías enterradas en lugar de a la atmósfera local. El calor cedido por esta máquina es 22 kW en un lugar de Oklahoma donde la temperatura de la tierra en profundidad es 17 ºC. La conductividad térmica del suelo en este lugar puede tomarse como 1,6 W/m·ºC. El agua circula por una tubería enterrada de cierta longitud entrando a 29 ºC y saliendo a 23,5 ºC. El coeficiente de convección en el interior del tubo es lo suficientemente alto como para que la temperatura de la pared interna de la tubería pueda suponerse la misma que la del agua. Selecciónese el material adecuado para la tubería/tubo, tamaño y longitud para conseguir el enfriamiento requerido. Pueden utilizarse tamaños de tubería normalizados de la tabla A.11. Los tamaños de tubos normalizados o de tuberías de plástico se obtienen de otras fuentes. Examínense varias opciones antes de realizar la selección final y dense las razones para tal selección.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

Seleccionar el material adecuado para la tubería/tubo, tamaño y longitud para obtener el enfriamiento requerido.

Datos conocidos y diagramas:

q = 22 kW

Ttierra = 17 ºC

k =1,6 W/m ºC

Tent = 29 ºC

Tsal = 23,5 ºC

Ti " Tagua

Consideraciones:

- Suponemos que la tubería está sumergida 0,5 m respecto a la superficie.
- Las temperaturas exterior e interior de la tubería son iguales a la del agua.
- La conductividad de la tierra es constante (k = cte).

- Suponemos estado estacionario luego q = cte.
- Suponemos la transferencia de calor en dirección radial.

Resolución:

En un sistema bidimensional en el que sólo hay involucradas dos temperaturas límite el flujo de calor es:

q = k · S · Tglobal (1)

siendo S un factor de forma conductivo.

Lo primero de todo, calcularemos Tglobal. Para ello tomaremos la temperatura del agua como una media entre la de entrada y la de salida.

Así pues:

Tglobal = Tmedia agua − Ttierra = (26,25−17)(ºC) = 9,25 ºC

Volviendo a la expresión (1) calculamos el factor de forma conductivo S:

De la Tabla 3.1 vemos como para un cilindro de radio r inmerso en un medio semi−infinito cuya superficie es isoterma, en donde L>>r y D>3r, el factor de forma conductivo es:

Vemos como este factor depende de L, D y r. Hemos supuesto que la tubería está a una profundidad de 0,5 m. De la Tabla A.11 tomamos un tipo de tubería con su correspondiente radio. Escogemos la tubería de tamaño nominal 1 pulgada:

DE = 1,315 in = 3,34 cm con lo que r = 1,67 cm = 0,0167 m

Con esta radio calculamos la longitud de la tubería:

Comentarios:

Desde un punto de vista práctico se podrían utilizar varias tuberías pequeñas operando en serie para minimizar las pérdidas de presión debido a la fricción del fluido. Pero esa no es una consideración en este problema.

Se pude observar que dependiendo de la tubería elegida tendremos una u otra longitud.

El cálculo se podría perfeccionar incluyendo la resistencia térmica de la pared del tubo.

Para un análisis más exhaustivo se podrían haber tomado diferentes materiales (por ejemplo PVC, distintos metales...) en la construcción de la tubería. Si se realizase un estudio del coste de la misma como función del diámetro, se podría ver como la de cobre no es una alternativa viable, debido a su elevado coste. Probablemente la tubería de PVC supondría la opción de coste de instalación más bajo.

ENUNCIADO

Jefes de cocina profesionales afirman que los quemadores de cocinas de gas son mejores que las placas eléctricas debido a que la llama de gas y los productos de la combustión permiten un calentamiento más uniforme en torno al fondo de una cazuela. Los defensores de las cocinas eléctricas señalan la falta de productos de la combustión que contaminan el aire en la zona de cocción., pero reconocen que el calor del gas puede ser más uniforme. Los fabricantes de cazuelas de fondo difusor mantienen que sus productos pueden alcanzar una uniformidad en la cocción tan buena como el calor del gas debido a que el calor se extiende a través de una capa de aluminio de 8 mm de espesor en el fondo de la cazuela. Se pide verificar esta afirmación. Para el estudio supóngase un recipiente de 200 mm de diámetro con un fondo de aluminio de 8 mm de espesor estando el interior en contacto con agua hirviendo donde h = 1500 W/m2·ºC a 1 atm (100ºC). Obsérvese el espacio aproximado del elemento circular de una placa eléctrica y diséñese un modelo numérico apropiado para investigar la afirmación de calentamiento uniforme. Considérense factores tales como resistencia de contacto entre el elemento calefactor y la cazuela y la transferencia de calor por radiación que pudiera estar presente. Considérense distintos calentamientos (distintas temperaturas del elemento calefactor) y su efecto. Cuando se haya completado el estudio, háganse recomendaciones sobre lo que los fabricantes de cazuelas pueden afirmar prudentemente de su producto de fondo difusor. Discútanse las incertidumbres del análisis.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

La buena uniformidad de la temperatura en el fondo de las cazuelas de fondo difusor.

Un modelo numérico adecuado para investigar la afirmación de calentamiento uniforme.

Datos conocidos y diagramas:

e = Espesor del fondo difusor de la cazuela = 8 mm.

h = Coeficiente de convección entre el = 1500 W/m2·ºC

agua hirviendo y el fondo difusor.

Fondo difusor de aluminio.

El agua está a 100ºC y a 1 atm.

Consideraciones:

- Sólo se consideran placas eléctricas con resistencias de calentamiento de forma espiral. Los quemadores halógenos y los radiantes tiene características diferentes.
- Para facilitar el estudio, en el cálculo inicial sólo se considera la capa de aluminio.

Resolución:

El mayor efecto de difusión del calor es debido a la capa de aluminio. Después de que el calor se difunda, el acero inoxidable actúa principalmente como una resistencia térmica en serie y el objetivo aquí es evaluar la efectividad del aluminio en lograr un calentamiento uniforme.

Aunque la cazuela es circular, en un estudio inicial se puede considerar exclusivamente el efecto de difusión como el de elementos calentadores de 6 mm de diámetro, con una distancia entre centros de 18 mm y en íntimo contacto con una placa infinita de aluminio en las condiciones convectivas anteriormente expuestas. No olvidemos que el objetivo es comprobar la uniformidad de la temperatura de la superficie de aluminio en contacto con el agua.

Después de realizar este estudio es cuando se puede considerar el efecto conductivo entre el elemento calentador y la cazuela, pero esto sólo afectará en una reducción de la temperatura efectiva del calentador.

Una observación importante es que la gran incertidumbre existente en el valor del coeficiente de convección h = 1.500 W/m2·ºC,que puede variar según los cálculos en un 40%, hace innecesario la elaboración de modelos numéricos.

Comentarios:

Para el cálculo de las distribuciones de temperaturas en modelos multidimensionales como el estudiado en el ejemplo son muy útiles las aplicaciones informáticas existentes en el mercado, tales como el software ANSYS, que se basan en la teoría de los Elementos Finitos. Dichas aplicaciones tienen gran potencia de cálculo y son mucho más sencillas de aplicar que los modelos numéricos analíticos.

ENUNCIADO

Un pequeño edificio de 5 m de anchura por 7 m de longitud por 3 m de altura (dimensiones interiores) se encuentra sobre una losa plana de hormigón de 15 de espesor. Las paredes del edificio también son de hormigón, siendo su espesor de 7 cm. El interior del edificio se utiliza para almacenaje frío a −20 º C y el exterior del edificio está expuesto al aire ambiente a 30º C con un coeficiente de convección de 15 W/m2.Cº. El coeficiente de convección estimado para el interior del edificio es 10 W/m2.ºC y la losa del suelo está en contacto con la tierra teniendo k= 1,8 W/m.ºC. La temperatura de la tierra puede suponerse de 15º C. Calcúlese el calor ganado por el edificio en ausencia de algún material aislante en el exterior. A continuación, selecciónense de la Tabla 2.1 y/o de la Tabla A.3 dos materiales aislantes alternativos para el exterior del edificio. El objetivo del aislamiento es alcanzar una temperatura de 26º C en la superficie exterior del aislante para una temperatura ambiente de 30º C. El sistema de refrigeración trabaja de forma que 1kW produce 4.000 kJ/h de enfriamiento y la electricidad cuesta $0,085 /kWh. La economía dicta que el aislamiento deberá autoamortizarse en un periodo de 3 años. ¿ Cúal es el coste por unidad de volumen de aislamiento permitido para conseguir este objetivo de reembolso para los dos materiales aislantes seleccionados? Supóngase que se elige una temperatura exterior de 24º C como valor permitido para el aislante. ¿ Cuáles serían los costes permitidos en este caso para una autoamortización en tres años? Háganse hipótesis, como, por ejemplo, las horas anuales de funcionamiento del sistema de refrigeración.

SOLUCIÓN

Se debe hallar:

El problema consta de varios apartados. En el primero de todos nuestro objetivo será calcular el calor ganado por el edificio en ausencia de cualquier material aislante. A continuación habrá que seleccionar dos materiales aislantes cuyo objetivo será alcanzar una temperatura exterior de 26º C en su superficie exterior. Deberemos calcular el coste por unidad de volumen de aislamiento permitido para conseguir su autoamortizamiento. A continuación se repetirán los calculos para una temperatura de 24º C.

Datos conocidos y diagramas:

a = 5 m

b = 7 m

c = 0,15 m

h = 3 m

e = 0,07 m

Ti = −20 ºC

Tamb =30 ºC

Ttierra =15 ºC

he = 15 W/m2 ºC

hi = 10 W/m2 ºC

kh = 1,8 W/mºC

Tx = 26 ºC

Ty = 24 ºC

Precio de la electricidad = 0,085 $/kWh

Potencia de refrigeración = 1 kW produce 4000 kJ/h de enfriamiento.

Consideraciones:

- Suponemos estado estacionario y por lo tanto Q = cte.
- Suponemos conducción unidimensional.
- Las conductividades térmicas son ctes (ks = ctes).
- Los coeficientes de transferencia de calor por convección son ctes (hs=ctes).

Resolución:

Primero calcularemos el calor ganado por el edificio en ausencia de material aislante. Este calor es la suma del calor obtenido del suelo, del calor obtenido por las paredes y del obtenido por el techo.

qsuelo === 9545 W

qpared =

Tenemos cuatro paredes :

q1 = = 3648,7 W

q2 == 5108,1 W

qtecho=

qtecho ==8513,5 W

qtotal = qtecho + qsuelo + qparedes = qtecho+ 2·q1+ 2·q2 + qsuelo

qtotal = 8513,5 + 2·3648,7 + 2·5108,1 + 9545 = 35572,1 W

Ahora tenemos que elegir un aislante. El objetivo del aislamiento es alcanzar una temperatura de 26º C en la superficie del aislante, para una temperatura ambiente de 30ºC.

De la tabla 2.1 elegimos las láminas de elastómero que tienen una conductividad térmica de k = 0,0375 W/mºC

Debemos calcular el espesor de aislante necesario para conseguir esa temperatura en la superficie. Nos encontramos ante un problema de transferencia de calor unidimensional a través de una pared compuesta:

q

Ta aislante pared Tb

T1 T2 T3

h1 h3

La transferencia de calor puede expresarse de la siguiente manera:

$q = h3 \cdot A \cdot (Tb - T3) = \cdot (T3 - T2) = \cdot (T2 - T1) = h1 \cdot A \cdot (T1 - Ta)$

Consideraremos una de las paredes, en concreto la de dimensiones 7x3:

$q = h3 \cdot A \cdot (Tb - T3) = 15$ (W/m2ºC) · 7 · 3 (m2) · (30 − 26) (ºC) = 1260 W

Por otro lado:

q = 1260 == , de donde T2 = −11,67 º C

Por último

q = 1260 = kais · A · (T3 − T2) ·, de donde

xais = = 0,0235 m

Como segundo aislante tomaremos la espuma de uretano (también de la tabla 2.1), de conductividad más baja, por lo que nos hará falta un menor espesor. La conductividad témica es de k = 0,018 W/mºC. Su espesor será:

q = 1260 = kais · A · (T3 − T2) ·, de donde

xais = = 0,0113 m

Ahora calcularemos el calor transmitido desde el exterior en presencia de los aislantes.

Con el aislante 1 :

qtotal = qtecho + qsuelo + qparedes = qtecho+ 2·q1+ 2·q2 + qsuelo

qsuelo == = 9545 W

qtecho==

= 2102,8 W

q1==

= 1261,7 W

q2==

= 901,2 W

qtotal = qtecho + qsuelo + qparedes = qtecho+ 2·q1+ 2·q2 + qsuelo = 15973,6 W

Con el aislante2, los cálculos nos darán lo mismo pues tenemos el mismo calor transferido.

qtotal = qtecho + qsuelo + qparedes = qtecho+ 2·q1+ 2·q2 + qsuelo = 15973,6 W

Ahora vamos a elegir una temperatura exterior del aislante de 24º C. Cambiará el espesor de aislante y por tanto también su volumen. Seguiremos el mismo procedimiento que en el apartado anterior.

Para el aislante1, la transferencia de calor será:

q = h3·A·(Tb − T3) = ·(T3 − T2) = ·(T2 − T1) = h1·A·(T1 − Ta)

Consideraremos una de las paredes, en concreto la de dimensiones 7x3:

q = h3·A·(Tb − T3) = 15 (W/m2ºC) · 7 · 3 (m2) · (30 − 24) (ºC) = 1890 W

Por otro lado:

q = 1260 = = , de donde T2 = −7,5º C

Por último

q = 1260 = kais · A · (T3 − T2) ·, de donde

xais = = 0,013 m

Para el aislante2:

q = 1890 = kais · A · (T3 − T2) ·, de donde

xais = = 0,0063 m

El calor transferido con el aislante1:

qtotal = qtecho + qsuelo + qparedes = qtecho+ 2·q1+ 2·q2 + qsuelo

qsuelo == = 9545 W

qtecho==

= 3169 W

q1==

= 1901,4 W

q2==

= 1358,1 W

qtotal = qtecho + qsuelo + qparedes = qtecho+ 2·q1+ 2·q2 + qsuelo = 19233 W

Con el aislante2, los calculos nos darán lo mismo pues tenemos el mismo calor transferido.

qtotal = qtecho + qsuelo + qparedes = qtecho+ 2·q1+ 2·q2 + qsuelo = 19233 W

Por último nos queda hacer los cálculos monetarios para las dos temperaturas. Para la 1ª temperatura (T=26ºC)

El calor ahorrado mediante la utilización del aislante será:

qahorrado = qsin aislante − qcon aislante = 35572,1 − 15973 = 19599,1 W = 19,6 kW

El volumen de los aislantes necesarios es:

V1 = (Aparedes + Atecho) · espesor = [(7·3)·2 + (5·3)·2 + 5·7] ·(0,0235)(m3) = 2,5145 m3

V2 = (Aparedes + Atecho) · espesor = [(7·3)·2 + (5·3)·2 + 5·7] ·(0,0113)(m3) = 1,2091 m3

Sabemos que 1 kW produce 4000 kJ/h de enfriamiento, o lo que es lo mismo 1,11 kW. Tenemos 19,6 kW de ahorro, luego

= 17,64 son los kW de electricidad que hemos ahorrado realmente. Si suponemos que el sistema refrigerador está en funcionamiento 8640 h al año, el coste por unidad de volumen permitido para el aislante1, para una autoamortización en 3 años será:

$/m3 = 17,64 kW · 8640 horas/año · 3 años · 0,085 $/kWh · = 15456,1 $/m3

Para el aislante2:

$/m3 = 17,64 kW · 8640 horas/año · 3 años · 0,085 $/kWh · = 32143,2 $/m3

Para la T = 24º C:

qahorrado = qsin aislante − qcon aislante = 35572,1 − 19233 = 16339,1 W = 16,4 kW

El volumen de los aislantes necesarios es:

V1 = (Aparedes + Atecho) · espesor = [(7·3)·2 + (5·3)·2 + 5·7] ·(0,013)(m3) = 1,391 m3

V2 = (Aparedes + Atecho) · espesor = [(7·3)·2 + (5·3)·2 + 5·7] ·(0,0063)(m3) = 0,6741 m3

= 14,78 son los kW de electricidad que hemos ahorrado realmente. Si suponemos que el sistema refrigerador está en funcionamiento 8640 h al año, el coste por unidad de volumen permitido para el aislante1, para una autoamortización en 3 años será:

\$/m3 = 14,78 kW · 8640 horas/año · 3 años · 0,085 \$/kWh · = 23401 \$/m3

Para el aislante2:

\$/m3 = 14,78 kW · 8640 horas/año · 3 años · 0,085 \$/kWh · = 48306 \$/m3

Comentarios:

El problema realizado esta basado en una infinidad de suposiciones por lo que los resultados serán ante todo orientativos a la hora de elegir un material aislante u otro o una de las temperaturas.

E.T.S de Ingenieros Industriales y de Telecomunicación U.P.NA

Transmisión de calor

3. CONDUCCIÓN ESTACIONARIA MULTIDIMENSIONAL 47

PROBLEMA 3.1

PROBLEMA 3.2

PROBLEMA 3.5

500ºC

r1= 0,04 m

PROBLEMA 3.6

PROBLEMA 3.8

PROBLEMA 3.7

Tesfera

PROBLEMA 3.9

T0

PROBLEMA 3.11

PROBLEMA 3.12

PROBLEMA 3.13

D

100ºC 20ºC

D

PROBLEMA 3.14

Con las restricciones de L>>r y L>>D

PROBLEMA 3.15

PROBLEMA 3.16

PROBLEMA 3.17

k

2

1

Q/l

D

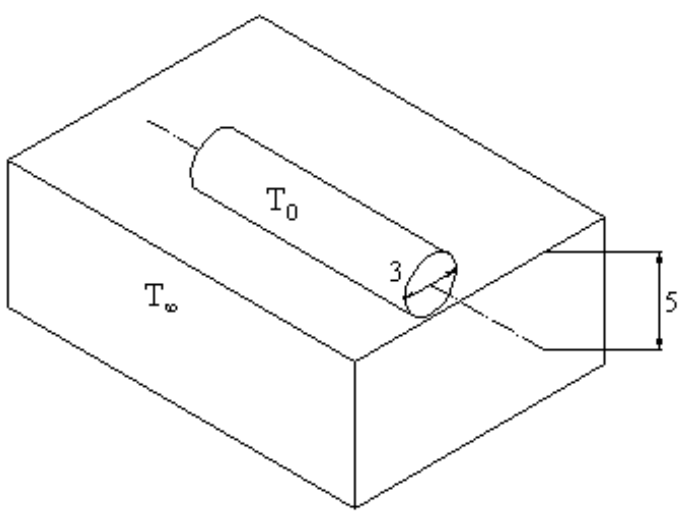
PROBLEMA 3.18

PROBLEMA 3.19

d1

d2

PROBLEMA 3.20



PROBLEMA 3.22

PROBLEMA 3.23

PROBLEMA 3.24

PROBLEMA 3.21

PROBLEMA 3.25

y

x

y

x

m,n

m+1,n

m,n−1

m−1,n

m,n+1

Ec. (3.24)

Si x= y;

PROBLEMA 3.26

m−1,n

m,n

m+1,n

PROBLEMA 3.27

convección

m

m

m−1

PROBLEMA 3.28

x

T''

m+1

m

m−1

base

x

PROBLEMA 3.29

PROBLEMA 3.30

PROBLEMA 3.35

PROBLEMA 3.69

Lc

e

T", K

Lc=0,2 m

Tc=80 ºC

T"=10 ºC

Kmedio = k = 2,3 W/m ºC

e = 0,2 m

PROBLEMA 3.70

PROBLEMA 3.73

PROBLEMA 3.75

PROBLEMA 3.76

r

D

D

PROBLEMA 3.77

r

T0

rm

rm+1

r0

rm+1

rm

rm−1

rm−1

rm

rm+1

Tambiente

PROBLEMA 3.81

L

T''

Tcubo

PROBLEMA 3.84

H=10W/m2ºC T=26ºC

PROBLEMA 3.85

Ttierra

Tsal

Tent

q

L

D

PROBLEMA 3.86

PROBLEMA 3.88

C

b

h

a

Ttierra

Tamb

Ti